Exercice 1.

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$ définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

a) Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f.

b) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f puis établir le tableau de variations de f.

c) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

Exercice 2.

Soit la fonction $g(x) = e^{\cos x}$ définie sur l'intervalle $[0; 2\pi]$

Déterminer le minimum de la fonction g *(On justifiera les calculs)*.

Exercice 3.

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$par $f(x) = \dfrac{e^{2x} - x}{x}$.

a) Démontrer que $f(x) = 2\dfrac{e^{2x}}{2x} - 1$ pour tout $x > 0$.

En déduire la limite de f en $+\infty$.

b) Déterminer la limite de f en 0. La courbe de f admet-elle une asymptote ?

c) Déterminer le tableau de variations de la fonction f.

d) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

Exercice 4.

PARTIE A : Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - xe^x + 1$.

▶1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

▶2. Etudier les variations de la fonction g et donner son tableau de variations.

▶3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique. On note α cette solution, donner un encadrement de α entre deux entiers consécutifs.

▶4. Démontrer que $e^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

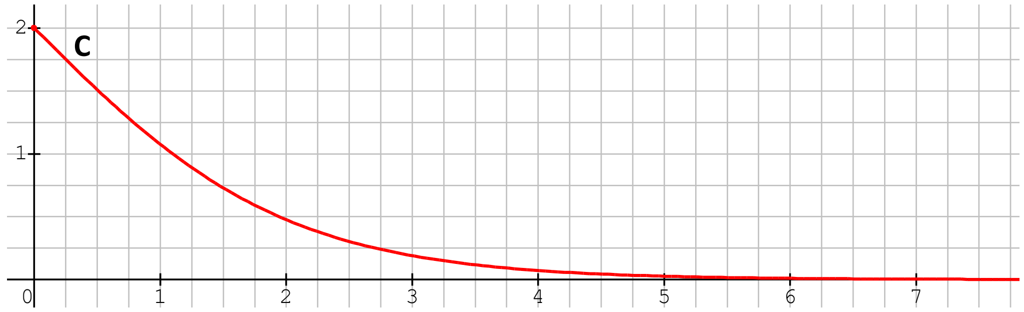
PARTIE B : Soit la fonction A définie sur $\mathbb{R}$ par $A(x) = \dfrac{4x}{e^x + 1}$.

▶1. Déterminer les limites de A en $+\infty$ et en $-\infty$.

▶2. Etudier les variations de la fonction A et donner son tableau de variations.

PARTIE C : Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4}{e^x + 1}$.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. La figure est donnée ci-dessous :



Pour tout réel x positif ou nul, on note M le point de C de coordonnées $(x; f(x))$, P le point de coordonnées $(x; 0)$ et Q le point de coordonnées $(0; f(x))$.

▶1. Démontrer que l'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale lorsque M a pour abscisse α (le réel α défini dans la partie A).

▶2. Le point M a pour abscisse α. La tangente T en M à la courbe C est-elle parallèle à la droite (PQ) ?

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

CORRECTION Exercice n°1 :

a)

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}}{x} = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{e^{-x}}{x} = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{e^{-x}}{x} = -\infty$

$f(x) = -\left(\dfrac{e^{-x}}{-x}\right)$ or $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}}{-x} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

b)

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \frac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} = \frac{(-x-1)e^{-x}}{x^2}$$

$e^{-x} > 0$ et $x^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ donc $f'(x)$ est du signe de $(-x-1)$.

$$-x - 1 > 0 \Leftrightarrow -x > 1 \Leftrightarrow x < -1$$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$-x-1$		$+$	0	$-$		$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-e$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

$$f(-1) = -e$$

c)

Le coefficient directeur de la tangent en 1 et $f'(1)=\frac{(-1-1)e^{-1}}{1^2}=-\frac{2}{e}$

L'équation de la tangente en 1 est de la forme : $y=-\frac{2}{e}x+b$

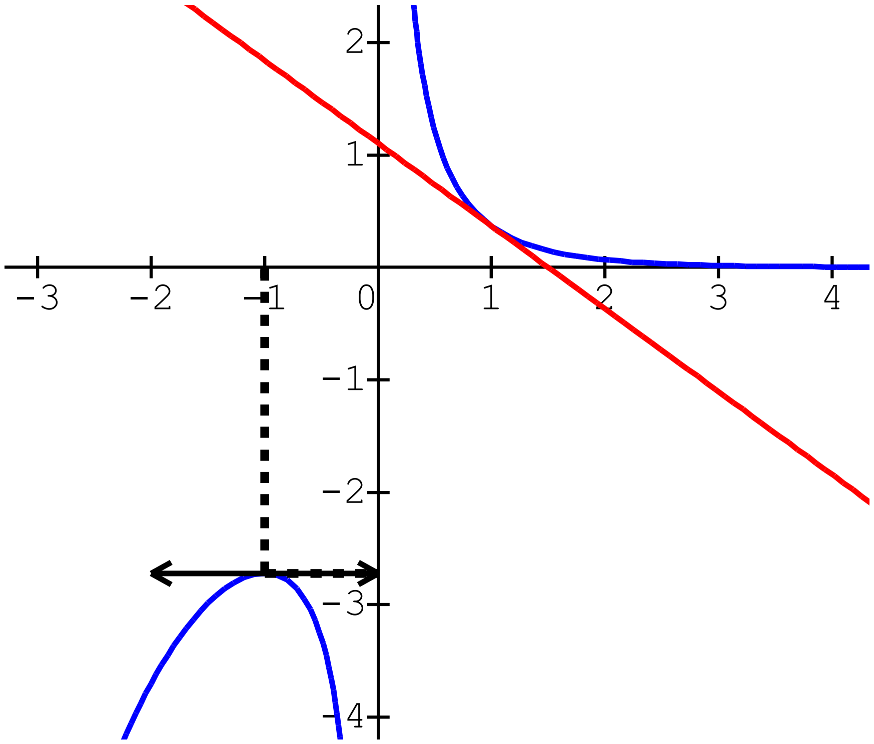
La tangente passe par le point de coordonnées $(1, f(1))$

où $f(1)=\dfrac{e^{-1}}{1}=\dfrac{1}{e}$

$$\frac{1}{e}=-\frac{2}{e}\times 1+b$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{e}=-\frac{2}{e}+b$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{e}+\frac{2}{e}=b$$
$$\Leftrightarrow b=\frac{3}{e}$$

L'équation est donc :

$$y=-\frac{2}{e}x+\frac{3}{e}$$



CORRECTION Exercice n°2 :

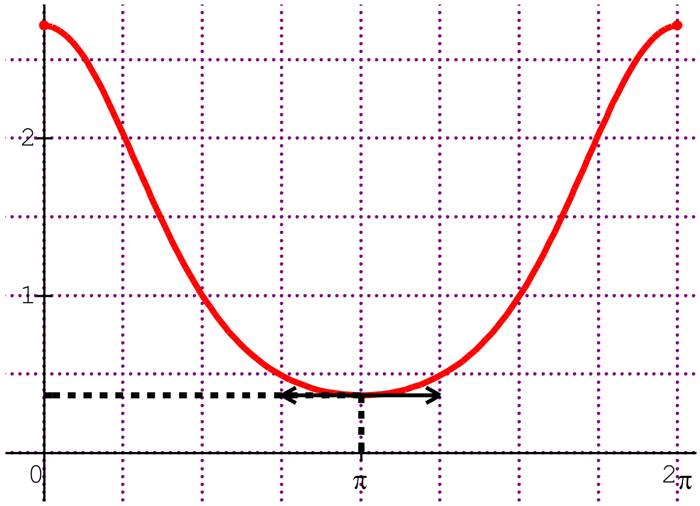
La fonction $g(x)=e^{\cos x}$ est dérivable sur l'intervalle$[0;2\pi]$

$\forall x\in[0;2\pi]$, $g'(x)=-\sin x\, e^{\cos x}$

$e^{\cos x} > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $-\sin x$:

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow \sin x < 0$ donc sur l'intervalle $[\pi; 2\pi]$

x	0		π		2π
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	e	$\searrow$	$\frac{1}{e}$	$\nearrow$	e



CORRECTION Exercice n°3 :

a)	Pour tout $x > 0, f(x) = \frac{e^{2x} - x}{x} = \frac{e^{2x}}{x} - \frac{x}{x} = \frac{2e^{2x}}{2x} - 1 = 2\frac{e^{2x}}{2x} - 1$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{2x} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
b)	Pour tout $x > 0, f(x) = \frac{e^{2x} - x}{x}$ or $\lim\limits_{x\to 0} e^{2x} - x = e^0 = 1$ or $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ $x = 0$ est donc une asymptote verticale à la courbe de f.
c)	La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{x(2e^{2x} - 1) - 1 \times (e^{2x} - x)}{x^2}$ $f'(x) = \frac{2xe^{2x} - x - e^{2x} + x}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{2xe^{2x} - e^{2x}}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-1)e^{2x}}{x^2}$$

$e^{2x} > 0$ et $x^2 > 0$ pour tout $x \in]0;+\infty[$ donc $f'(x)$ est du signe de $(2x-1)$.

$$2x - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow 2x > 1$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$2e-1$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{2\times\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \left(e - \frac{1}{2}\right) \times 2 = 2e - 1$$

d)

Le coefficient directeur de la tangent en 1 et $f'(1) = \frac{(2-1)e^2}{1^2} = e^2$

L'équation de la tangente en 1 est de la forme : $y = e^2x + b$

La tangente passe par le point de coordonnées $(1, f(1))$

où $f(1) = \frac{e^2 - 1}{1} = e^2 - 1$

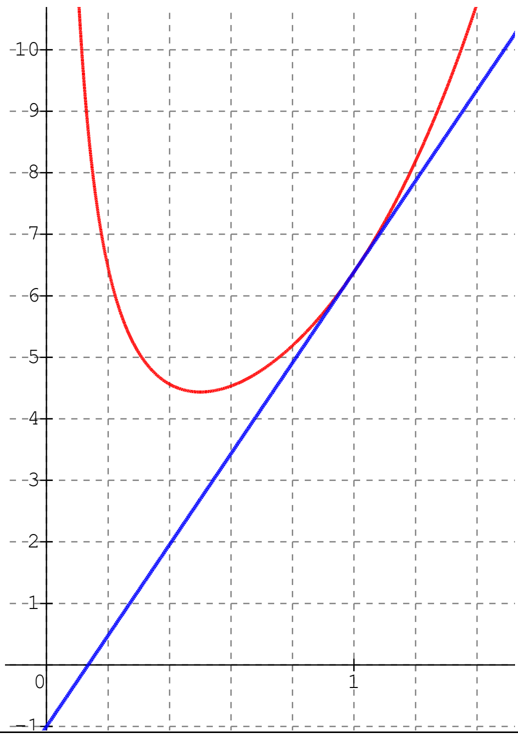
$$e^2 - 1 = e^2 \times 1 + b$$

$$\Leftrightarrow e^2 - 1 = e^2 + b$$

$$\Leftrightarrow b = -1$$

L'équation est donc :

$$y = e^2x - 1$$



CORRECTION Exercice n°4 :

<table>
<tr><td>A1</td><td>$g(x) = (1-x)e^x + 1$
$\lim\limits_{x\to+\infty} 1-x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$
On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$.</td></tr>
<tr><td>A2</td><td>La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x$
$e^x > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $-x$: $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0$
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>0</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$g'(x)$</td><td></td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td></td></tr>
<tr><td>$g(x)$</td><td>1</td><td>$\nearrow$</td><td>2</td><td>$\searrow$</td><td>$-\infty$</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>A3</td><td>Sur l'intervalle $]-\infty; 0]$ g est croissante et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$
donc $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur cet intervalle.
Sur l'intervalle $[0; +\infty[$ g est continue et $g(1) = 1 > 0$,
$g(2) = 1 - e^2 < 0$ donc $g(x) = 0$ admet au moins une solution $\alpha \in]1; 2[$, de plus g est monotone donc la solution est unique.</td></tr>
<tr><td>A4</td><td>$g(\alpha) = e^\alpha - \alpha e^\alpha + 1 = (1-\alpha)e^\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow e^\alpha = -\dfrac{1}{1-\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$</td></tr>
<tr><td>B1</td><td>$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x + 1 = 1$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} A(x) = -\infty$ de plus
$A(x) = \dfrac{4x}{e^x+1} = \dfrac{4}{\dfrac{e^x}{x} + \dfrac{1}{x}}$
or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} + \dfrac{1}{x} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x) = 0$</td></tr>
<tr><td>B2</td><td>La fonction A est dérivable sur $\mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$A'(x) = \dfrac{4(e^x+1) - 4xe^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{4e^x + 4 - 4xe^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{4(e^x - xe^x + 1)}{(e^x+1)^2}$
$= \dfrac{4g(x)}{(e^x+1)^2}$
$(e^x+1)^2 > 0$ donc $A'(x)$ est du signe de $g(x)$</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$A'(x)$		$+$	0	$-$	
$A(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$4(\alpha-1)$	$\searrow$	0

$$A(\alpha)=\frac{4\alpha}{e^{\alpha}+1}=\frac{4\alpha}{\frac{1}{\alpha-1}+1}=\frac{4\alpha(\alpha-1)}{\alpha}=4(\alpha-1)$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>C1</td>
<td>L'aire du rectangle $OPMQ$ est égale à $x\times f(x)=x\times\frac{4}{e^{x}+1}=\frac{4x}{e^{x}+1}=A(x)$.
L'aire est donc maximale pour $x=\alpha$.</td>
</tr>
<tr>
<td>C2</td>
<td>

La tangente T en $M\big(\alpha;f(\alpha)\big)$ à la courbe C a pour coefficient directeur $f'(\alpha)=\frac{-4e^{\alpha}}{(e^{\alpha}+1)^2}$ où

$$f'(\alpha)=\frac{-4e^{\alpha}}{(e^{\alpha}+1)^2}=\frac{-4\frac{1}{\alpha-1}}{\left(\frac{1}{\alpha-1}+1\right)^2}=\frac{4(1-\alpha)}{\alpha^2}$$

Le coefficient directeur de la droite (PQ) est $\frac{y_P-y_Q}{x_P-x_Q}=\frac{0-f(\alpha)}{\alpha-0}=-\frac{4}{e^{\alpha}+1}\times\frac{1}{\alpha}=\frac{4(1-\alpha)}{\alpha}\times\frac{1}{\alpha}$.

La tangente T en $M\big(\alpha;f(\alpha)\big)$ à la courbe C et la droite (PQ) sont parallèles.

</td>
</tr>
</table>