Fiche n°8

Congruences

Maths Expertes

Exercice 1.

▶ 1. a) Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2017 par 11.

b) Déterminer le plus petit entier naturel k non nul tel que $4^k \equiv 1$ [11].

c) En déduire le reste dans la division euclidienne de 2017^{2017} par 11.

▶ 2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le chiffre des unités de 2017^{4n} est 1 (on peut démontrer directement ou par récurrence, au choix).

Exercice 2.

▶ 1. Démontrer que $n \equiv 5\ [7]$ si, et seulement si, $n^2 - 3n + 4 \equiv 0\ [7]$

Pour la condition suffisante, on pourra compléter le tableau de congruence ci-dessous :

$n \equiv \cdots\ [7]$	0	1					
$n^2 \equiv \cdots\ [7]$							
$3n \equiv \cdots\ [7]$							
$n^2 - 3n + 4 \equiv \cdots\ [7]$							

▶ 2. Quels sont les entiers naturels qui divisés par 5 ont un quotient égal au reste ? Justifier votre réponse.

Exercice 3.

▶ 1. a) Conjecturer le chiffre des unités de 6^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Démontrer votre conjecture par récurrence.

▶ 2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} 2^{2n} \equiv 1\ [10] \text{ si } n = 0 \\ 2^{2n} \equiv 4\ [10] \text{ si } n \text{ est impair} \\ 2^{2n} \equiv 6\ [10] \text{ si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

▶ 3. Déterminer alors le chiffre des unités de $6^n + 2^{2n} + 21^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie ou un contre-exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Proposition 1 : Pour tout entier naturel n, $2^{3n} \equiv 1\ [7]$.

Proposition 2 : Si $3x \equiv 12\ [15]$ alors $x \equiv 4\ [15]$.

Proposition 3 : La réciproque de la proposition 2.

Proposition 4 : $5^{750} - 1$ est un multiple de 7.

Proposition 5 : Le reste de la division euclidienne de 2016^{2016} par 11 est 5.