On démontre qu'une suite est géométrique en calculant, pour un n quelconque v_{n+1} et en démontrant qu'il est égal à $v_n \times q$.

Exercice n°1 :

La suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = 2u_n - 5$ et $u_0 = 1$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 5$.

▶1. Démontrer que la suite (v_n) elle géométrique.

▶2. En déduire une expression de v_n en fonction de n, puis une expression de u_n en fonction de n.

Exercice n°2 :

La suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = 2 - \frac{4}{5}u_n$ et $u_0 = 0$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \frac{10}{9}$.

▶1. Démontrer que la suite (v_n) elle géométrique.

▶2. En déduire une expression de v_n en fonction de n, puis une expression de u_n en fonction de n.

Exercice n°3 :

La suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$ et $u_0 = \frac{1}{2}$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$.

▶1. Démontrer que la suite (v_n) elle géométrique.

▶2. En déduire une expression de v_n en fonction de n, puis une expression de u_n en fonction de n.

Exercice n°4 :

La suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = \frac{4u_n-6}{u_n-1}$ et $u_0 = 6$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n-3}{u_n-2}$.

▶1. Démontrer que la suite (v_n) elle géométrique.

▶2. En déduire une expression de v_n en fonction de n, puis une expression de u_n en fonction de n.

Correction de l'exercice n°1 :

La suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = 2u_n - 5$ et $u_0 = 1$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 5$.

▶1. Démontrer que la suite (v_n) elle géométrique.

Soit $n \in \mathbb{N}$

$v_{n+1} = u_{n+1} - 5$ 1re substitution

$v_{n+1} = 2u_n - 5 - 5$ 2e substitution

$v_{n+1} = 2u_n - 10$

$v_{n+1} = 2(u_n - 5)$ Factorisation

$v_{n+1} = 2v_n$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison 2 et $v_0 = u_0 - 5 = 1 - 5 = -4$.

▶2. En déduire une expression de v_n en fonction de n, puis une expression de u_n en fonction de n.

La suite (v_n) étant géométrique de raison 2 et $v_0 = -4$

On en déduit que

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = -4 \times 2^n$

Formule des suites géométriques

Or, soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 5$

$\Leftrightarrow v_n + 5 = u_n$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = v_n + 5$$

$$u_n = -4 \times 2^n + 5$$

Correction de l'exercice n°2 :

La suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = 2 - \frac{4}{5}u_n$ et $u_0 = 0$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \frac{10}{9}$.

▶1. Démontrer que la suite (v_n) elle géométrique.

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{10}{9}$$

$$v_{n+1} = 2 - \frac{4}{5}u_n - \frac{10}{9}$$

$$v_{n+1} = \frac{18}{9} - \frac{4}{5}u_n - \frac{10}{9}$$

$$v_{n+1} = \frac{8}{9} - \frac{4}{5}u_n$$

$$v_{n+1} = -\frac{4}{5}\left(\frac{\frac{8}{9}}{-\frac{4}{5}} + u_n\right)$$

$$v_{n+1} = -\frac{4}{5}\left(\frac{8}{9} \times \frac{-5}{4} + u_n\right)$$

$$v_{n+1} = -\frac{4}{5}\left(\frac{-10}{9} + u_n\right)$$

$$v_{n+1} = -\frac{4}{5}v_n$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{4}{5}$ et $v_0 = u_0 - \frac{10}{9} = 0 - \frac{10}{9} = -\frac{10}{9}$.

▶2. En déduire une expression de v_n en fonction de n, puis une expression de u_n en fonction de n.

La suite (v_n) étant géométrique de raison $-\frac{4}{5}$ et $v_0 = -\frac{10}{9}$

On en déduit que

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = -\frac{10}{9} \times \left(-\frac{4}{5}\right)^n$

Or, soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \frac{10}{9}$

$$\Leftrightarrow v_n + \frac{10}{9} = u_n$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = v_n + \frac{10}{9}$$

$$u_n = -\frac{10}{9} \times \left(-\frac{4}{5}\right)^n + \frac{10}{9}$$

Correction de l'exercice n°3 :

La suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$ et $u_0 = \frac{1}{2}$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$.

▶1. Démontrer que la suite (v_n) elle géométrique.

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1 - u_{n+1}}$$

$$v_{n+1} = \frac{\frac{3u_n}{1 + 2u_n}}{1 - \frac{3u_n}{1 + 2u_n}}$$

$$v_{n+1} = \frac{\frac{3u_n}{1 + 2u_n}}{\frac{1 + 2u_n - 3u_n}{1 + 2u_n}}$$

$$v_{n+1} = \frac{\frac{3u_n}{1 + 2u_n}}{\frac{1 - u_n}{1 + 2u_n}}$$

$$v_{n+1} = \frac{3u_n}{1 + 2u_n} \times \frac{1 + 2u_n}{1 - u_n}$$

$$v_{n+1} = \frac{3u_n}{1 - u_n} = 3 \times \frac{u_n}{1 - u_n} = 3 \times v_n$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison 3 et $v_0 = \frac{u_0}{1-u_0} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$

▶2. En déduire une expression de v_n en fonction de n, puis une expression de u_n en fonction de n.

La suite (v_n) étant géométrique de raison 3 et $v_0 = 1$

On en déduit que

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 3^n$

Or, soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$

$$\Leftrightarrow v_n(1-u_n) = u_n$$

$$\Leftrightarrow v_n - v_n u_n = u_n$$

$$\Leftrightarrow v_n = u_n + v_n u_n$$

$$\Leftrightarrow v_n = u_n(1+v_n)$$

$$\Leftrightarrow \frac{v_n}{1+v_n} = u_n$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{3^n}{1+3^n}$$

Exercice n°4 :

La suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = \frac{4u_n-6}{u_n-1}$ et $u_0 = \frac{1}{2}$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n-3}{u_n-2}$.

▶1. Démontrer que la suite (v_n) elle géométrique.

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-3}{u_{n+1}-2}$$

$$v_{n+1} = \frac{\frac{4u_n-6}{u_n-1}-3}{\frac{4u_n-6}{u_n-1}-2}$$

$$v_{n+1} = \frac{\frac{4u_n - 6 - 3(u_n - 1)}{u_n - 1}}{\frac{4u_n - 6 - 2(u_n - 1)}{u_n - 1}}$$

$$v_{n+1} = \frac{\frac{4u_n - 6 - 3u_n + 3}{u_n - 1}}{\frac{4u_n - 6 - 2u_n + 2}{u_n - 1}}$$

$$v_{n+1} = \frac{\frac{u_n - 3}{u_n - 1}}{\frac{2u_n - 4}{u_n - 1}}$$

$$v_{n+1} = \frac{u_n - 3}{u_n - 1} \times \frac{u_n - 1}{2u_n - 4}$$

$$v_{n+1} = \frac{u_n - 3}{2u_n - 4}$$

$$v_{n+1} = \frac{u_n - 3}{2(u_n - 2)}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} \times \frac{u_n - 3}{u_n - 2} = \frac{1}{2} \times v_n$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et $v_0 = \frac{u_0 - 3}{u_0 - 2} = \frac{\frac{1}{2} - 3}{\frac{1}{2} - 2} = \frac{-\frac{5}{2}}{-\frac{3}{2}} = \frac{-5}{2} \times \frac{-2}{3} = \frac{5}{3}$

▶2. En déduire une expression de v_n en fonction de n, puis une expression de u_n en fonction de n.

La suite (v_n) étant géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et $v_0 = \frac{5}{3}$

On en déduit que

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = \frac{5}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Or, soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n - 2}$

$$\Leftrightarrow v_n(u_n - 2) = u_n - 3$$

$$\Leftrightarrow v_n u_n - 2v_n = u_n - 3$$

$$\Leftrightarrow -2v_n + 3 = u_n - v_n u_n$$

$$\Leftrightarrow -2v_n + 3 = u_n(1 - v_n)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2v_n + 3}{1 - v_n} = u_n$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{-2v_n + 3}{1 - v_n} = \frac{-2 \times \frac{5}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3}{1 - \frac{5}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$u_n = \frac{-2v_n + 3}{1 - v_n} = \frac{\frac{-10}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3}{1 - \frac{5}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$