Exercice 1.

Déterminer les limites des fonctions suivantes, définies sur l'intervalle donné, *on donnera les éventuelles asymptotes horizontales ou verticales* :

▶1. $f(x) = \dfrac{4}{(1-3x)^2}$ sur $\left]\dfrac{1}{3}; +\infty\right[$

▶2. $g(x) = \dfrac{4}{2x+1}$ sur $\left]-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$

Exercice 2.

Déterminer les limites des fonctions suivantes, définies sur l'intervalle donné, *on donnera les éventuelles asymptotes horizontales ou verticales* :

▶1. $f(x) = x^3 - 5x + 1$ sur $\mathbb{R}$

▶2. $g(x) = \dfrac{3x+1}{7-4x}$ sur $\left]-\infty; \dfrac{7}{4}\right[$

Exercice 3.

Déterminer les limites des fonctions suivantes, définies sur l'intervalle donné, *on donnera les éventuelles asymptotes horizontales ou verticales* :

▶1. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}}$ sur $\mathbb{R}$

▶2. $g(x) = \dfrac{5x+1}{x^2-1}$ sur $]-1; 1[$

Exercice 4.

Déterminer les limites des fonctions suivantes, définies sur l'intervalle donné, *on donnera les éventuelles asymptotes horizontales ou verticales* :

▶1. $f(x) = \sqrt{x^2+3x+3}$ sur $[0; +\infty[$

▶2. $g(x) = \dfrac{3-2x}{x+7}$ sur $]-7; +\infty[$

CORRECTION de l'exercice 1.

Déterminer les limites des fonctions suivantes, définies sur l'intervalle donné, *on donnera les éventuelles asymptotes horizontales ou verticales* :

▶1. $f(x) = \dfrac{4}{(1-3x)^2}$ sur $\left]\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$

Limite en $\frac{1}{3}^+$:

$\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}^+} 1-3x = 0^-$ donc $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}^+} (1-3x)^2 = 0^+$

et donc $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}^+} f(x) = +\infty$

$x = \dfrac{1}{3}$ est asymptote verticale.

Limite en $+\infty$:

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1-3x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (1-3x)^2 = +\infty$

et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$y = 0$ est asymptote horizontale en $+\infty$.

▶2. $g(x) = \dfrac{-4}{2x+1}$ sur $\left]-\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$

Limite en $-\frac{1}{2}^+$:

$\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^+} 2x+1 = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^+} g(x) = -\infty$

$x = -\dfrac{1}{2}$ est asymptote verticale.

Limite en $+\infty$:

$\lim\limits_{x \to +\infty} 2x+1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

$y = 0$ est asymptote horizontale en $+\infty$.

CORRECTION de l'exercice 2.

Déterminer les limites des fonctions suivantes, définies sur l'intervalle donné, *on donnera les éventuelles asymptotes horizontales ou verticales* :

▶1. $f(x) = x^3 - 5x + 1$ sur $\mathbb{R}$

Limite en $-\infty$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -5x+1 = +\infty\end{array}\right\} \text{ il y a donc FI par somme}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = x^3 - 5x + 1 = x^3\left(\frac{x^3}{x^3} - \frac{5x}{x^3} + \frac{1}{x^3}\right) = x^3\left(1 - \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1 - \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} = 1\end{array}\right\} \text{ donc } \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Limite en $+\infty$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = x^3\left(1 - \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} = 1\end{array}\right\} \text{ donc } \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

▶2. $g(x) = \dfrac{3x+1}{7-4x}$ sur $\left]-\infty; \dfrac{7}{4}\right[$

Limite en $-\infty$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} 3x+1 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 7-4x = +\infty\end{array}\right\} \text{ il y a donc FI par quotient}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad g(x) = \frac{3x+1}{7-4x} = \frac{x\left(3 + \frac{1}{x}\right)}{x\left(\frac{7}{x} - 4\right)} = \frac{3 + \frac{1}{x}}{\frac{7}{x} - 4}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} 3+\dfrac{1}{x}=3 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{7}{x}-4=-4\end{array}\right\} \text{ donc } \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\frac{3}{4}$$

$$y=-\frac{3}{4} \text{ est asymptote horizontale en } -\infty.$$

Limite en $\frac{7}{4}^-$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\frac{7}{4}^-} 3x+1=\dfrac{25}{4} \\ \lim\limits_{x\to\frac{7}{4}^-} 7-4x=0^-\end{array}\right\} \text{ donc } \lim\limits_{x\to\frac{7}{4}^-} g(x)=-\infty$$

$$x=\frac{7}{4} \text{ est asymptote verticale.}$$

Exercice 3.

Déterminer les limites des fonctions suivantes, définies sur l'intervalle donné, *on donnera les éventuelles asymptotes horizontales ou verticales* :

▶1. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}}$ sur $\mathbb{R}$

Limite en $-\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+3=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3}=+\infty$

et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

$$y=0 \text{ est asymptote horizontale en } -\infty.$$

Limite en $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+3=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3}=+\infty$

et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

$$y=0 \text{ est asymptote horizontale en } +\infty.$$

▶ 2. $g(x)=\dfrac{5x+1}{x^2-1}$ sur $]-1;1[$

Limite en -1^+ :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-1^+} 5x+1=-4\\ \lim\limits_{x\to-1^+} x^2-1=0^-\end{array}\right\}\text{ donc } \lim\limits_{x\to-1^+} g(x)=+\infty$$

$x=-1$ est asymptote verticale.

Limite en 1^- :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-} 5x+1=6\\ \lim\limits_{x\to1^-} x^2-1=0^-\end{array}\right\}\text{ donc } \lim\limits_{x\to1^-} g(x)=-\infty$$

$x=1$ est asymptote verticale.

Exercice 4.

Déterminer les limites des fonctions suivantes, définies sur l'intervalle donné, *on donnera les éventuelles asymptotes horizontales ou verticales* :

▶ 1. $f(x)=\sqrt{x^2+3x+3}$ sur $[0;+\infty[$

Limite en $+\infty$:

$$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+3x+3=+\infty \text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

▶ 2. $g(x)=\dfrac{3-2x}{x+7}$ sur $]-7;+\infty[$

Limite en -7^+ :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-7^+} 3-2x=17\\ \lim\limits_{x\to-7^+} x+7=0^+\end{array}\right\}\text{ donc } \lim\limits_{x\to-7^+} g(x)=+\infty$$

$x=-7$ est asymptote verticale.

Limite en $+\infty$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 3-2x=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} x+7=+\infty\end{array}\right\}\text{ il y a donc FI par quotient}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad g(x) = \dfrac{3-2x}{x+7} = \dfrac{x\left(\frac{3}{x}-2\right)}{x\left(1+\frac{7}{x}\right)} = \dfrac{\frac{3}{x}-2}{1+\frac{7}{x}}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x} - 2 = -2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{7}{x} = 1 \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -2$

$y = -2$ est asymptote horizontale en $+\infty$