Méthode :
1 **Je calcule la dérivée lorsque la fonction est dérivable.**
2 **J’étudie le signe de la dérivée**
3 **Je résume les informations dans un tableau de variations**

① Lorsque le signe de la dérivée est constant :

Exercice 1.

Soit f la fonction définie sur l’intervalle $]-\infty; 2[$, par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-2x}}$.

▶1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
▶2. Etudier les variations de la fonction f.

Exercice 2.

Soit g la fonction définie sur l’intervalle $\mathbb{R}$, par $g(x) = \dfrac{(5-4x)^9}{2}$.

▶1. Déterminer les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.
▶2. Etudier les variations de la fonction g.

Exercice 3.

Soit la fonction $g(x) = \dfrac{-2}{(2x+1)^3}$ définie sur $\left]-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$

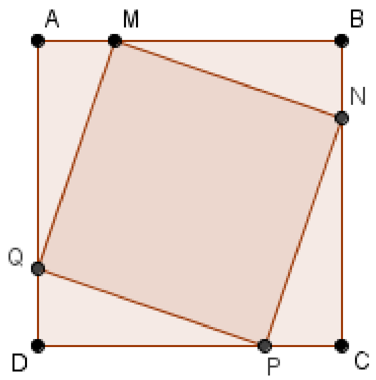
▶1. Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition. La courbe de g admet-elle des asymptotes ? Justifier votre réponse.

▶2 a) Pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$, calculer $g'(x)$ puis étudier le signe de $g'(x)$.

b) En déduire le tableau de variations de la fonction g.

▶3. Déterminer l’équation de la tangente à la courbe en 0.

② Lorsque le signe de la dérivée revient à l’étude du signe d’un polynôme du 1er degré :



Exercice 4.

Soit $ABCD$ un carré de côté 10 cm. On considère les points M, N, P et Q respectivement sur $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$ tels que : $AM = BN = CP = DQ = x$ cm.
On admet que le quadrilatère $MNPQ$ est un carré, pour quelle valeur de x l’aire de $MNPQ$ est-elle minimale ?

Exercice 5.

Un champ rectangulaire a pour longueur 50 m et pour largeur 40 m. On diminue sa longueur de x mètres et on augmente sa largeur de x mètres. On se demande comment évolue son aire. ***Pour quelle valeur de x l'aire est-elle maximale ? Combien vaut cette aire maximale ?***

Exercice 6.

Soit la fonction $h(x) = (3x + 1)^4$ définie sur $\mathbb{R}$

▶1. Déterminer les limites de h aux bornes de son ensemble de définition. La courbe de h admet-elle des asymptotes ? Justifier votre réponse.

▶2 a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $h'(x)$ puis étudier le signe de $h'(x)$.

b) En déduire le tableau de variations de la fonction h.

▶3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en 1.

Exercice 7.

Soit la fonction $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ définie sur $[-1; 1]$

▶1. Pour tout $x \in]-1; 1[$, calculer $f'(x)$ puis étudier le signe de $f'(x)$.

▶2. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

▶3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en 0,5.

③ Lorsque le signe de la dérivée revient à l'étude du signe d'un polynôme du 2^e^ degré :

Exercice 8.

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 2$

▶1. Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition. La courbe de g admet-elle des asymptotes ? Justifier votre réponse.

▶2 a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $g'(x)$ puis étudier le signe de $g'(x)$.

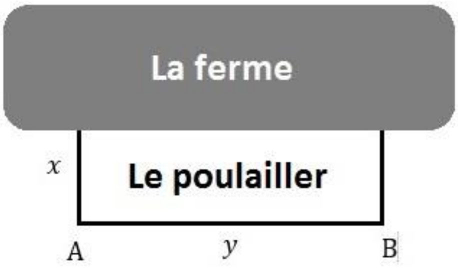
b) En déduire le tableau de variations de la fonction g.

▶3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en 0.

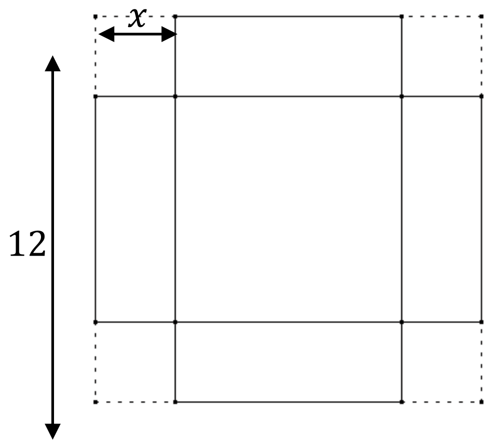
Exercice 9.

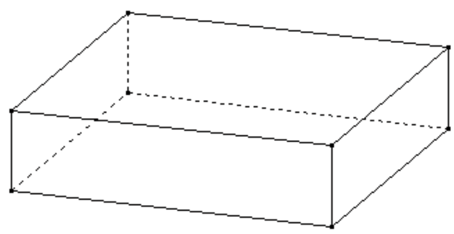
Un fermier décide de réaliser un poulailler (en forme rectangulaire) le long du mur de sa maison. Ce poulailler devra avoir une aire de 392 m². **Où doit-il placer les piquets A et B pour que la longueur de la clôture soit minimale ?**

La figure ci-contre représente le poulailler accolé à la ferme en vue de dessus. On appelle x la distance séparant chaque piquet au mur et y la distance entre les 2 piquets A et B.



Exercice 10.
Dans un carré de côté 12, on découpe dans les quatre angles des carrés de côté x pour construire le patron d'un pavé droit sans couvercle. ***Existe-t-il une valeur de x qui rend le volume maximal ? si oui, que vaut alors ce volume ?*** Justifiez votre réponse.





④ Lorsque le signe de la dérivée revient à l'étude d'une fonction trigonométrique :

Exercice 11.
Soit la fonction $f(x) = \cos^3 x$ définie sur $[0; \pi]$
▶1. Pour tout $x \in [0; \pi]$, calculer $f'(x)$ puis étudier le signe de $f'(x)$.
▶2. En déduire le tableau de variations de la fonction f.
▶3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 12.
Soit la fonction $f(x) = \sin x \cos x$ définie sur $[-\pi; \pi]$
▶1. Démontrer que la fonction est impaire.
▶2. Pour tout $x \in [-\pi; \pi]$, calculer $f'(x)$ puis étudier le signe de $f'(x)$.
▶3. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

① Lorsque le signe de la dérivée est constant :

Exercice 1.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty; 2[$, par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-2x}}$.

▶1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{4-2x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\sqrt{4-2x}} = 0$

$y = 0$ est donc asymptote horizontale en $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to 2^-} \sqrt{4-2x} = 0^+$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$

$x = 2$ est donc asymptote verticale.

▶2. Etudier les variations de la fonction f.

La fonction f est dérivable sur $]-\infty; 2[$.

$\forall x \in]-\infty; 2[,\quad f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-2x}} = \dfrac{u}{v}$

$u = 1 \qquad u' = 0$

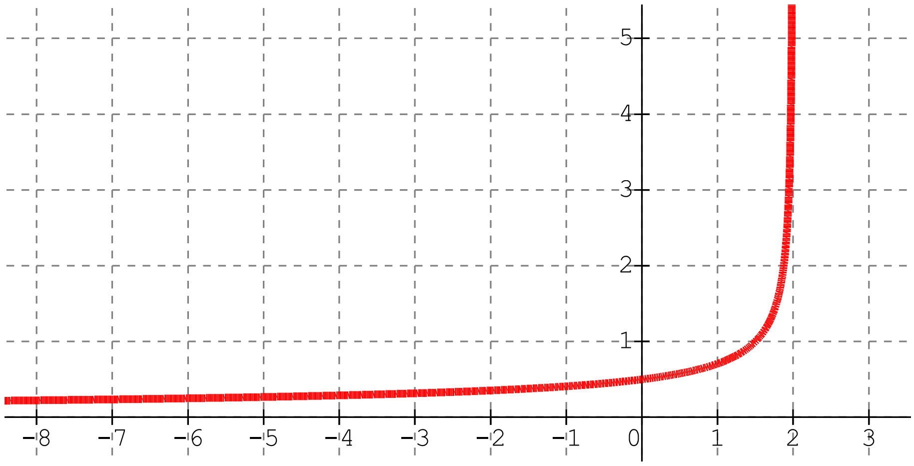
$v = \sqrt{4-2x} \qquad v' = -\dfrac{2}{2\sqrt{4-2x}} = -\dfrac{1}{\sqrt{4-2x}}$

$$\forall x \in]-\infty; 2[,\quad f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{-1 \times -\frac{1}{\sqrt{4-2x}}}{\left(\sqrt{4-2x}\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{4-2x}}}{4-2x} = \frac{1}{\sqrt{4-2x}} \times \frac{1}{4-2x} = \frac{1}{(4-2x)\sqrt{4-2x}}$$

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow 4-2x > 0 \quad \text{car } \sqrt{4-2x} > 0 \\ &\Leftrightarrow -2x > -4 \\ &\Leftrightarrow x < \frac{-4}{-2} \\ &\Leftrightarrow x < 2 \end{aligned}$$

x	$-\infty$ $\quad$ 2
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$



Exercice 2.

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$, par $g(x) = \dfrac{(5-4x)^9}{2}$.

▶1. Déterminer les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.

$$\lim_{x\to-\infty} 5-4x = +\infty \text{ donc } \lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{(5-4x)^9}{2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} 5-4x = -\infty \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(5-4x)^9}{2} = -\infty$$

▶2. Etudier les variations de la fonction g.

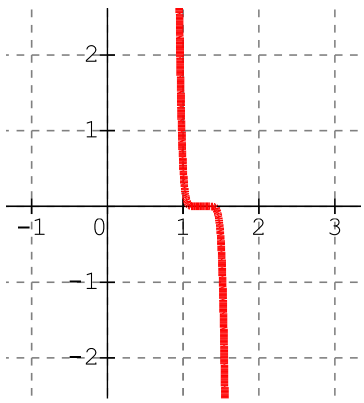
La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\quad g(x) = \dfrac{(5-4x)^9}{2} = u^9$

$(u^9)' = 9 \times u^8 \times u'$

$\forall x \in \mathbb{R},\quad g'(x) = \dfrac{9 \times (5-4x)^8 \times (-4)}{2} = -18(5-4x)^8$

$\forall x \in \mathbb{R},\quad g'(x) < 0 \text{ car } -18 < 0 \text{ et } (5-4x)^8 > 0$



x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$

Exercice 3.

Soit la fonction $g(x) = \dfrac{-2}{(2x+1)^3}$ définie sur $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

▶1. Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition. La courbe de g admet-elle des asymptotes ? Justifier votre réponse.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)^3 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2}{(2x+1)^3} = 0$

$y = 0$ est donc asymptote horizontale en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^+}(2x+1)^3 = 0^+$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty$

$x = -\frac{1}{2}$ est donc asymptote verticale.

▶2 a) Pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$, calculer $g'(x)$ puis étudier le signe de $g'(x)$.

La fonction g est dérivable sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$.

Méthode n°1 :

$\forall x \in \left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[,\quad g(x) = \dfrac{-2}{(2x+1)^3} = \dfrac{u}{v}$

$u = -2 \qquad\qquad u' = 0$

$v = (2x+1)^3 \qquad\qquad v' = 3\times(2x+1)^2\times 2 = 6(2x+1)^2$

$\forall x \in \left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[,\quad g'(x) = \dfrac{u'v-uv'}{v^2} = \dfrac{-(-2)\times 6(2x+1)^2}{((2x+1)^3)^2}$

$g'(x) = \dfrac{12(2x+1)^2}{(2x+1)^6} = \dfrac{12}{(2x+1)^4}$

Méthode n°2 :

$\forall x \in \left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[,\quad g(x) = \dfrac{-2}{(2x+1)^3} = -2\times(2x+1)^{-3} = u^{-3}$

$(u^{-3})' = -3\times u^{-4}\times u'$

$\forall x \in \left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[,\quad g'(x) = -2\times(-3)\times(2x+1)^{-4}\times 2$

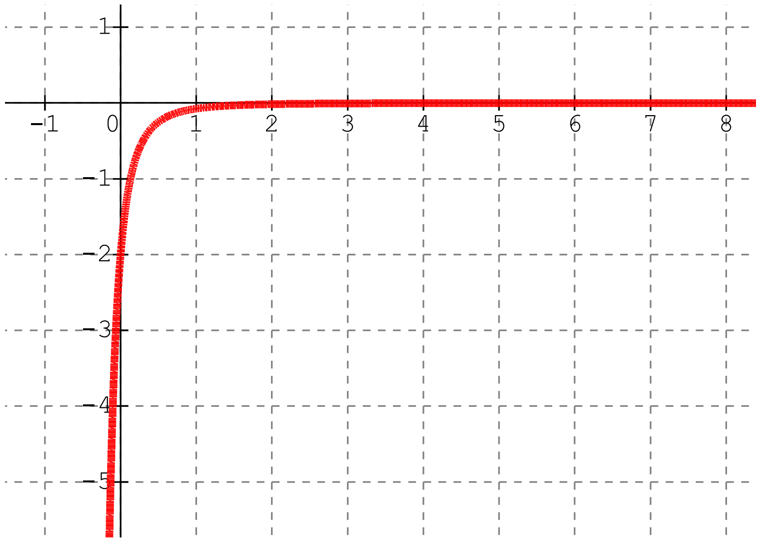
$g'(x) = 12\times(2x+1)^{-4} = \dfrac{12}{(2x+1)^4}$

donc

$\forall x \in \left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[,\quad g'(x) > 0$ car $(2x+1)^4 > 0$

b) En déduire le tableau de variations de la fonction g.

x	$-\frac{1}{2}$ $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ 0



▶3. Déterminer l’équation de la tangente à la courbe en 0.

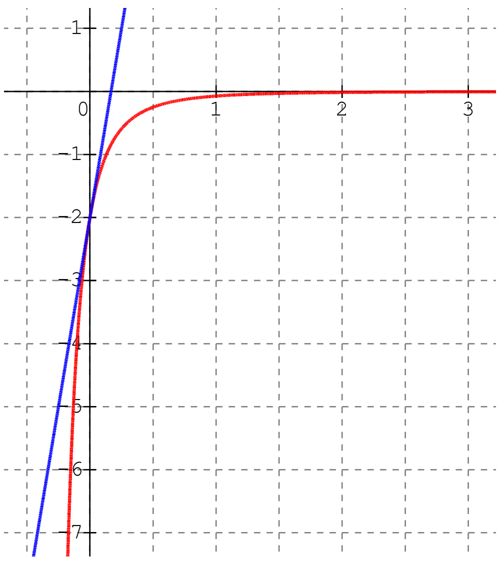
Le coefficient directeur de la tangente à la courbe en 0 vaut :

$$g'(0) = \frac{12}{(2 \times 0 + 1)^4} = 12$$

L’équation de la tangente est donc $y = 12x + b$.

D’autre part, puisque $g(0) = \frac{-2}{(2\times0+1)^3} = -2$. La tangente passe par le point de coordonnée $(0\,, -2)$ donc $-2 = 12 \times 0 + b = b$

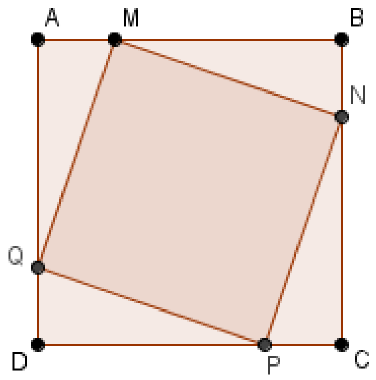
L’équation de la tangente est donc $y = 12x - 2$.



② Lorsque le signe de la dérivée revient à l'étude du signe d'un polynôme du 1er degré :

Exercice 4.

Soit $ABCD$ un carré de côté 10 cm. On considère les points M, N, P et Q respectivement sur $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$ tels que : $AM = BN = CP = DQ = x$ cm.
On admet que le quadrilatère $MNPQ$ est un carré, pour quelle valeur de x l'aire de $MNPQ$ est-elle minimale ?



Notons $f(x)$ l'aire de $MNPQ$.

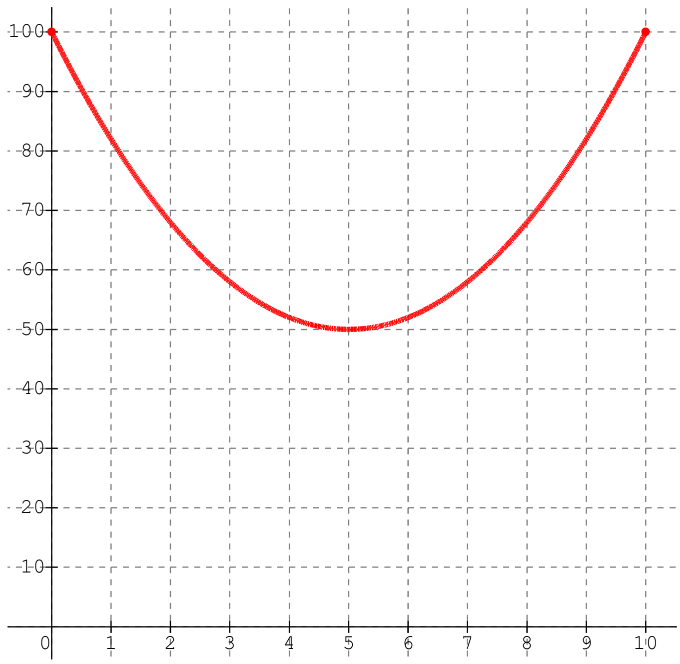
$\forall x \in [0,10]$, $\quad f(x) = 10^2 - 4 \times \dfrac{x \times (10-x)}{2}$

$f(x) = 100 - 2x \times (10 - x)$
$f(x) = 100 - 20x + 2x^2$

La fonction f est dérivable sur $[0,10]$.
$\forall x \in [0,10]$, $\quad f'(x) = -20 + 4x$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -20 + 4x > 0$$
$$\Leftrightarrow 4x > 20$$
$$\Leftrightarrow x > \frac{20}{4}$$
$$\Leftrightarrow x > 5$$

x	0		5		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	100	$\searrow$	50	$\nearrow$	100



$f(5) = 100 - 20 \times 5 + 2 \times 5^2$
$f(5) = 50$
L'aire de $MNPQ$ sera minimale pour $x = 5$ cm, elle vaudra alors 50 cm².

Exercice 5.

Un champ rectangulaire a pour longueur 50 m et pour largeur 40 m. On diminue sa longueur de x mètres et on augmente sa largeur de x mètres. On se demande comment évolue son aire. ***Pour quelle valeur de x l'aire est-elle maximale ? Combien vaut cette aire maximale ?***

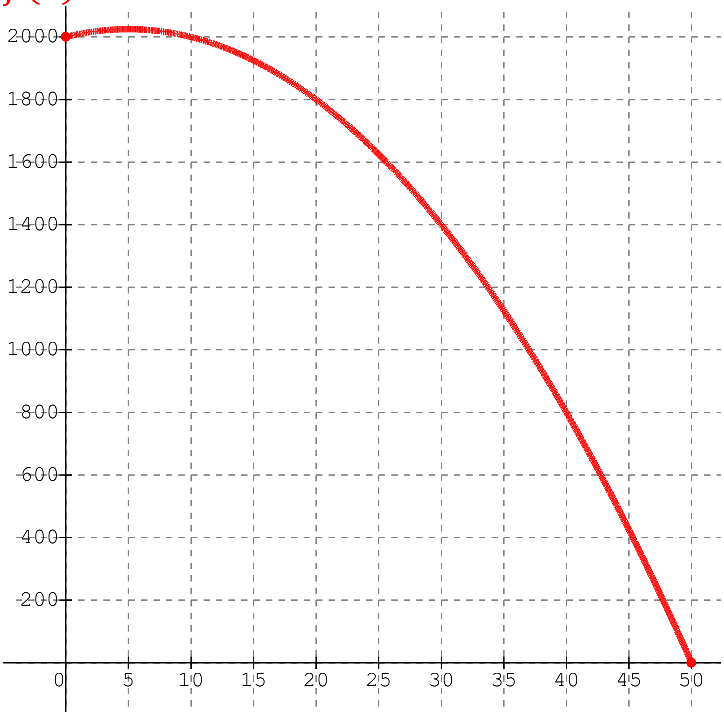
$\forall x \in [0, +\infty[$, notons $f(x)$ l'aire du champ.
$f(x) = (50 - x)(40 + x)$
$f(x) = 2000 + 50x - 40x - x^2$
$f(x) = 2000 + 10x - x^2$

La fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$.
$\forall x \in [0,10], \quad f'(x) = 10 - 2x$

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow 10 - 2x > 0 \\ &\Leftrightarrow -2x > -10 \\ &\Leftrightarrow x < \frac{-10}{-2} \\ &\Leftrightarrow x < 5 \end{aligned}$$

x	0		5		50
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	2000	$\nearrow$	2025	$\searrow$	0

$f(5) = 2000 + 10 \times 5 - 5^2$
$f(5) = 2000 + 50 - 25$
$f(5) = 2025$



L'aire sera maximale pour $x = 5\ cm$, et elle vaudra $f(5) = 2025$ cm².

Exercice 6.

Soit la fonction $h(x) = (3x+1)^4$ définie sur $\mathbb{R}$

▶1. Déterminer les limites de h aux bornes de son ensemble de définition. La courbe de h admet-elle des asymptotes ? Justifier votre réponse.

$$\lim_{x\to-\infty} 3x+1 = -\infty \text{ donc } \lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} (3x+1)^4 = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} 3x+1 = +\infty \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} (3x+1)^4 = +\infty$$

▶2 a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $h'(x)$ puis étudier le signe de $h'(x)$.

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = (3x+1)^4 = u^4$

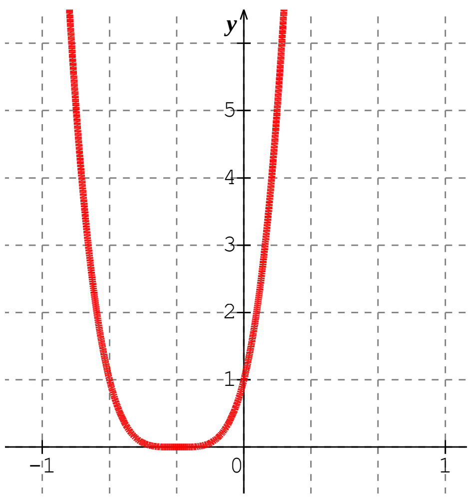
$(u^4)' = 4 \times u^3 \times u'$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = 4 \times (3x+1)^3 \times 3 = 12(3x+1)^3$

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x+1 > 0$$
$$\Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}$$

b) En déduire le tableau de variations de la fonction h.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



$$h\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(3 \times -\frac{1}{3} + 1\right)^4 = 0$$

▶3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en 1.

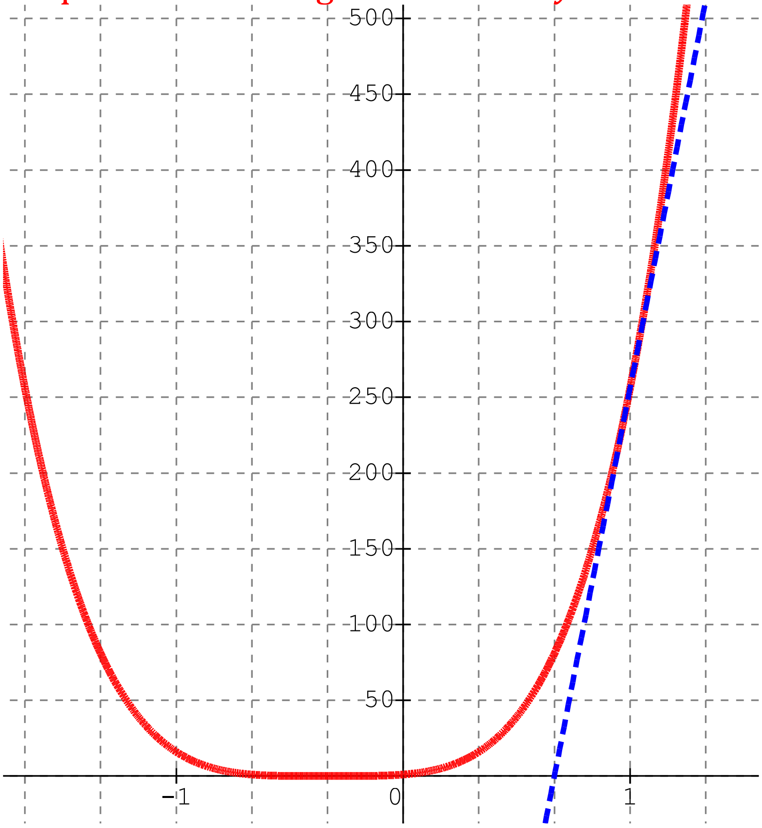
Le coefficient directeur de la tangente à la courbe en 1 vaut :

$h'(1) = 12(3+1)^3 = 768$

L'équation de la tangente est donc $y = 768x + b$.

D'autre part, puisque $h(1) = (3+1)^4 = 256$. La tangente passe par le point de coordonnée (1 ,256) donc $256 = 768 \times 1 + b = 768 + b \Leftrightarrow b = -512$

L'équation de la tangente est donc $y = 768x - 512$.



Exercice 7.

Soit la fonction $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ définie sur $[-1; 1]$

▶1. Pour tout $x \in]-1; 1[$, calculer $f'(x)$ puis étudier le signe de $f'(x)$.

La fonction f est dérivable sur $[-1; 1]$.

$\forall x \in [-1; 1], \quad f(x) = \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{u}$

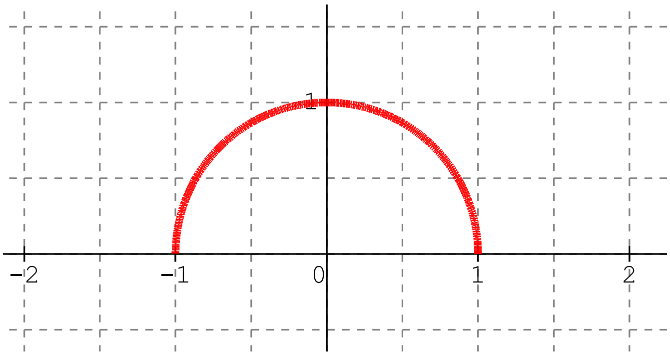
$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

$\forall x \in [-1; 1], \quad f'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -x > 0$$
$$\Leftrightarrow x < 0$$

▶2. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

x	-1	0	1
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	0 ↗	1	↘ 0



$f(0) = \sqrt{1-0^2} = 1$

▶3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en 0,5.

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe en 0,5 vaut :

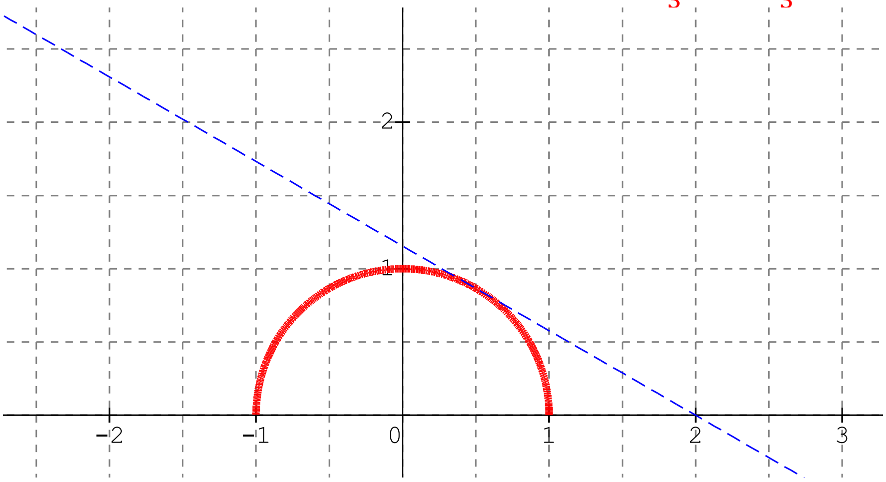
$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

L'équation de la tangente est donc $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + b$.

D'autre part, puisque $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. La tangente passe par le point de coordonnée $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ donc $\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{2} + b = -\frac{\sqrt{3}}{6} + b \Leftrightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{3}}{6}$

$$\Leftrightarrow b = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

L'équation de la tangente est donc $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$.



③ Lorsque le signe de la dérivée revient à l'étude du signe d'un polynôme du 2e degré :

Exercice 8.

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 2$

▶1. Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition. La courbe de g admet-elle des asymptotes ? Justifier votre réponse.

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\quad g(x) = x^3\left(1 - \frac{3}{x} - \frac{24}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1 - \frac{3}{x} - \frac{24}{x^2} + \frac{2}{x^3} = 1\end{array}\right\}\text{donc } \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{3}{x} - \frac{24}{x^2} + \frac{2}{x^3} = 1\end{array}\right\}\text{donc } \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

▶2 a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $g'(x)$ puis étudier le signe de $g'(x)$.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\quad g(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 2$

$\forall x \in \mathbb{R},\quad g'(x) = 3x^2 - 6x - 24$

$$\Delta = 36 - 4 \times 3 \times (-24) = 324 > 0$$

$$x_1 = \frac{6 - \sqrt{324}}{6} = \frac{6 - 18}{6} = -2$$

$$x_2 = \frac{6 + \sqrt{324}}{6} = \frac{6 + 18}{6} = 4$$

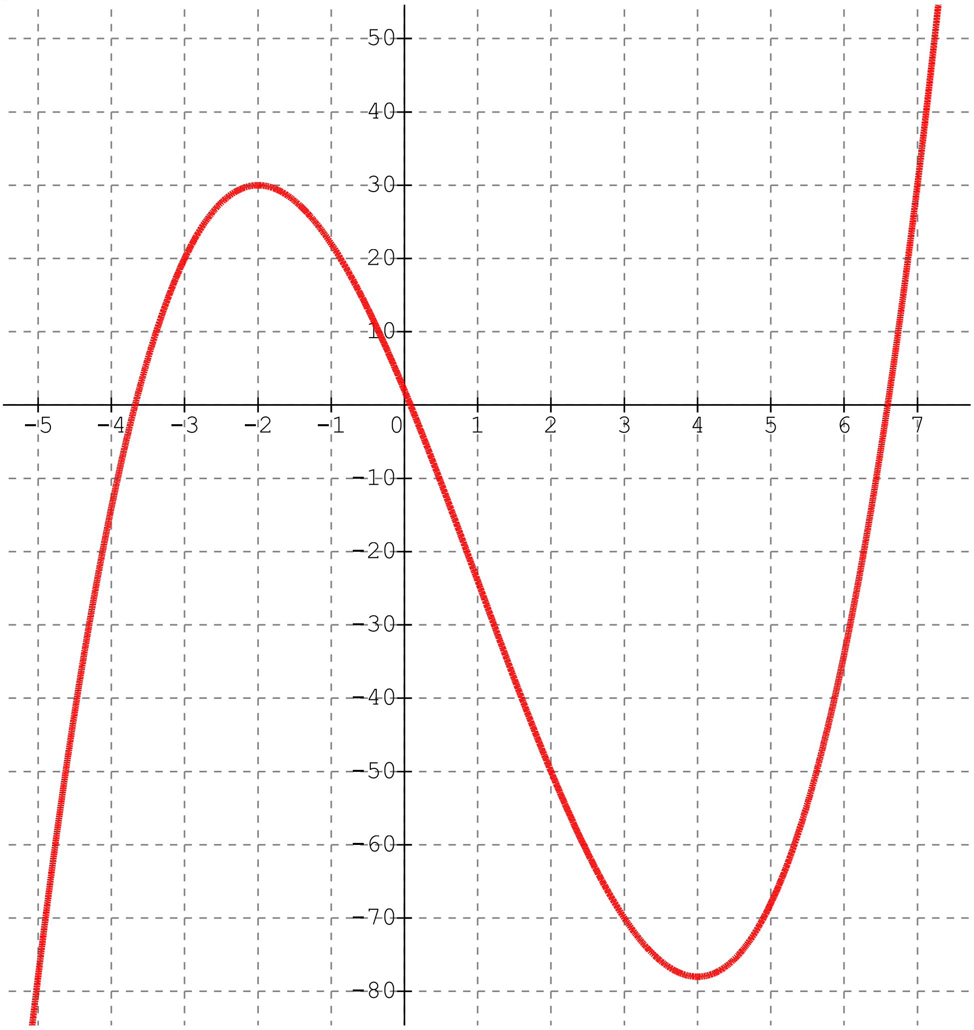
De plus, $a = 3 > 0$, donc la parabole est tournée vers le haut.

b) En déduire le tableau de variations de la fonction g.

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	30	↘	-78	↗	$+\infty$

$g(-2) = -8 - 12 + 48 + 2 = 30$

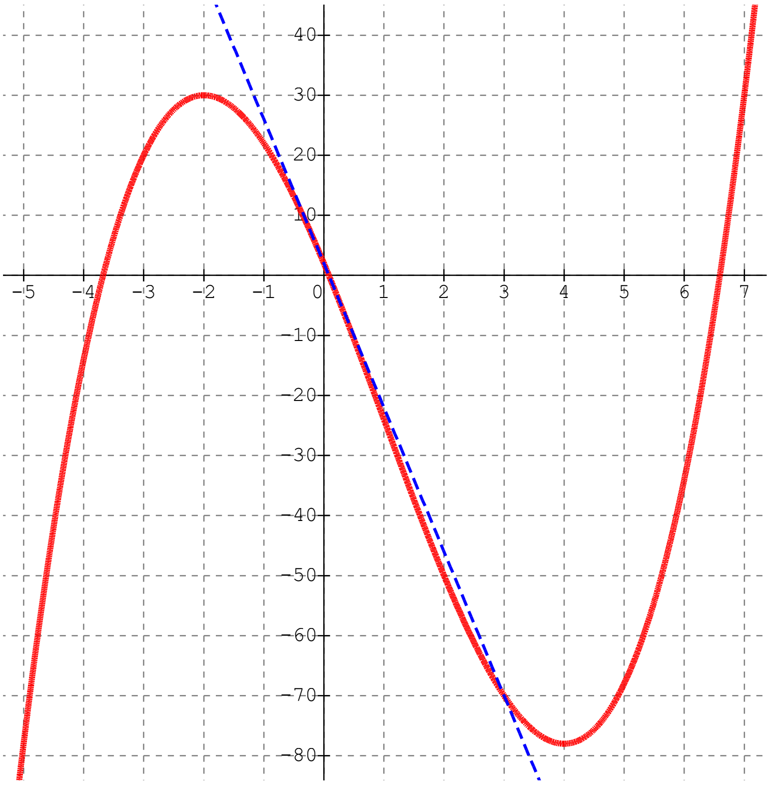
$g(4) = 64 - 48 - 96 + 2 = -78$



▶3. Déterminer l’équation de la tangente à la courbe en 0.

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe en 0 vaut :
$g'(0) = -24$
L’équation de la tangente est donc $y = -24x + b$.

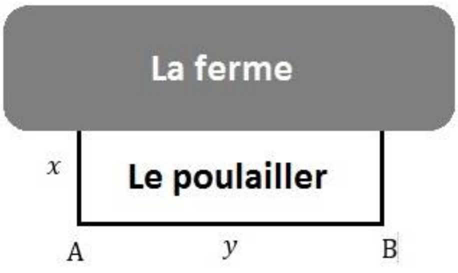
D’autre part, puisque $g(0) = 2$. La tangente passe par le point de coordonnée (0 ,2)
donc $2 = -24 \times 0 + b = b$
L’équation de la tangente est donc $y = -24x + 2$.



Exercice 9.

Un fermier décide de réaliser un poulailler (en forme rectangulaire) le long du mur de sa maison. Ce poulailler devra avoir une aire de 392 m². **Où doit-il placer les piquets A et B pour que la longueur de la clôture soit minimale ?**

La figure ci-contre représente le poulailler accolé à la ferme en vue de dessus. On appelle x la distance séparant chaque piquet au mur et y la distance entre les 2 piquets A et B.



L'aire du poulailler est égale à $x \times y = 392$

donc $y = \dfrac{392}{x}$

$\forall x \in]0,+\infty[,\quad f(x) = x + y + x$

$f(x) = 2x + \dfrac{392}{x}$

La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$.

$\forall x \in]0,+\infty[,\quad f'(x) = 2 - \dfrac{392}{x^2}$

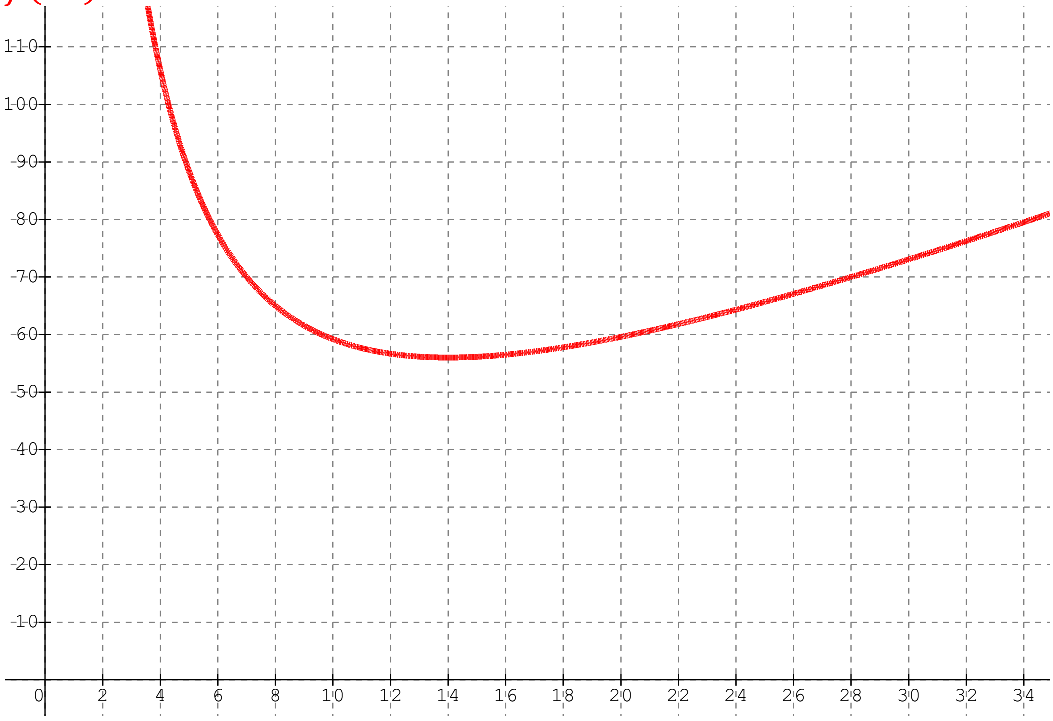
$f'(x) = \dfrac{2x^2 - 392}{x^2}$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 392 > 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 > 392$$
$$\Leftrightarrow x^2 > \frac{392}{2}$$
$$\Leftrightarrow x^2 > 196$$
$$\Leftrightarrow x > \sqrt{196} \text{ ou } \underbrace{x < -\sqrt{196}}_{\text{exclu}}$$
$$\Leftrightarrow x > 14$$

x	0		14		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	56	$\nearrow$	

$f(14) = 28 + 28 + 56$



Exercice 10.

Dans un carré de côté 12, on découpe dans les quatre angles des carrés de côté x pour construire le patron d'un pavé droit sans couvercle. ***Existe-t-il une valeur de x qui rend le volume maximal ? si oui, que vaut alors ce volume ?*** Justifiez votre réponse.

Pour $x \in [0,6]$, notons $f(x)$ le volume du pavé
$f(x) = L \times l \times h$
$f(x) = (12 - 2x) \times (12 - 2x) \times x$

$f(x) = (12 - 2x)^2 \times x$
$f(x) = (144 - 48x + 4x^2) \times x$
$f(x) = 144x - 48x^2 + 4x^3$

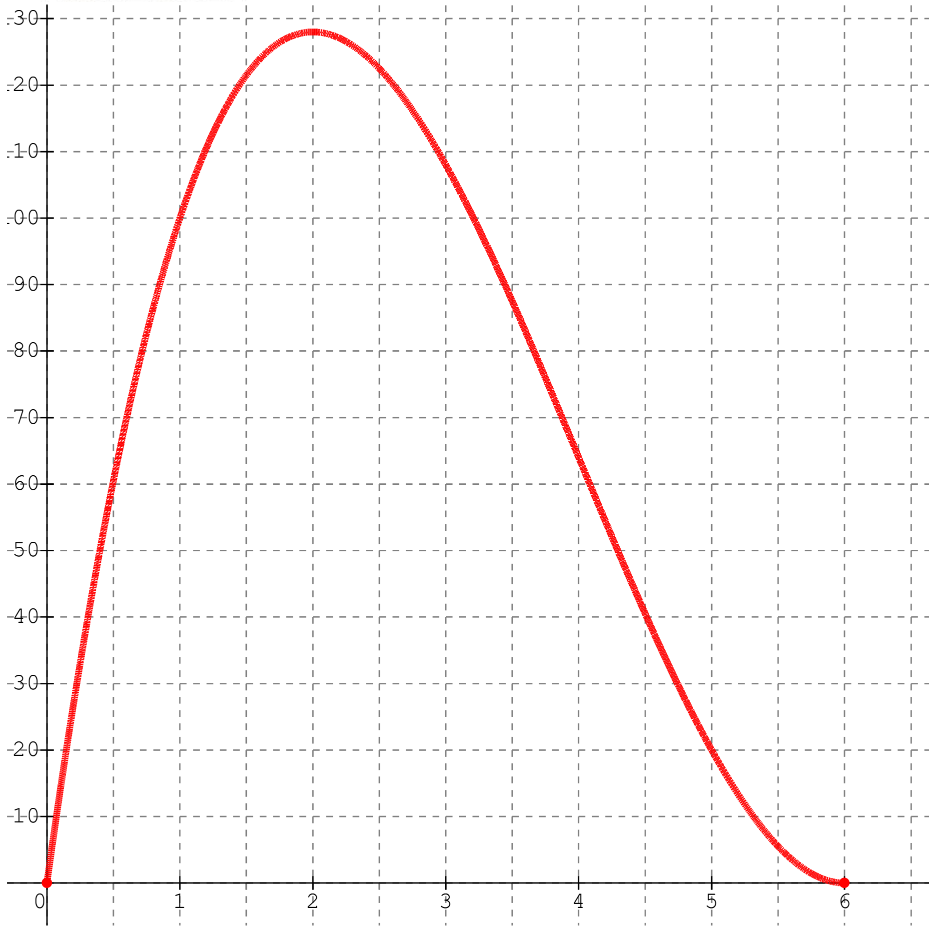
$\forall x \in [0,6],\ \ f'(x) = 144 - 96x + 12x^2$

$$\Delta = 9216 - 4 \times 144 \times 12 = 2304 > 0$$
$$x_1 = \frac{96 - \sqrt{2304}}{24} = 2$$
$$x_2 = \frac{96 + \sqrt{2304}}{24} = 6$$

De plus, $a = 12 > 0$, donc la parabole est tournée vers le haut.

x	0		2		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	128	$\searrow$	0

$f(2) = 288 - 192 + 32 = 128$



④ Lorsque le signe de la dérivée revient à l'étude d'une fonction trigonométrique :

Exercice 11.

Soit la fonction $f(x) = \cos^3 x$ définie sur $[0;\pi]$

▶1. Pour tout $x \in [0;\pi]$, calculer $f'(x)$ puis étudier le signe de $f'(x)$.

La fonction f est dérivable sur $[0;\pi]$.

$\forall x \in [0;\pi], \quad f(x) = \cos^3 x = u^3$

$(u^3)' = 3 \times u^2 \times u'$

$\forall x \in [0;\pi], \quad f'(x) = 3 \times \cos^2 x \times (-\sin x) = -3 \sin x \cos^2 x$

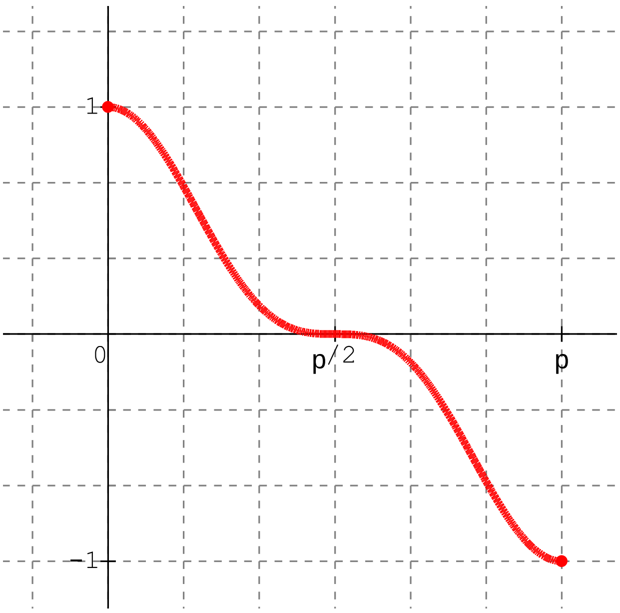
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -\sin x > 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x < 0$$

donc $\forall x \in [0;\pi], \sin x > 0$ donc $f'(x) < 0$

▶2. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

x	0		π
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	-1



▶3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en $\frac{\pi}{4}$.

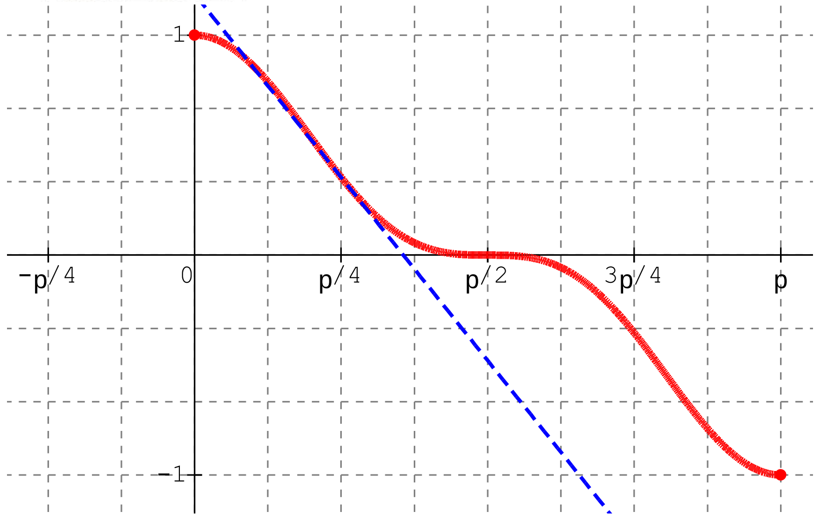
Le coefficient directeur de la tangente à la courbe en $\frac{\pi}{4}$ vaut :

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -3\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{4} = -\frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

L'équation de la tangente est donc $y = -\frac{3\sqrt{2}}{4}x + b$.

D'autre part, puisque $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos^3\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. La tangente passe par le point de coordonnée $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ donc $\frac{\sqrt{2}}{4} = -\frac{3\sqrt{2}}{4} \times \frac{\pi}{4} + b \Leftrightarrow b = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{3\pi\sqrt{2}}{16}$

L'équation de la tangente est donc $y = -\frac{3\sqrt{2}}{4}x + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{3\pi\sqrt{2}}{16}$.



Exercice 12.

Soit la fonction $f(x) = \sin x \cos x$ définie sur $[-\pi;\pi]$

▶1. Démontrer que la fonction est impaire.

$\forall x \in [-\pi;\pi], \quad f(-x) = \sin(-x)\cos(-x)$
or $\sin(-x) = -\sin(x)$ *et* $\cos(-x) = \cos(x)$
$f(-x) = -\sin(x)\cos(x)$
$f(-x) = -f(x)$
Donc f est impaire

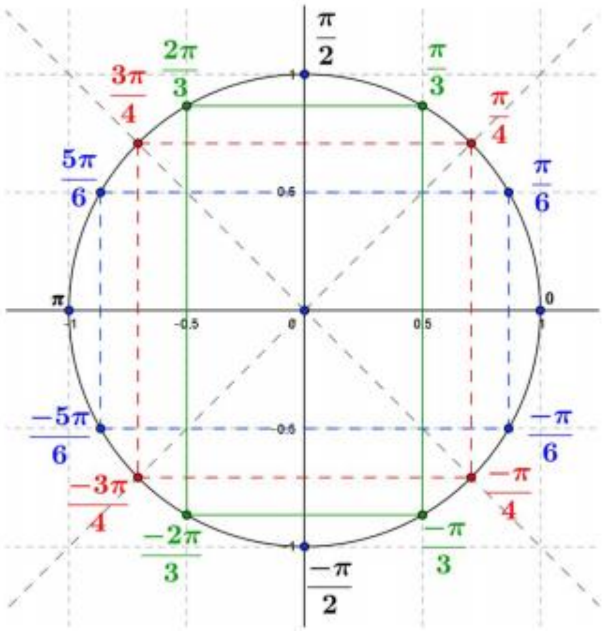
▶2. Pour tout $x \in [-\pi;\pi]$, calculer $f'(x)$ puis étudier le signe de $f'(x)$.

La fonction f est dérivable sur $[-\pi;\pi]$.
$\forall x \in [-\pi;\pi], \quad f(x) = \sin x \cos x = u \times v$
$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$
$\forall x \in [-\pi;\pi], \quad f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$
or $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
donc $f'(x) = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x > 0$$
$$\Leftrightarrow -2\sin^2 x > -1$$
$$\Leftrightarrow \sin^2 x < \frac{-1}{-2}$$
$$\Leftrightarrow \sin^2 x < \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow -\sqrt{\frac{1}{2}} < \sin x < \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} < \sin x < \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

donc $-\pi < x < -\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3} < x < \pi$



▶3. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

x	$-\pi$		$\frac{-2\pi}{3}$		$\frac{-\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		2π
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	0	+	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	0

$$f\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2} \times \frac{-\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = f\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= \frac{-\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$
$$= f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$