

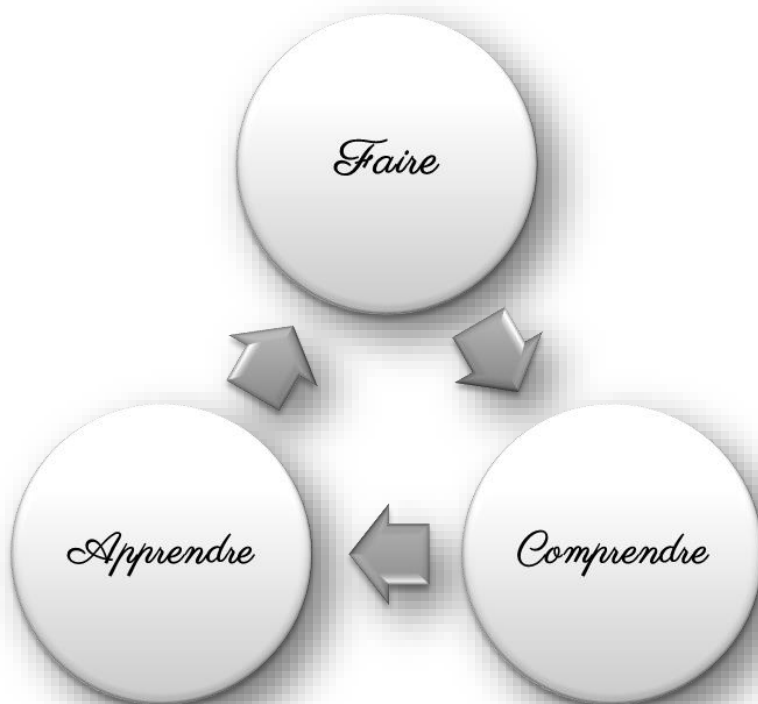


Table des matières

Enoncé du sujet	2
Exercice 1. (5 points).....	3
Exercice 2. (5 points).....	3
Exercice 3. (5 points).....	4
Exercice 4. (5 points).....	4
Correction du sujet	5
Correction de l'exercice 1. (5 points)	5
Correction de l'exercice 2. (5 points)	7
Correction de l'exercice 3. (5 points)	10
Correction de l'exercice 4. (5 points)	13

Terminale ➡ Jour 1
Spécialité Mathématiques - Calculatrice autorisée

Énoncé du sujet

BACCALAUREAT GENERAL

EPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

BACCALAUREAT BLANC

Mercredi 26 mars 2025

MATHEMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé. L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.

Exercice 1. (5 points)

Partie A

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0,9x + 60$. Résoudre $f(x) = x$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 400$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9 u_n + 60$.

- Calculer u_1 et u_2 .
 - Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) .
- Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , on a l'inégalité $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1000$.
- Montrer que la suite (u_n) est convergente.
 - Déterminer, en justifiant, la limite de la suite (u_n) .
- On donne une fonction écrite en langage Python.
Quelle valeur obtient-on en tapant dans la console python `secret(500)` ?

```
def secret(seuil):  
    u=400  
    n=0  
    while u<=seuil:  
        u=0.9*u+60  
        n=n+1  
    return n
```

Partie C

Les documentalistes d'un CDI d'un lycée sont en charge d'une bibliothèque.

Dans le rayon Sciences, ils ne peuvent placer que 800 livres. Chaque année, le CDI cède 10% des livres scientifiques et puis, il rachète 60 nouveaux livres de science.

Le rayon Sciences compte 400 livres en 2025. Les documentalistes pensent qu'ils pourront continuer à céder et à acheter les livres au même rythme pendant les années à venir.

Vont-ils être confrontés à un problème de place dans ce rayon ? Expliquer avec soin votre réponse.

Exercice 2. (5 points)

Partie A

L'endométriose est une maladie gynécologique, touchant 10% des femmes en âge de procréer.

L'endométriose se traduit généralement par fortes douleurs au moment des règles ou par des troubles de la fertilité. Depuis février 2025, un test salivaire est désormais disponible pour le dépistage de cette maladie.

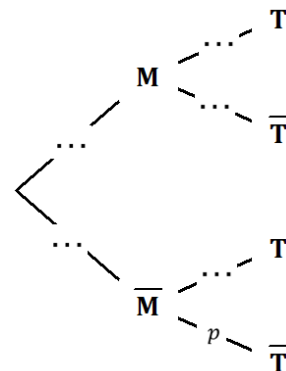
Un laboratoire qui fabrique ce test a mesuré que la probabilité qu'une femme atteinte d'endométriose ait un test positif est de 0,97. On procède à un test de dépistage systématique dans une population de femmes en âge de procréer.

Une femme est choisie au hasard dans cette population. On appelle :

- M l'événement : « La femme choisie est atteinte d'endométriose »
- T l'événement : « Le test est positif »

On note $p \in [0; 1]$ la spécificité du test, c'est-à-dire la probabilité qu'une femme non atteinte d'endométriose ait un test négatif.

- Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-contre.
 - Exprimer $P(T)$ en fonction de p .
- Démontrer que la probabilité de M sachant T réalisé est donnée par la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(p) = \frac{97}{997-900p}$.
 - Étudier les variations de la fonction f sur $[0; 1]$.
- On considère que le test est fiable lorsque la probabilité qu'une femme ayant un test positif soit réellement atteinte d'endométriose est supérieure à 0,95. A partir de quelle spécificité p , le test est-il fiable ? On arrondira à 10^{-4} .
- Dans cette question, on considère que $p = 0,995$. Déterminer la probabilité qu'une femme ayant un test négatif ne soit pas atteinte d'endométriose. On arrondira à 0,001.



Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On choisit n femmes en âge de procréer au hasard dans la population et on rappelle que 10% des femmes en âge de procréer sont atteintes d'endométriose. La population est suffisamment importante pour considérer qu'un tel échantillon résulte de tirages avec remise.

On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de femmes atteintes d'endométriose parmi les n femmes choisies au hasard.

- Dans cette question seulement, on suppose que $n=15$.
 - Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Justifier en précisant ses paramètres.
 - Déterminer l'espérance de X . Interpréter votre résultat.
 - Déterminer la probabilité pour qu'exactement deux femmes soient atteintes. On donnera la valeur exacte, puis le résultat sous forme approchée à 10^{-3} près.
 - Donner la valeur du plus petit entier k tel que $P(X \leq k) \geq 0,95$. Interpréter votre résultat.
- Déterminer, en justifiant, le nombre minimum de femmes à choisir pour que la probabilité qu'au moins l'une de ces femmes soit atteinte d'endométriose, soit supérieure à 99%.

Exercice 3. (5 points)

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty; 0[$

par $f(x) = 2x \ln(-x) - \frac{1}{x}$

Partie A : lectures graphiques

On a tracé ci-contre la courbe représentative (C_f) de la fonction f , ainsi que la droite (T) , tangente à la courbe (C_f) au point A de coordonnées $(-1; 1)$. Cette tangente passe également par le point B de coordonnées $(0; 4)$.

1. Lire graphiquement $f'(-1)$ et donner l'équation réduite de la tangente (T) .
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave. Que semble représenter le point A pour (C_f) ?

Partie B : étude analytique

1. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $-\infty$, puis en 0 .
2. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]-\infty; 0[$.
 - a. Montrer que pour x appartenant à l'intervalle $]-\infty; 0[$,

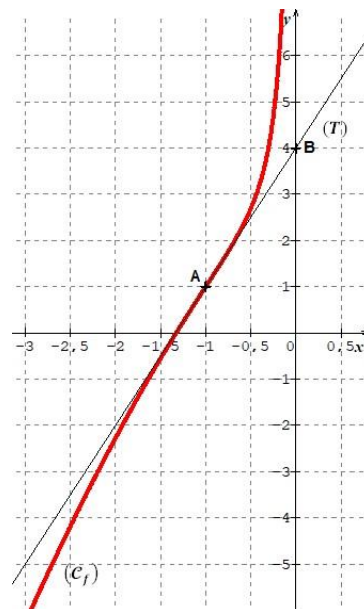
$$f'(x) = 2 + 2 \ln(x) + \frac{1}{x^2}$$

- b. Retrouver par le calcul l'équation réduite de la tangente (T) .

- c. Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]-\infty; 0[$,

$$f''(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x^3}$$

3.
 - a. Etudier la convexité de la fonction f sur $]-\infty; 0[$.
 - b. Déterminer les coordonnées de l'éventuel point d'inflexion à (C_f) en justifiant votre réponse.
 - c. Etudier les variations de la fonction f' , puis le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à $]-\infty; 0[$.
 - d. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty; 0[$.
4.
 - a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]-\infty; 0[$.
 - b. Donner un encadrement au millièème de α .
 - c. Montrer que α vérifie $\alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)$.



Exercice 4. (5 points)

$ABCDEFGH$ est un cube. I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[HD]$ et $[HG]$.

Dans tout l'exercice, on se placera dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

Partie A : position relative d'une droite par rapport à un plan

1. Donner les coordonnées des points A, B, C, D, E, I, J, K .
2. Justifier que I, J, K définissent un plan de l'espace.
3. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{CE}$ est un vecteur normal au plan (IJK) .
4. Montrer que le plan (IJK) admet pour équation cartésienne

$$-x - y + z + \frac{1}{2} = 0$$

5. La droite (BD) est-elle parallèle au plan (IJK) ? Justifier.

Partie B : calcul d'une aire

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IK) .
2. Soit M le point de la droite (IK) tel que les vecteurs

$$\overrightarrow{IK} \text{ et } \overrightarrow{JM} \text{ soient orthogonaux. Montrer que les coordonnées de } M \text{ sont } \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right).$$

3. Justifier que la droite (JM) est la hauteur issue de J dans le triangle IJK .

4. Montrer que l'aire du triangle IKJ est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Partie C : calcul d'un volume.

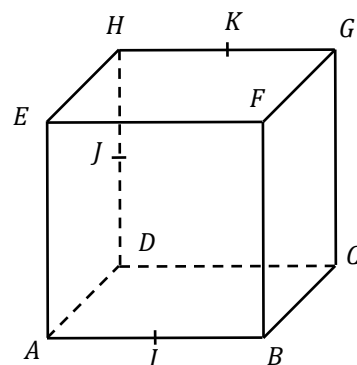
1. Montrer que la droite (CE) admet pour représentation paramétrique, le système $\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = -t + 1 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

2. Soit P le projeté orthogonal du point C sur le plan (IJK) .

$$\text{Montrer que les coordonnées du point } P \text{ sont } \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

3. Justifier que la droite (CP) est la hauteur relative à la base IJK dans le tétraèdre $CIJK$.

4. Calculer le volume du tétraèdre $CIJK$.



Correction de l'exercice 1. (5 points)
Partie A

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0,9x + 60$. Résoudre $f(x) = x$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 400$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9 u_n + 60$.

1. a. Calculer u_1 et u_2 .

b. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) .

2. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , on a l'inégalité $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1\,000$.

3. a. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

b. Déterminer, en justifiant, la limite de la suite (u_n) .

4. On donne une fonction écrite en langage Python.

Quelle valeur obtient-on en tapant dans la console python `secret(500)` ?

```
def secret(seuil):
    u=400
    n=0
    while u<=seuil:
        u=0.9*u+60
        n=n+1
    return n
```

Partie C

Les documentalistes d'un CDI d'un lycée sont en charge d'une bibliothèque. Dans le rayon Sciences, ils ne peuvent placer que 800 livres. Chaque année, le CDI cède 10% des livres scientifiques et puis, il rachète 60 nouveaux livres de science.

Le rayon Sciences compte 400 livres en 2025. Les documentalistes pensent qu'ils pourront continuer à céder et à acheter les livres au même rythme pendant les années à venir.

Vont-ils être confrontés à un problème de place dans ce rayon ? Expliquer avec soin votre réponse.



Partie A	Exercice 1. Partie A	$f(x) = x$	
		$\Leftrightarrow 0,9x + 60 = x$	
		$\Leftrightarrow 0,9x - x = -60$	
		$\Leftrightarrow -0,1x = -60$	
		$\Leftrightarrow x = \frac{-60}{-0,1}$	
		$\Leftrightarrow x = 600$	
Partie B	1a.	$u_1 = 0,9 u_0 + 60 = 0,9 \times 400 + 60 = 420$ $u_2 = 0,9 u_1 + 60 = 0,9 \times 420 + 60 = 438$	
	1b.	Je conjecture que la suite (u_n) est croissante.	

Exercice 1. Partie B.	2.	Initialisation : Je vérifie que la propriété est vraie au rang $n = 0$: $u_0 = 400$ $u_1 = 420$ donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1\,000$ La propriété est vraie au rang 0. Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, je suppose la propriété vraie au rang n et je démontre qu'elle aussi vraie au rang $n + 1$. Je suppose que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1000$ où $n \in \mathbb{N}$ fixé $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1\,000$ $\Leftrightarrow 0 \leq 0,9 u_n \leq 0,9 u_{n+1} \leq 900$ $\Leftrightarrow 60 \leq 0,9 u_n + 60 \leq 0,9 u_{n+1} + 60 \leq 960$ $\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1\,000$ La propriété est vraie au rang $n + 1$. Conclusion : J'en déduis, par le principe de récurrence, que la propriété est vraie pour tous les rangs $n \in \mathbb{N}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1\,000$
	3a.	$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 1000$ donc la suite (u_n) est majorée. J'en déduis que la suite (u_n) est convergente.
	3b.	La suite (u_n) est convergente et elle est définie par, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$, où la fonction f est définie par $f(x) = 0,9x + 60$. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, la limite est solution de l'équation $f(x) = x$. D'après la partie A, la limite de la suite (u_n) est donc 600.
	4.	<pre> def secret(seuil): u=400 n=0 while u<=seuil: print(u<=seuil) u=0.9*u+60 n=n+1 print(u, ' ', n) return u<=seuil, n print(secret(500)) </pre> True 420.0 1 True 438.0 2 True 454.2 3 True 468.78 4 True 481.902 5 True 493.7118 6 True 504.34062 7 (False, 7) Lorsque l'on tape, dans la console python, <code>secret(500)</code> on obtient 7.
	Partie C.	Une baisse de 10% revient à multiplier par 0,9. Soit n un entier naturel, notons u_n le nombre de livres rangés dans le rayon Sciences l'année $(2025 + n)$. Ainsi $u_0 = 400$ et $u_{n+1} = 0,9 u_n + 60$ pour tout entier naturel n. D'après l'étude précédente, la suite est croissante et tend vers 600. Les documentalistes d'un CDI n'auront donc pas de problème de rangement dans ce rayon.



Correction de l'exercice 2. (5 points)

Partie A

L'endométrieose est une maladie gynécologique, touchant 10% des femmes en âge de procréer. L'endométrieose se traduit généralement par fortes douleurs au moment des règles ou par des troubles de la fertilité. Depuis février 2025, un test salivaire est désormais disponible pour le dépistage de cette maladie.

Un laboratoire qui fabrique ce test a mesuré que la probabilité qu'une femme atteinte d'endométrieose ait un test positif est de 0,97.

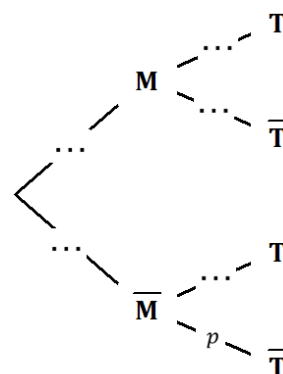
On procède à un test de dépistage systématique dans une population de femmes en âge de procréer.

Une femme est choisie au hasard dans cette population. On appelle :

- M l'événement : « La femme choisie est atteinte d'endométrieose »
- T l'événement : « Le test est positif »

On note $p \in [0; 1]$ la spécificité du test, c'est-à-dire la probabilité qu'une femme non atteinte d'endométrieose ait un test négatif.

- a. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-contre.
b. Exprimer $P(T)$ en fonction de p .
- a. Démontrer que la probabilité de M sachant T réalisé est donnée par la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(p) = \frac{97}{997-900p}$.
b. Étudier les variations de la fonction f sur $[0; 1]$.
- On considère que le test est fiable lorsque la probabilité qu'une femme ayant un test positif soit réellement atteinte d'endométrieose est supérieure à 0,95. A partir de quelle spécificité p , le test est-il fiable ? On arrondira à 10^{-4} .
- Dans cette question, on considère que $p = 0,995$. Déterminer la probabilité qu'une femme ayant un test négatif ne soit pas atteinte d'endométrieose. On arrondira à 0,001.



Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On choisit n femmes en âge de procréer au hasard dans la population et on rappelle que 10% des femmes en âge de procréer sont atteintes d'endométrieose. La population est suffisamment importante pour considérer qu'un tel échantillon résulte de tirages avec remise.

On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de femmes atteintes d'endométrieose parmi les n femmes choisies au hasard.

- Dans cette question seulement, on suppose que $n = 15$.
 - Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Justifier en précisant ses paramètres.
 - Déterminer l'espérance de X . Interpréter votre résultat.
 - Déterminer la probabilité pour qu'exactement deux femmes soient atteintes. On donnera la valeur exacte, puis le résultat sous forme approchée à 10^{-3} près.
 - Donner la valeur du plus petit entier k tel que $P(X \leq k) \geq 0,95$. Interpréter votre résultat.
- Déterminer, en justifiant, le nombre minimum de femmes à choisir pour que la probabilité qu'au moins l'une de ces femmes soit atteinte d'endométrieose, soit supérieure à 99%.



Exercice 2. Partie A.

1a.

1b.

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T)$$

$$P(T) = 0,1 \times 0,97 + 0,9 \times (1 - p)$$

$$P(T) = 0,097 + 0,9 - 0,9p$$

$$P(T) = 0,997 - 0,9p$$

2a.

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)}$$

$$P_T(M) = \frac{0,1 \times 0,97}{0,997 - 0,9p}$$

$$P_T(M) = \frac{0,097}{0,997 - 0,9p}$$

$$P_T(M) = \frac{0,097 \times 1\,000}{(0,997 - 0,9p) \times 1\,000}$$

$$P_T(M) = \frac{97}{997 - 900p}$$

La probabilité de M sachant T réalisé est donc donnée par la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(p) = \frac{97}{997 - 900p}$

2b.

f est dérivable sur $[0; 1]$

$$\forall p \in [0; 1], f'(p) = \frac{-97 \times (-900)}{(997 - 900p)^2} = \frac{87\,300}{(997 - 900p)^2}$$

$\forall p \in [0; 1], f'(p) > 0$ car $(997 - 900p)^2 > 0$

La fonction f est donc strictement croissante sur $[0; 1]$.

0	0	1
$f'(p)$	+	
$f(p)$	$\frac{97}{997}$	1

3.

Réolvons :

$$f(p) \geq 0,95$$

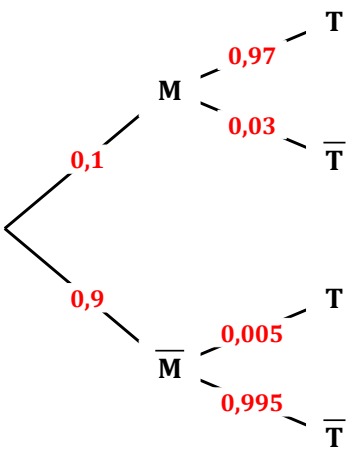
$$\Leftrightarrow \frac{97}{997 - 900p} \geq 0,95$$

$$\Leftrightarrow 97 \geq 0,95(997 - 900p) \quad \text{car } 997 - 900p > 0$$

$$\Leftrightarrow 97 \geq 947,15 - 855p$$

$$\Leftrightarrow -850,15 \geq -855p$$

$$\Leftrightarrow \frac{-850,15}{-855} \leq p$$

		soit $p \geq 0,9943$
Exercice 2. Partie A.	4.	On considère que $p = 0,995$. $P_{\bar{T}}(\bar{M}) = \frac{P(\bar{M} \cap \bar{T})}{P(\bar{T})}$ $P_{\bar{T}}(\bar{M}) = \frac{0,9 \times 0,995}{0,9 \times 0,995 + 0,1 \times 0,03}$ $P_{\bar{T}}(\bar{M}) = \frac{0,8955}{0,8985}$ $P_{\bar{T}}(\bar{M}) \approx 0,997$ 
Exercice 2. Partie B.	1a.	On répète 15 fois, de façon identique et indépendante, le schéma de Bernoulli où la probabilité qu'une femme soit atteinte d'endométriose est 0,1. La variable aléatoire X qui comptabilise le nombre de femmes atteintes d'endométriose parmi les 15 femmes suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,1 : X \hookrightarrow \mathcal{B}(n = 15; p = 0,1)$
	1b.	$E(X) = np = 15 \times 0,1 = 1,5$ C'est le nombre moyen de femmes atteintes d'endométriose que l'on peut espérer avoir parmi les 15 femmes choisies.
	1c.	$P(X = 2) = \binom{15}{2} \times 0,1^2 \times 0,9^{13} = 105 \times 0,01 \times 0,9^{13} = 1,05 \times 0,9^{13}$ $P(X = 2) \approx 0,267$
	1d.	$P(X \leq 3) \approx 0,944$ $P(X \leq 4) \approx 0,987$ Le plus petit entier k tel que $P(X \leq k) \geq 0,95$ est donc $k = 4$. Avec une marge de 5% d'erreur, le nombre de femmes atteintes d'endométriose dans un groupe de 15 femmes sera inférieur ou égal à 4.
	2.	Dans un groupe de n femmes choisies au hasard, le nombre de femmes atteintes d'endométriose suit une loi binomiale de paramètre n et $p = 0,1$. La probabilité qu'aucune femme ne soit atteinte d'endométriose est $0,9^n$. Par conséquent, la probabilité qu'au moins une femme en soit atteinte est $1 - 0,9^n$ Résolvons alors $1 - 0,9^n \geq 0,99$ $\Leftrightarrow -0,9^n \geq 0,99 - 1$ $\Leftrightarrow -0,9^n \geq -0,01$ $\Leftrightarrow 0,9^n \leq 0,01$ $\Leftrightarrow \ln(0,9^n) \leq \ln(0,01) \text{ car la fonction } x \mapsto \ln(x) \text{ est croissante sur }]0; +\infty[$ $\Leftrightarrow n \times \ln(0,9) \leq \ln(0,01)$ $\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,9)} \text{ car } \ln(0,9) < 0$ $\Rightarrow n \geq 44$ Il faut choisir au moins 44 femmes, pour être <i>presque sûr</i> (à 99%) d'avoir au moins une femme atteinte d'endométriose dans le groupe.

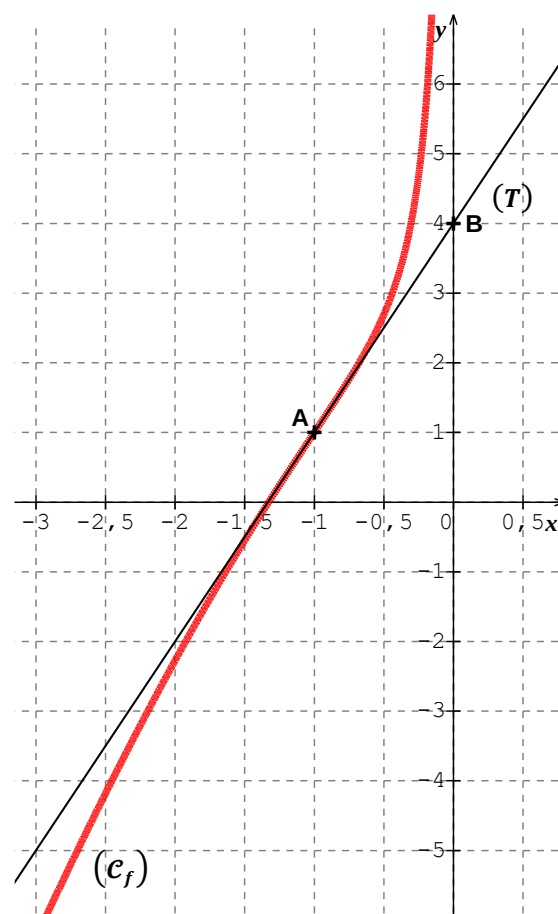
Correction de l'exercice 3. (5 points)

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty; 0[$ par $f(x) = 2x \ln(-x) - \frac{1}{x}$

Partie A : lectures graphiques

On a tracé ci-contre la courbe représentative (C_f) de la fonction f , ainsi que la droite (T) , tangente à la courbe (C_f) au point A de coordonnées $(-1; 1)$. Cette tangente passe également par le point B de coordonnées $(0; 4)$.

1. Lire graphiquement $f'(-1)$ et donner l'équation réduite de la tangente (T) .
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave. Que semble représenter le point A pour (C_f) ?



Partie B : étude analytique

1. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $-\infty$, puis en 0 .
2. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]-\infty; 0[$.
 - a. Montrer que pour tout x appartenant à $]-\infty; 0[$,

$$f'(x) = 2 + 2 \ln(-x) + \frac{1}{x^2}$$
 - b. Retrouver par le calcul l'équation réduite de la tangente (T) .
 - c. Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]-\infty; 0[$, $f''(x) = \frac{2(x^2-1)}{x^3}$
3. a. Etudier la convexité de la fonction f sur $]-\infty; 0[$.
 b. Déterminer les coordonnées de l'éventuel point d'inflexion à (C_f) en justifiant votre réponse.
 c. Etudier les variations de la fonction f' , puis le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à $]-\infty; 0[$.
 d. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty; 0[$.
 4. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]-\infty; 0[$.
 b. Donner un encadrement au millième de α .
 c. Montrer que α vérifie $\alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)$.

Exercice 3. Partie A.	1a.	$f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse -1 . La tangente à la courbe en $A(-1; 1)$ passe aussi par le point $B(0; 4)$. Le coefficient directeur vaut donc $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - 1}{0 - (-1)} = 3 = f'(-1)$ De plus, puisque la tangente passe par le point $B(0; 4)$, l'ordonnée à l'origine vaut 4. L'équation de la tangente est donc $y = 3x + 4$.
	1b.	Je conjecture que la fonction f est concave sur $]-\infty; -1[$ puis convexe sur $]-1; 0[$. Le point A semble être un point d'inflexion.



Exercice 3. Partie B.	1.	Limite en $-\infty$: $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(-x) = +\infty \end{array} \right\} \text{donc, par produit, } \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x \ln(-x) = -\infty$ $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x \ln(-x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x} = 0 \end{array} \right\} \text{donc, par somme, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ Limite en 0 : $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(-x) = -\infty \end{array} \right\} \text{par produit, c'est une forme indéterminée}$ donc, par croissance comparée $\lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) \ln(-x) = 0$ $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x \ln(-x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{1}{x} = +\infty \end{array} \right\} \text{donc, par somme, } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$
	2a.	$\forall x \in]-\infty; 0[, f(x) = \underbrace{2x \ln(-x)}_{u \times v} - \frac{1}{x}$ $u = 2x \quad u' = 2$ $v = \ln(-x) \quad v' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$ $f'(x) = 2 \ln(-x) + 2x \times \frac{-1}{-x} - \frac{-1}{x^2}$ $f'(x) = 2 \ln(-x) + 2 + \frac{1}{x^2}$
	2b.	$f'(-1) = 2 \ln(1) + 2 + 1 = 3$ $f(-1) = -2 \ln(1) - \frac{1}{-1} = 1$ $y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1)$ $y = 3(x + 1) + 1$ $y = 3x + 4$
	2c.	$\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) = 2 \ln(-x) + 2 + \frac{1}{x^2}$ $f''(x) = 2 \times \frac{-1}{-x} + 0 + \frac{-2x}{x^4}$ $f''(x) = \frac{2}{x} + \frac{-2}{x^3}$ $f''(x) = \frac{2x^2 - 2}{x^3}$ $f''(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x^3}$
	3a.	$f''(x) > 0$ $\Leftrightarrow \frac{2(x^2 - 1)}{x^3} > 0$ $\Leftrightarrow x^2 - 1 < 0 \text{ car } \frac{2}{x^3} < 0 \text{ pour } x \in]-\infty; 0[$ $\Leftrightarrow x^2 < 1$ $\Leftrightarrow -1 < x < 0 \text{ pour } x \in]-\infty; 0[$

		<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td>0</td></tr><tr><td>$f''(x)$</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr><tr><td>f</td><td>$concave$</td><td>$convexe$</td><td></td></tr></table>	x	$-\infty$	-1	0	$f''(x)$	$-$	0	$+$	f	$concave$	$convexe$	
x	$-\infty$	-1	0											
$f''(x)$	$-$	0	$+$											
f	$concave$	$convexe$												
	3b.	La dérivée seconde f'' s'annule en -1 en changeant de signe donc le point $A(-1; 1)$ d'abscisse -1 est un point d'inflexion à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.												
	3c.	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td>0</td></tr><tr><td>$f''(x)$</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td colspan="3"></td></tr></table> $f'(-1) = 2 \ln(1) + 2 + \frac{1}{1} = 3$ Le minimum de la fonction f' est 3 donc, on peut en déduire que : $\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) \geq 0$	x	$-\infty$	-1	0	$f''(x)$	$-$	0	$+$	$f'(x)$			
x	$-\infty$	-1	0											
$f''(x)$	$-$	0	$+$											
$f'(x)$														
	3d.	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>$+$</td><td></td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	0	$f'(x)$	$+$		$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$			
x	$-\infty$	0												
$f'(x)$	$+$													
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$												
	4a.	$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty > 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty < 0$ La fonction f est continue sur $]-\infty; 0[$ car dérivable sur $]-\infty; 0[$ et elle est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$. L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution que l'on notera α sur l'intervalle $]-\infty; 0[$.												

	4b.	donc $-1,4 < \alpha < -1,3$ donc $-1,33 < \alpha < -1,32$ donc $-1,328 < \alpha < -1,327$
	4c.	$f(\alpha) = 0$ $\Leftrightarrow 2\alpha \ln(-\alpha) - \frac{1}{\alpha} = 0$ $\Leftrightarrow 2\alpha \ln(-\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ $\Leftrightarrow \ln[(-\alpha)^2] = \frac{\frac{1}{\alpha}}{\alpha}$ $\Leftrightarrow \ln(\alpha^2) = \frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\alpha}$ $\Leftrightarrow \ln(\alpha^2) = \frac{1}{\alpha^2}$ $\Leftrightarrow \alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)$



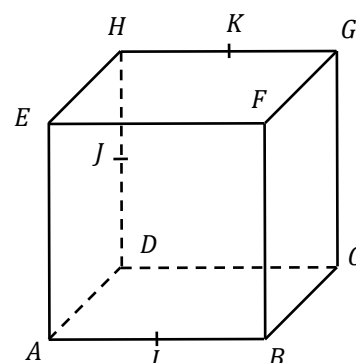
Correction de l'exercice 4. (5 points)

$ABCDEFGH$ est un cube. I , J et K sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[HD]$ et $[HG]$.

Dans tout l'exercice, on se placera dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

Partie A : position relative d'une droite par rapport à un plan

- Donner les coordonnées des points A, B, C, D, E, I, J, K .
- Justifier que I, J, K définissent un plan de l'espace.
- Montrer que le vecteur $\overrightarrow{CE}$ est un vecteur normal au plan (IJK) .



4. Montrer que le plan (IJK) admet pour équation cartésienne
- $$-x - y + z + \frac{1}{2} = 0.$$
5. La droite (BD) est-elle parallèle au plan (IJK) ? Justifier.

Partie B : calcul d'une aire

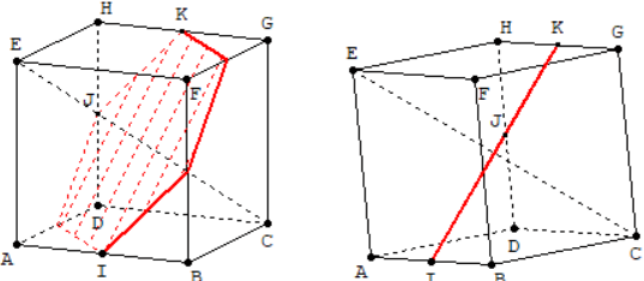
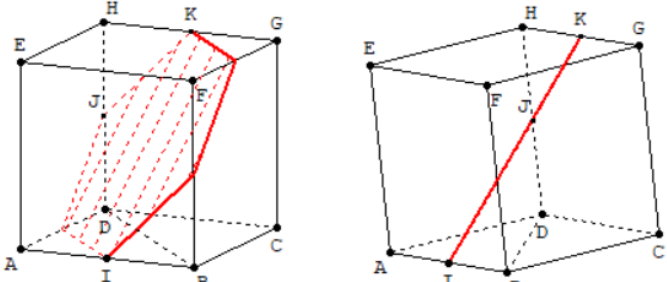
- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IK) .
- Soit M le point de la droite (IK) tel que les vecteurs $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{JM}$ soient orthogonaux.
Montrer que les coordonnées de M sont $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right)$.
- Justifier que la droite (JM) est la hauteur issue de J dans le triangle IJK .
- Montrer que l'aire du triangle IKJ est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

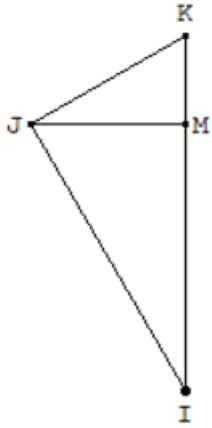
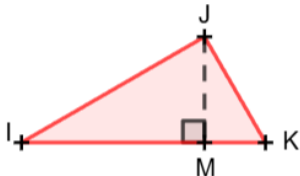
Partie C : calcul d'un volume.

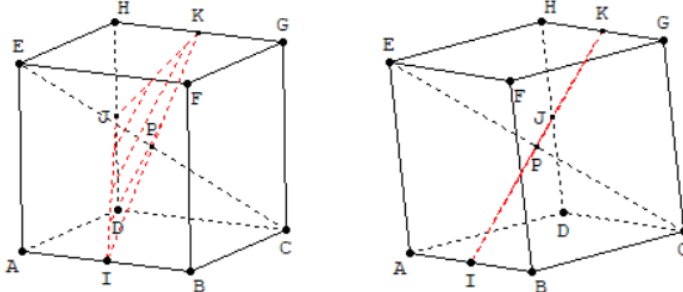
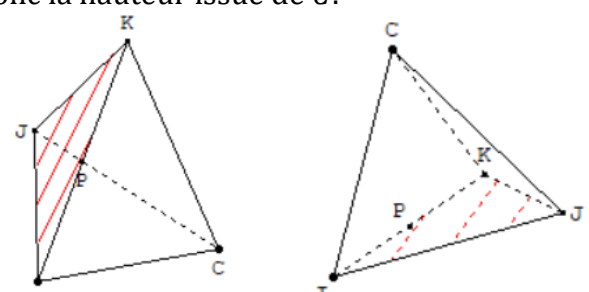
- Montrer que la droite (CE) admet pour représentation paramétrique, le système $\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = -t + 1 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$
- Soit P le projeté orthogonal du point C sur le plan (IJK) .
Montrer que les coordonnées du point P sont $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.
- Justifier que la droite (CP) est la hauteur relative à la base IJK dans le tétraèdre $CIJK$.
- Calculer le volume du tétraèdre $CIJK$.



Exercice 4. Partie A.	1.	$A(0; 0; 0) \quad B(1; 0; 0) \quad C(1; 1; 0) \quad D(0; 1; 0) \quad E(0; 0; 1)$ $I\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right) \quad J\left(0; 1; \frac{1}{2}\right) \quad K\left(\frac{1}{2}; 1; 1\right)$
	2.	$\overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{IK} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\frac{0}{-1/2} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{1/2}{1}$ Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ ne sont pas colinéaires donc les points I, J, K définissent un plan de l'espace.

	3.	$\overrightarrow{CE} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{IK} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0$ $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{IK} = 0 - 1 + 1 = 0$ $\overrightarrow{CE}$ est donc orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ qui ne sont pas colinéaires, donc $\overrightarrow{CE}$ est un vecteur normal au plan (IJK). 
	4.	Une équation cartésienne du plan (IJK) est donc $-x - y + z + d = 0$ or $I \left(\frac{1}{2}; 0; 0 \right) \in (IJK)$ donc $-\frac{1}{2} - 0 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = \frac{1}{2}$ Le plan (IJK) admet donc pour équation cartésienne : $-x - y + z + \frac{1}{2} = 0$
	5.	$\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CE} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{BD} = 1 - 1 + 0 = 0$ Le vecteur directeur $\overrightarrow{BD}$ de la droite (BD) est donc orthogonal à un vecteur normal du plan (IJK). J'en déduis que la droite (BD) est parallèle au plan (IJK). 
Partie B.	1.	La droite (IK) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{IK} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et elle passe par $I \left(\frac{1}{2}; 0; 0 \right)$ donc une équation paramétrique est : $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$

		$M(x; y; z) \in (IK)$ donc il existe t $\in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ et donc $M\left(\frac{1}{2}; t; t\right)$ et $J\left(0; 1; \frac{1}{2}\right)$ $\overrightarrow{IK} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{JM} \begin{pmatrix} 1/2 \\ t - 1 \\ t - 1/2 \end{pmatrix}$ 2. $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{JM}$ soient orthogonaux donc $\overrightarrow{IK} \cdot \overrightarrow{JM} = 0$ $\Leftrightarrow 0 + t - 1 + t - \frac{1}{2} = 0$ $\Leftrightarrow 2t = \frac{3}{2}$ $\Leftrightarrow t = \frac{3}{4}$ J'en déduis que les coordonnées de M sont $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right)$.	
	3.	M est le projeté orthogonal du point J sur la droite (IK) donc la droite (JM) est la hauteur issue de J dans le triangle IJK. La longueur JM est donc la hauteur issue de J dans le triangle IJK.	
	4.	$\overrightarrow{IK} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $IK = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ $\overrightarrow{JM} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$ donc $JM = \sqrt{\frac{6}{16}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$ $\mathcal{A}_{IJK} = \frac{b \times h}{2} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6}}{4}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{8} = \frac{2\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{4}$	
	1.	La droite (CE) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{CE} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et elle passe par $C(1; 1; 0)$ $\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = -t + 1, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$	

2.	P est le projeté orthogonal du point C sur le plan (IJK) donc $\overrightarrow{CP}$ est orthogonal au plan (IJK) or $\overrightarrow{CE}$ est un vecteur normal au plan (IJK) donc P appartient à la droite (CE). $P(-t+1; -t+1; t) \in (IJK)$ $-x - y + z + \frac{1}{2} = 0$ $\Leftrightarrow -(-t+1) - (-t+1) + t + \frac{1}{2} = 0$ $\Leftrightarrow t - 1 + t - 1 + t + \frac{1}{2} = 0$ $\Leftrightarrow 3t - \frac{3}{2} = 0$ $\Leftrightarrow 3t = \frac{3}{2}$ $\Leftrightarrow t = \frac{3}{2} \times \frac{1}{3}$ $\Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$ J'en déduis que les coordonnées de P sont $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$. 
3.	P est le projeté orthogonal du point C sur le plan (IJK) donc la droite (CP) est la hauteur relative à la base (IJK) dans le tétraèdre $CIJK$. La longueur CP est donc la hauteur issue de C. 
4.	$\overrightarrow{CP} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ donc } CP = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $V_{CIJK} = \frac{\mathcal{A}_{IJK} \times CP}{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$