Exercice 1.

Soit f la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = x^3 + x + x^2 + 2$.

▶1. Etudier les variations de la fonction f.

▶2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution que l'on notera α.

Donner un encadrement de α à 0,1 près.

Exercice 2.

Soit f la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = -x\sqrt{x^2 + 1}$.

▶1. Etudier les variations de la fonction f.

▶2. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution que l'on notera α.

Donner une valeur approchée de α à 0,1 près.

Exercice 3.

Soit f la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = (x - 1)e^{-x}$.

▶1. Etudier les variations de la fonction f.

▶2. Démontrer que l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-2\,;-1]$ que l'on notera α. Donner un encadrement de α à 0,01 près.

Exercice 4.

Soit f la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = x + \cos(x)$.

▶1. Etudier les variations de la fonction f.

▶2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution que l'on notera α.

Donner une valeur approchée de α à 0,01 près.

Exercice 5.

Soit f la fonction définie, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, par $f(x) = \tan(x)$.

▶1. Etudier les variations de la fonction f.

▶2. Démontrer que l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution que l'on notera α. Donner une valeur approchée de α à 0,01 près.

CORRECTION de l'exercice 1.

Soit f la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = x^3 + x^2 + x + 2$.

▶1. Etudier les variations de la fonction f.

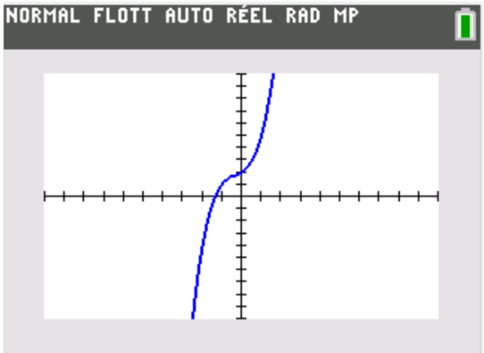
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^3 + x^2 + x + 2$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$

$\Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times 1 = 4 - 12 = -8 < 0$

Il n'y a pas de racines réelles, le polynôme $3x^2 + 2x + 1$ sera donc toujours du signe de $a = 3 > 0$.



x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$

▶2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution que l'on notera α.

Donner un encadrement de α à 0,1 près.

Puisque la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est aussi continue sur $\mathbb{R}$.

$$f(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 + (-2) + 2 = -8 + 4 = \mathbf{-4 < 0}$$

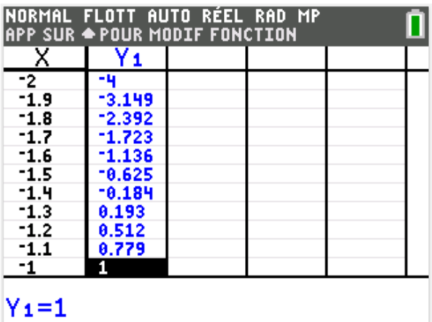
$$f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 2 = -1 + 1 - 1 + 2 = \mathbf{1 > 0}$$

$$\textbf{donc } \boldsymbol{f(-1) > 0 > f(-2)}$$

Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-2\,;-1]$.

De plus, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, la solution est donc unique.

Avec la calculatrice, on obtient que $-1{,}4 < \alpha < -1{,}3$.



NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
APP SUR ◆ POUR MODIF FONCTION

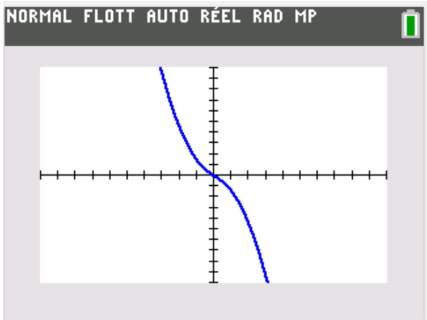
X	Y1
-2	-4
-1.9	-3.149
-1.8	-2.392
-1.7	-1.723
-1.6	-1.136
-1.5	-0.625
-1.4	-0.184
-1.3	0.193
-1.2	0.512
-1.1	0.779
-1	1

Y1=1

CORRECTION de l'exercice 2.

Soit f la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = -x\sqrt{x^2+1}$.

▶1. Etudier les variations de la fonction f.



La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \underbrace{-x}_{u} \times \underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{v}$

$u = -x \qquad u' = -1$

$v = \underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{\sqrt{U}} \qquad v' = \underbrace{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}_{\frac{U'}{2\sqrt{U}}}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = u'v + uv' = -1 \times \sqrt{x^2+1} - x \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$f'(x) = -\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{-(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{-(2x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$ car $\sqrt{x^2+1} > 0$ et $2x^2+1 > 0$.

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$\searrow$

▶2. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution que l'on notera α.

Donner une valeur approchée de α à 0,1 près.

Puisque la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est aussi continue sur $\mathbb{R}$.

$$f(0) = \mathbf{0 < 1}$$

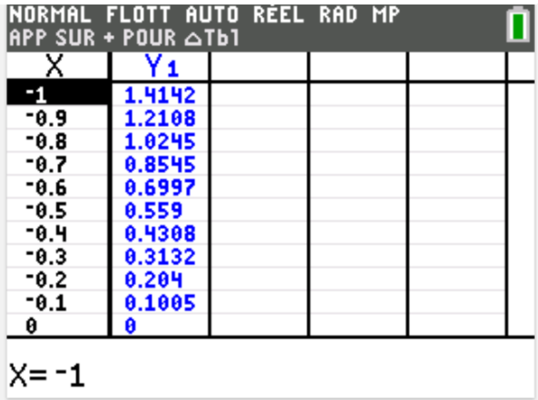
$$f(-1) = \sqrt{2} \approx \mathbf{1,4 > 1}$$

$$\textbf{donc } \boldsymbol{f(-1) > 1 > f(0)}$$

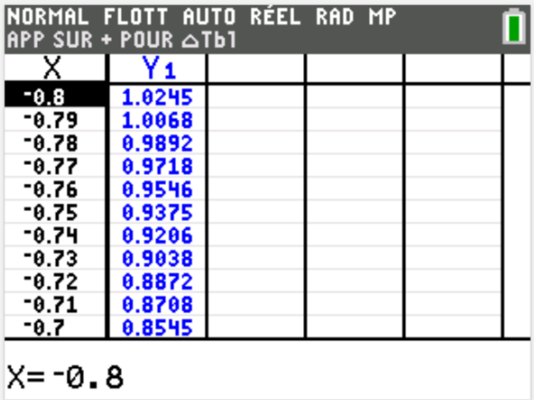
Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-1; 0]$.

De plus, la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, la solution est donc unique.

Avec la calculatrice, on obtient que $-0{,}79 < \alpha < -0{,}78$ donc $\alpha \approx -0{,}8$



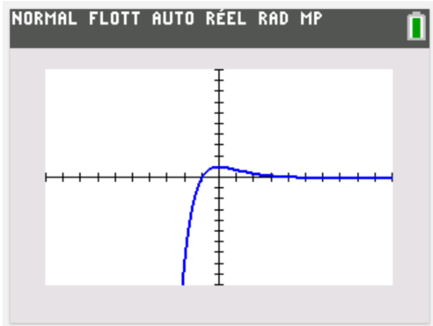
X	Y1
-1	1.4142
-0.9	1.2108
-0.8	1.0245
-0.7	0.8545
-0.6	0.6997
-0.5	0.559
-0.4	0.4308
-0.3	0.3132
-0.2	0.204
-0.1	0.1005
0	0



X	Y1
-0.8	1.0245
-0.79	1.0068
-0.78	0.9892
-0.77	0.9718
-0.76	0.9546
-0.75	0.9375
-0.74	0.9206
-0.73	0.9038
-0.72	0.8872
-0.71	0.8708
-0.7	0.8545

CORRECTION de l'exercice 3.

Soit f la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = (x+1)e^{-x}$.



▶1. Etudier les variations de la fonction f.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \underbrace{(x+1)}_{u} \times \underbrace{e^{-x}}_{v}$

$u = x + 1 \qquad u' = 1$

$v = \underbrace{e^{-x}}_{e^U} \qquad v' = \underbrace{-e^{-x}}_{U'e^U}$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = u'v + uv' = 1 \times e^{-x} + (x+1) \times (-e^{-x})$

en factorisant par e^{-x}

$f'(x) = (1 - x - 1) \times e^{x} = -xe^{x}$

$$f'(x) > 0 \iff -x > 0 \text{ car } e^{x} > 0$$
$$\iff x < 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$

$f(0) = (0+1)e^{-0} = 1$

▶2. Démontrer que l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-2\,;-1]$ que l'on notera α. Donner un encadrement de α à 0,01 près.

Puisque la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est aussi continue sur $\mathbb{R}$.

$$f(-2) = (-2+1)e^2 = -e^2 \approx \mathbf{-7,3 < -1}$$

$$f(-1) = (-1+1)e^1 = \mathbf{0 > -1}$$

$$\textbf{donc } \boldsymbol{f(-2) < -1 < f(-1)}$$

Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -1$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-2\,;-1]$.

De plus, la fonction f est strictement croissante sur $[-2\,;-1]$, la solution est donc unique sur $[-2\,;-1]$.

Avec la calculatrice, on obtient que $-1{,}28 < \alpha < -1{,}27$

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
APP SUR + POUR △Tbl

X	Y1
-2	-7.389
-1.9	-6.017
-1.8	-4.84
-1.7	-3.832
-1.6	-2.972
-1.5	-2.241
-1.4	-1.622
-1.3	-1.101
-1.2	-0.664
-1.1	-0.3
-1	0

X= -2

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
APP SUR + POUR △Tbl

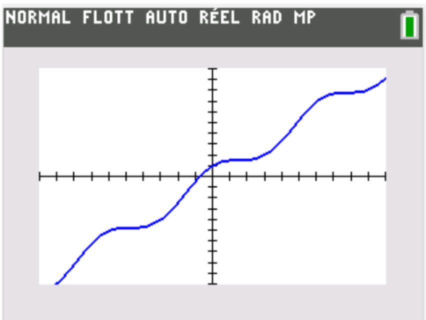
X	Y1
-1.3	-1.101
-1.29	-1.054
-1.28	-1.007
-1.27	-0.961
-1.26	-0.917
-1.25	-0.873
-1.24	-0.829
-1.23	-0.787
-1.22	-0.745
-1.21	-0.704
-1.2	-0.664

X= -1.3

CORRECTION de l'exercice 4.

Soit f la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = x + \cos(x)$.

▶1. Etudier les variations de la fonction f.



La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 - \sin(x)$

or $\forall x \in \mathbb{R}\ -1 \leq \sin(x) \leq 1$

$$\Leftrightarrow 1 \geq -\sin(x) \geq -1$$

$$\Leftrightarrow 2 \geq 1 - \sin(x) \geq 0$$

donc, $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 - \sin(x) \geq 0$

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$

▶2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution que l'on notera α.

Donner une valeur approchée de α à 0,01 près.

La fonction f est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$ car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f(\pi) = 0 + \cos(0) = \mathbf{1} > \mathbf{0}$$

$$f(-\pi) = -\pi + \cos(-\pi) = -\pi - 1 < 0$$

$$\textbf{donc } \boldsymbol{f}(-\pi) < \mathbf{0} < \boldsymbol{f}(0)$$

donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Avec la calculatrice, on obtient que $-0{,}74 < \alpha < -0{,}739$ donc $\alpha \approx -0{,}74$

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
APP SUR + POUR ΔTbl

X	Y1
-1	-0.46
-0.9	-0.278
-0.8	-0.103
-0.7	0.0648
-0.6	0.2253
-0.5	0.3776
-0.4	0.5211
-0.3	0.6553
-0.2	0.7801
-0.1	0.895
0	1

X= -1

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
APP SUR + POUR ΔTbl

X	Y1
-0.8	-0.103
-0.79	-0.086
-0.78	-0.069
-0.77	-0.052
-0.76	-0.035
-0.75	-0.018
-0.74	-0.002
-0.73	0.0152
-0.72	0.0318
-0.71	0.0484
-0.7	0.0648

X= -0.8

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
APP SUR + POUR ΔTbl

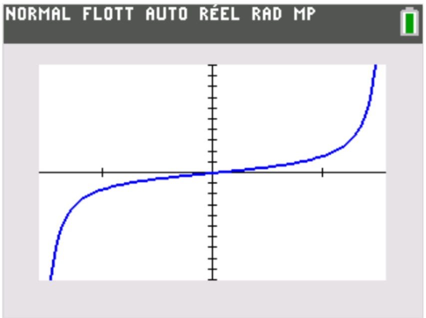
X	Y1
-0.74	-0.002
-0.739	1.4E-4
-0.738	0.0018
-0.737	0.0035
-0.736	0.0052
-0.735	0.0068
-0.734	0.0085
-0.733	0.0102
-0.732	0.0118
-0.731	0.0135
-0.73	0.0152

X= -0.74

CORRECTION de l'exercice 5.

Soit f la fonction définie, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, par $f(x) = \tan(x)$.

▶1. Etudier les variations de la fonction f.



La fonction f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{u}{v}$

$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[,$

$u = \sin(x) \qquad u' = \cos(x)$
$v = \cos(x) \qquad v' = -\sin(x)$

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cos(x) \times \cos(x) - \sin(x) \times (-\sin(x))}{(\cos(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2}{(\cos(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \qquad f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} > 0$

x	$-\frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$

▶2. Démontrer que l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution que l'on notera α. Donner une valeur approchée de α à 0,01 près.

La fonction f est strictement croissante et continue sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ car elle est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

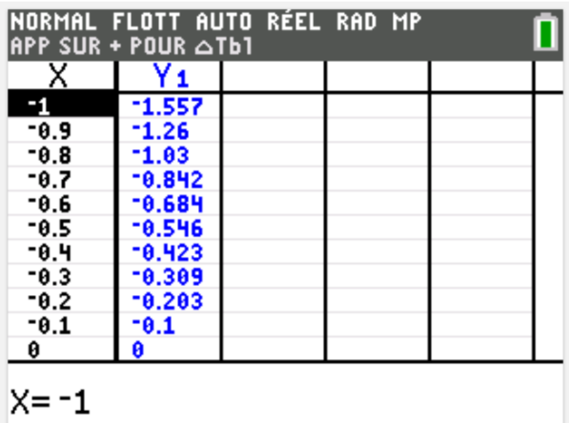
$$f(-1) = \tan(-1) \approx \mathbf{-1,557} < \mathbf{-1}$$

$$f(0) = \tan(0) = \mathbf{0} > -1$$

$$\textbf{donc } f(-1) > \mathbf{-1} > f(0)$$

donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

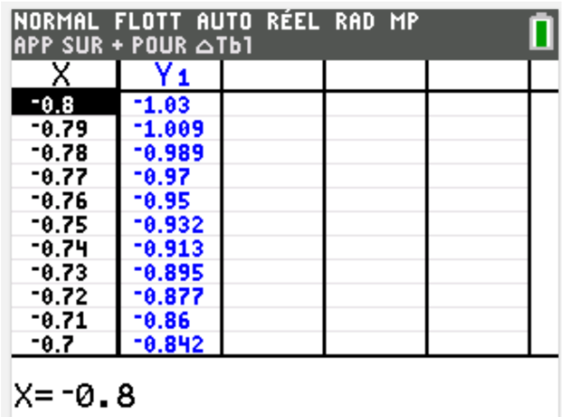
Avec la calculatrice, on obtient que $-0{,}786 < \alpha < -0{,}785$ donc $\alpha \approx -0{,}79$



NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
APP SUR + POUR ΔTbl

X	Y1
-1	-1.557
-0.9	-1.26
-0.8	-1.03
-0.7	-0.842
-0.6	-0.684
-0.5	-0.546
-0.4	-0.423
-0.3	-0.309
-0.2	-0.203
-0.1	-0.1
0	0

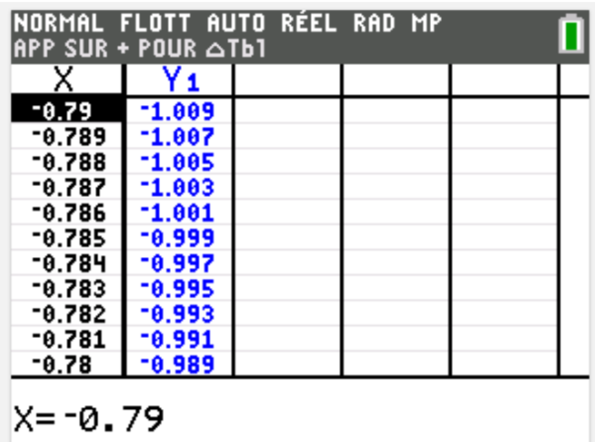
X= -1



NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
APP SUR + POUR ΔTbl

X	Y1
-0.8	-1.03
-0.79	-1.009
-0.78	-0.989
-0.77	-0.97
-0.76	-0.95
-0.75	-0.932
-0.74	-0.913
-0.73	-0.895
-0.72	-0.877
-0.71	-0.86
-0.7	-0.842

X= -0.8



NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
APP SUR + POUR ΔTbl

X	Y1
-0.79	-1.009
-0.789	-1.007
-0.788	-1.005
-0.787	-1.003
-0.786	-1.001
-0.785	-0.999
-0.784	-0.997
-0.783	-0.995
-0.782	-0.993
-0.781	-0.991
-0.78	-0.989

X= -0.79