**Lorsqu'une limite d'une suite, qui contient des racines carrées, est en FI, il faut penser à utiliser la forme conjuguée.**

**Exercice n°1 :**

Démontrer la limite de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sqrt{3n-1} - \sqrt{3n}$$

**Exercice n°2 :**

Démontrer la limite de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2}{\sqrt{5n+1} - \sqrt{5n}}$$

**Exercice n°3 :**

Démontrer la limite de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{n^2+n} - n$$

**Exercice n°4 :**

Démontrer la limite de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{n}$$

---

## Correction de l'exercice n°1 :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sqrt{3n-1} - \sqrt{3n}$$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{3n-1} = +\infty \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{3n} = +\infty \end{array}\right\} \text{donc, par différence, il y a forme indéterminée}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sqrt{3n-1} - \sqrt{3n}$$

$$u_n = \frac{\left(\sqrt{3n-1} - \sqrt{3n}\right) \times \left(\sqrt{3n-1} + \sqrt{3n}\right)}{\sqrt{3n-1} + \sqrt{3n}}$$

$$u_n = \frac{\sqrt{3n-1}^2 - \sqrt{3n}^2}{\sqrt{3n-1} + \sqrt{3n}}$$

$$u_n = \frac{3n-1-3n}{\sqrt{3n-1}+\sqrt{3n}}$$

$$u_n = \frac{-1}{\sqrt{3n-1}+\sqrt{3n}}$$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{3n-1}+\sqrt{3n} = +\infty$

donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

---

## Correction de l'exercice n°2 :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{2}{\sqrt{5n+1}-\sqrt{5n}}$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{5n+1} = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{5n} = +\infty\end{array}\right\} \text{donc, par différence, il y a forme indéterminée}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{2}{\sqrt{5n+1}-\sqrt{5n}}$$

$$u_n = \frac{2\times\left(\sqrt{5n+1}+\sqrt{5n}\right)}{\left(\sqrt{5n+1}-\sqrt{5n}\right)\times\left(\sqrt{5n+1}+\sqrt{5n}\right)}$$

$$u_n = \frac{2\times\left(\sqrt{5n+1}+\sqrt{5n}\right)}{5n+1-5n}$$

$$u_n = \frac{2\times\left(\sqrt{5n+1}+\sqrt{5n}\right)}{1}$$

$$u_n = 2\left(\sqrt{5n+1}+\sqrt{5n}\right)$$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{5n+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{5n} = +\infty$

donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

---

## Correction de l'exercice n°3 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{n^2+n}-n$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n^2+n}=+\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty}-n=-\infty\end{array}\right\}\text{donc, par somme, il y a forme indéterminée}$$

$\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n=\sqrt{n^2+n}-n$

$$u_n=\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\times\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

$$u_n=\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

$$u_n=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

Il y a toujours la FI mais elle n'est plus liée à la racine carrée mais au quotient, la technique habituelle de factorisation devrait fonctionner.

$$u_n=\frac{n}{n\left(\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}+\frac{n}{n}\right)}$$

$$u_n=\frac{n}{n\left(\frac{\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n^2}}+1\right)}$$

$$u_n=\frac{n}{n\left(\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2}}+1\right)}$$

$$u_n=\frac{n}{n\left(\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}}+1\right)}$$

$$u_n=\frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}$$

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

or $\lim\limits_{n\to+\infty}1+\frac{1}{n}=1$

donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$

## Correction de l'exercice n°4 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{n}$$

$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{2n+1} = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty\end{array}\right\}$ donc, par différence, il y a forme indéterminée

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{n}$

$$u_n = \frac{\left(\sqrt{2n+1} - \sqrt{n}\right) \times \left(\sqrt{2n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{n}}$$

$$u_n = \frac{2n+1-n}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{n}}$$

$$u_n = \frac{n+1}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{n}}$$

Il y a toujours la FI mais elle n'est plus liée à la racine carrée mais au quotient, la technique habituelle de factorisation devrait fonctionner.

$$u_n = \frac{n\left(\frac{n}{n} + \frac{1}{n}\right)}{n\left(\frac{\sqrt{2n+1}}{n} + \frac{\sqrt{n}}{n}\right)}$$

$$u_n = \frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{\frac{2n+1}{n^2}} + \sqrt{\frac{n}{n^2}}\right)}$$

$$u_n = \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{\frac{1}{n}}}$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{n}=1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{\dfrac{1}{n}}=0^+\end{array}\right\} \text{donc, par quotient ,} \lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$$