Jeudi 27 mars 2025

Terminale ➡ BAC BLANC ➡ Jour 2

Spécialité Mathématiques

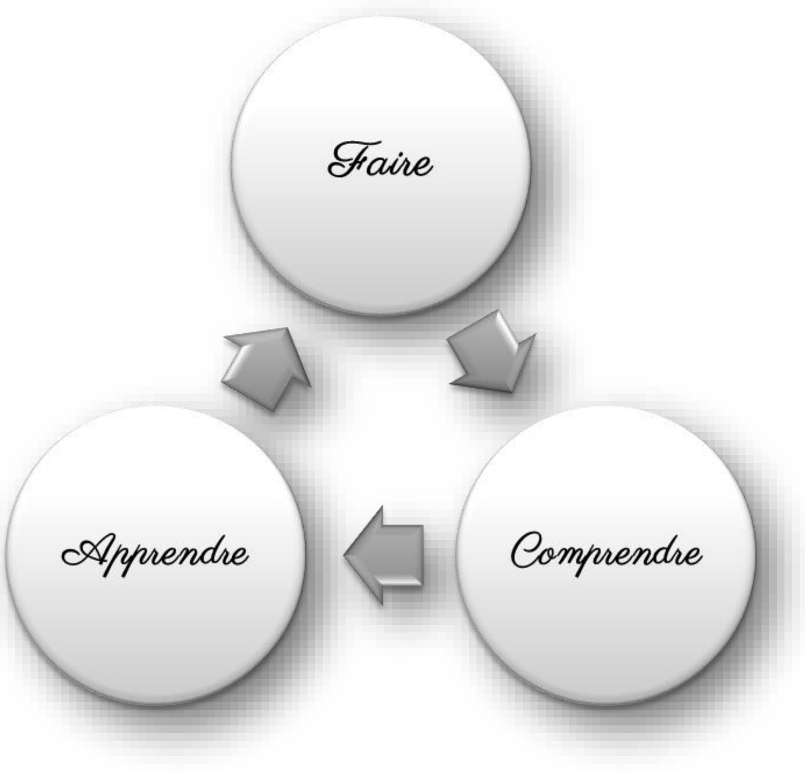


Table des matières

Enoncé du sujet

BACCALAUREAT GENERAL

EPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

BACCALAUREAT BLANC
Jeudi 27 mars 2025

MATHEMATIQUES

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé. L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.

Exercice 1. (5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. **Proposition 1 :** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(1+e^{x}) - \ln(1+e^{-x}) = x$.

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.
   On admet que la suite (u_n) est convergente.

Proposition 2 : La limite de la suite (u_n) est 4.

3. Soit l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.
   On considère les points A et B de coordonnées respectives $(0;1;5)$ et $(-2;-1;2)$.
   On considère le plan $(P) : 2x + y - 2z - 5 = 0$.

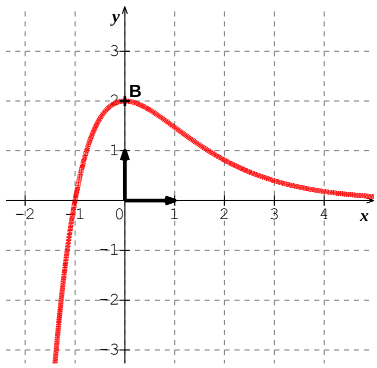
Proposition 3 : La droite (AB) est parallèle au plan (P).

4. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 4.
   Un sac contient n pièces indiscernables au toucher. Ces pièces comportent toutes un côté « PILE » et un côté « FACE » sauf 3 pièces qui contiennent deux côtés « FACE ».
   On choisit au hasard une pièce puis on la lance sans la regarder. On note le côté de la pièce visible.

Proposition 4 : La probabilité d'obtenir le côté « PILE » est égale à $\frac{n-3}{n}$.

5. Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Dans un repère orthonormé, on a tracé ci-contre la courbe de la fonction f', fonction dérivée de f. On admet que la courbe de f' admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses en B.

Proposition 5 : La fonction dérivée seconde f'' est positive sur l'intervalle $]-1;+\infty[$.



Exercice 2. (5 points)

Un cavalier et son cheval nommé « Pégase » s'entraînent en vue d'une compétition.
Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

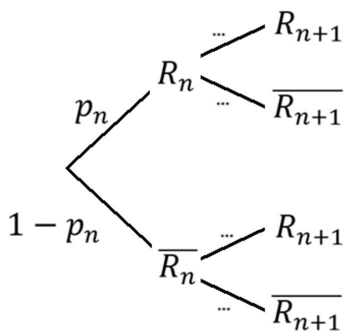
Chaque jour, Pégase doit sauter un obstacle en fin d'entraînement. Son entraîneur considère, étant donné les résultats de l'année précédente que :

- si Pégase franchit l'obstacle un jour, alors il le franchira dans 95% des cas le jour suivant;
- si Pégase ne franchit pas l'obstacle un jour, alors dans 85% des cas il ne le franchira pas non plus le lendemain.

On note pour tout entier naturel n :

- R_n l'événement : « Pégase réussit à franchir l'obstacle lors de la n-ième séance. »
- p_n la probabilité de l'évènement R_n. On considère que $p_0 = 0{,}7$.

1. Soit n un entier naturel, recopier l'arbre pondéré ci-dessous tout en complétant les pointillés.
2. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $p_{n+1} = 0{,}8\,p_n + 0{,}15$.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier n naturel, on a $p_n = 0{,}75 - 0{,}05 \times 0{,}8^{n}$.
4. En déduire la limite de la suite (p_n). On notera cette limite l.
5. Donner une interprétation de la valeur de l dans le cadre de l'exercice.



Partie B

Après de longues et nombreuses séances d'entraînement, l'entraîneur estime maintenant que Pégase franchit chaque obstacle avec une probabilité de 0,75 et ce indépendamment d'avoir franchi ou non les obstacles précédents.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'obstacles franchis par Pégase à l'issue d'un parcours qui comporte 6 obstacles.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par X. Préciser ses paramètres.

2. **a.** Déterminer la valeur exacte de la probabilité que Pégase franchisse les 6 obstacles.

b. Donner un arrondi à 10^{-4} de cette probabilité.

3. Calculer $P(X \geq 5)$, à 10^{-4} près. Interpréter ce résultat.

Exercice 3. (5 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-2;+\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]-2;+\infty[$.

On appelle C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en -2.

b. En déduire une interprétation graphique.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-2;+\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}$.

b. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]-2;+\infty[$.

4. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $]-2;+\infty[$, on a : $f''(x) = \frac{e^x(x^2+2x+2)}{(x+2)^3}$

a. Etudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$.

b. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe de C_f au point d'abscisse 0.

c. En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $]-2;+\infty[$, on a : $e^x \geq (x+2)(\,0{,}25\,x + 0{,}5)$

5. **a.** Justifier que l'équation $f(x) = 3$ admet exactement deux solutions sur $]-2;+\infty[$.

b. On a écrit le programme ci-contre en langage Python. Que renvoie ce programme pour $n = 2$?

c. Donner une interprétation de ce résultat le cadre de l'exercice.

```
from math import *
def delta(n):
      a=0
      y=exp(a)/(a+2)
      while y<=3:
           a=a+10**(-n)
           y=exp(a)/(a+2)
      return (a-10**(-n),a)
```

Exercice 4. (5 points)

Partie A – étude d'une fonction

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{48x^2 - 40x + 25}$. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer la valeur de x pour que la fonction f soit minimale.

Partie B – calcul d'une aire

Dans l'espace muni du repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ d'unité 1cm, on considère les points A, B, C, D de coordonnées respectives $(4\,;-2\,;4\,)$, $(5\,;2\,;5)$, $(0\,;2\,;5)$ et $(4\,;-2\,;1)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CD).

2. Soit M un point de la droite (CD).

Déterminer les coordonnées du point M pour que la distance BM soit minimale.

3. On note le point I de coordonnées $\left(\frac{5}{3}; \frac{1}{3}; \frac{10}{3}\right)$.

a. Justifier que le point I est un point de la droite (CD).

b. Montrer que les droites (BI) et (CD) sont perpendiculaires.

c. Que représente la droite (BI) dans le triangle BCD ? Justifier.

d. Montrer que le triangle BCD a une aire égale à $10\sqrt{2}$ cm^2.

Partie C – calcul d'un volume

1. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

2. Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).

3. On donne une représentation paramétrique de la droite $\Delta : \begin{cases} x = 4 \\ y = -5 + 3t \\ z = 7 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

a. Montrer que la droite Δ est la droite passant par A et orthogonale au plan (BCD).

b. Démontrer que le point H, intersection de la droite Δ et du plan (BCD) a pour coordonnées $\left(4; -\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

4. Justifier que la droite (AH) est la hauteur relative à la base BCD dans le tétraèdre $ABCD$.
Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

Terminale → BAC BLANC → Jour 2

Spécialité Mathématiques

Correction du sujet

Correction de l'exercice 1. (5 points)

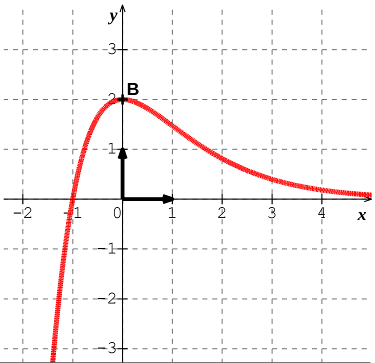
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. **Proposition 1 :** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(1+e^{x}) - \ln(1+e^{-x}) = x$.

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.
On admet que la suite (u_n) est convergente.
Proposition 2 : La limite de la suite (u_n) est 4.

3. Soit l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath};\ \vec{k})$.
On considère les points A et B de coordonnées respectives $(0; 1; 5)$ et $(-2; -1; 2)$.
On considère le plan $(P) : 2x + y - 2z - 5 = 0$.
Proposition 3 : La droite (AB) est parallèle au plan (P).

4. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 4.
Un sac contient n pièces indiscernables au toucher. Ces pièces comportent toutes un côté « PILE » et un côté « FACE » sauf 3 pièces qui contiennent deux côtés « FACE ».
On choisit au hasard une pièce puis on la lance sans la regarder. On note le côté de la pièce visible.
Proposition 4 : La probabilité d'obtenir le côté « PILE » est égale à $\frac{n-3}{n}$.



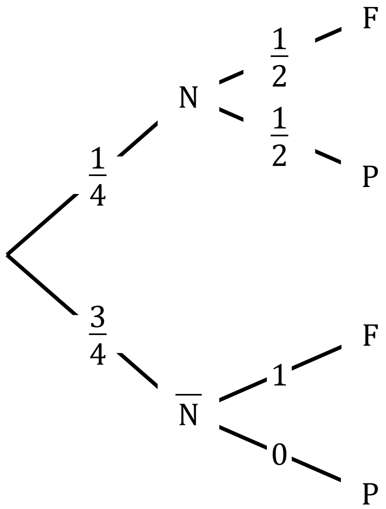
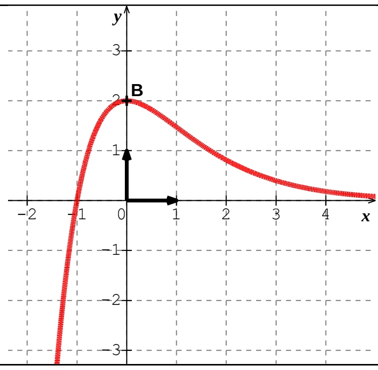
5. Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
Dans un repère orthonormé, on a tracé ci-contre la courbe de la fonction f', fonction dérivée de f. On admet que la courbe de f' admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses en B.
Proposition 5 : La fonction dérivée seconde f'' est positive sur l'intervalle $]-1; +\infty[$.

<table>
<tr>
<td>Exercice 1.</td>
<td>1.</td>
<td>
Soit $x \in \mathbb{R}$, $\ln(1+e^{x}) - \ln(1+e^{-x}) = \ln\left(\frac{1+e^{x}}{1+e^{-x}}\right)$ car $1+e^{x} > 0$ et $1+e^{-x} > 0$

$$\begin{aligned}
\ln(1+e^{x}) - \ln(1+e^{-x}) &= \ln\left(\frac{1+e^{x}}{1+e^{-x}}\right)\\
&= \ln\left(\frac{(1+e^{x})e^{x}}{(1+e^{-x})e^{x}}\right)\\
&= \ln\left(\frac{(1+e^{x})e^{x}}{e^{x}+e^{-x}e^{x}}\right)\\
&= \ln\left(\frac{(1+e^{x})e^{x}}{e^{x}+1}\right)\\
&= \ln(e^{x})\\
&= x
\end{aligned}$$

La proposition 1 est donc vraie.
</td>
</tr>
</table>

Exercice 1.	**2.**	**Démontrons que,** $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$
		Initialisation : Je vérifie que la propriété est vraie au rang $n = 0$:
		$$u_0 = 0$$
		La propriété est vraie au rang 0.
		
		Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, je suppose la propriété vraie au rang n et je démontre qu'elle aussi vraie au rang $n+1$.
		Je suppose que $u_n \geq 0$ où $n \in \mathbb{N}$ fixé
		$$u_n \geq 0$$
		$$\Leftrightarrow 3u_n \geq 0$$
		$$\Leftrightarrow 3u_n + 4 \geq 4 \geq 0$$
		$$\Rightarrow \sqrt{3u_n + 4} \geq \sqrt{4} \text{ car la fonction } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est croissante sur } [0; +\infty[$$
		$$\Rightarrow u_{n+1} \geq 2 \geq 0$$
		La propriété est vraie au rang $n+1$.
		Conclusion : J'en déduis, par le principe de récurrence, que la propriété est vraie pour tous les rangs $n \in \mathbb{N}$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$
		
		$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} = f(u_n)$ où $f(x) = \sqrt{3x+4}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.
		La suite étant convergente, sa limite est solution de l'équation $f(x) = x$
		$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ \Leftrightarrow \sqrt{3x+4} &= x \\ \Rightarrow 3x+4 &= x^2 \\ \Rightarrow -x^2+3x+4 &= 0 \end{aligned}$$
		$$\Delta = 9 - 4 \times (-4) = 25 > 0$$
		Il y a alors deux solutions :
		$$x_1 = \frac{-3-\sqrt{25}}{-2} = 4 \text{ et } x_2 = \frac{-3+\sqrt{25}}{-2} = -1$$
		La suite (u_n) étant positive, j'en déduis que sa limite est positive elle aussi. La suite (u_n) converge donc vers 4.
		La proposition 2 est donc vraie.
		Illustration :
		
		from math import *
		def f(x):
		    return sqrt(3*x+4)
		u=0
		n=10
		print("0",u)
		for i in range(n):
		    u=f(u)
		    print(i+1,u)
		
		0 0
		1 2.0
		2 3.1622776601683795
		3 3.6724423726595274
		4 3.875219621902555
		5 3.952930414984264
		6 3.9823097876675533
		7 3.9933606602713283
		8 3.9975094722606954
		9 3.99906594303996
		10 3.9996497133023885

Exercice 1.	**3.**	Un vecteur normal sur plan (P) est $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$. La droite (AB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-3\end{pmatrix}$ $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = -4 - 2 + 6 = 0$ J'en déduis que les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux donc la droite (AB) est parallèle au plan (P). La proposition 3 est donc vraie.
	4.	Je conjecture que la proposition est fausse car le nombre de côtés Pile est $n-3$ mais il y a $2n$ côtés en tout (car chaque pièce possède 2 côtés), donc la probabilité devrait être $\frac{n-3}{2n}$. Contre-exemple, prenons $n = 4$: Le sac contient donc 4 pièces dont une pièce normale et les 3 autres pièces anormales. On choisit au hasard une pièce, notons N l'évènement « La pièce est normale ».  La probabilité d'obtenir Pile est donc : $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{8}$ Mais $\frac{n-3}{n} = \frac{4-3}{4} = \frac{1}{4}$ La proposition 4 est donc fausse.
	5.	Sur l'intervalle $]-1;+\infty[$, la courbe de la fonction f' n'est pas monotone. Elle est croissante sur $]-1;0]$ et décroissante sur $[0;+\infty[$. La fonction dérivée seconde f'' est donc négative sur l'intervalle $[0;+\infty[$. La proposition 5 est donc fausse. 

Correction de l'exercice 2. (5 points)

Un cavalier et son cheval nommé « Pégase » s'entraînent en vue d'une compétition.

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

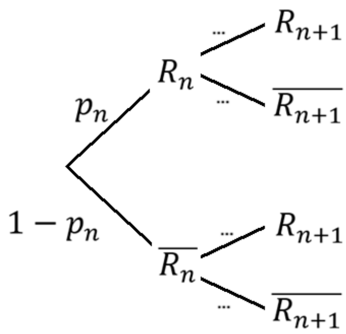
Chaque jour, Pégase doit sauter un obstacle en fin d'entraînement. Son entraîneur considère, étant donné les résultats de l'année précédente que :

- si Pégase franchit l'obstacle un jour, alors il le franchira dans 95% des cas le jour suivant ;
- si Pégase ne franchit pas l'obstacle un jour, alors dans 85% des cas il ne le franchira pas non plus le lendemain.

On note pour tout entier naturel n :

- R_n l'événement : « Pégase réussit à franchir l'obstacle lors de la n-ième séance. »

- p_n la probabilité de l'évènement R_n. On considère que $p_0 = 0{,}7$.



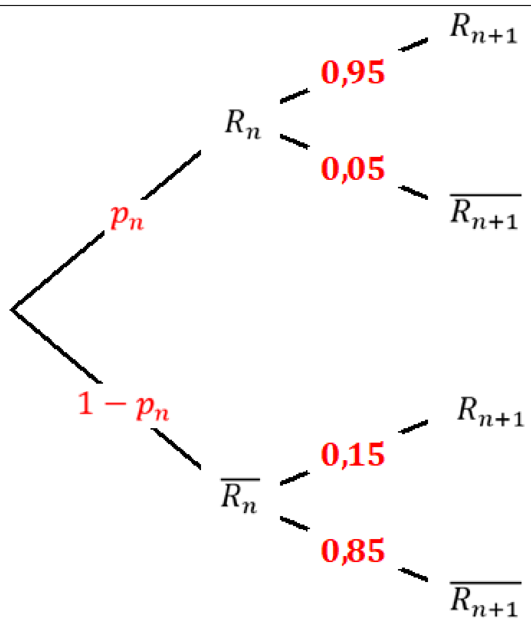
1. Soit n un entier naturel, recopier l'arbre pondéré ci-dessous tout en complétant les pointillés.
2. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $p_{n+1} = 0{,}8\, p_n + 0{,}15$.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier n naturel, on a $p_n = 0{,}75 - 0{,}05 \times 0{,}8^n$.
4. En déduire la limite de la suite (p_n). On notera cette limite ℓ.
5. Donner une interprétation de la valeur de ℓ dans le cadre de l'exercice.

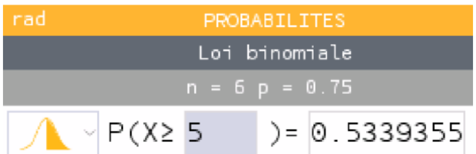
Partie B

Après de longues et nombreuses séances d'entraînement, l'entraîneur estime maintenant que Pégase franchit chaque obstacle avec une probabilité de 0,75 et ce indépendamment d'avoir franchi ou non les obstacles précédents.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'obstacles franchis par Pégase à l'issue d'un parcours qui comporte 6 obstacles.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par X. Préciser ses paramètres.
2. **a.** Déterminer la valeur exacte de la probabilité que Pégase franchisse les 6 obstacles.
   b. Donner un arrondi à 10^{-4} de cette probabilité.
3. Calculer $P(X \geq 5)$, à 10^{-4} près. Interpréter ce résultat.

Exercice 2.	**A1**	
	A2	Soit $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = P(R_{n+1})$ $p_{n+1} = P(R_n \cap R_{n+1}) + P(\overline{R_n} \cap R_{n+1})$ $p_{n+1} = 0{,}95p_n + 0{,}15(1 - p_n)$ $p_{n+1} = 0{,}95p_n + 0{,}15 - 0{,}15p_n$ $p_{n+1} = 0{,}8\, p_n + 0{,}15$

Exercice 2.	A3	**Démontrons que,** $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = 0{,}75 - 0{,}05 \times 0{,}8^n$. **Initialisation : Je vérifie que la propriété est vraie au rang $n = 0$:** $0{,}75 - 0{,}05 \times 0{,}8^0 = 0{,}75 - 0{,}05 = 0{,}7 = p_0$ La propriété est vraie au rang 0. **Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, je suppose la propriété vraie au rang n et je démontre qu'elle aussi vraie au rang $n+1$.** Je suppose que $p_n = 0{,}75 - 0{,}05 \times 0{,}8^n$ où $n \in \mathbb{N}$ fixé or $p_{n+1} = 0{,}8\, p_n + 0{,}15$ $p_{n+1} = 0{,}8\,(0{,}75 - 0{,}05 \times 0{,}8^n) + 0{,}15$ $p_{n+1} = 0{,}6 - 0{,}05 \times 0{,}8^{n+1} + 0{,}15$ $p_{n+1} = 0{,}75 - 0{,}05 \times 0{,}8^{n+1}$ La propriété est vraie au rang $n+1$. **Conclusion : J'en déduis, par le principe de récurrence, que la propriété est vraie pour tous les rangs $n \in \mathbb{N}$** donc $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = 0{,}75 - 0{,}05 \times 0{,}8^n$.
	A4	$\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}8^n = 0$ car $(0{,}8^n)$ est une suite géométrique de raison $0{,}8 \in]-1;1[$ J'en déduis que : $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (0{,}75 - 0{,}05 \times 0{,}8^n) = 0{,}75$
	A5	Sur le très long terme, la probabilité que Pégase réussit à franchir l'obstacle va tendre vers 75%.
	B1	On répète 6 fois, de façon identique et indépendante, le schéma de Bernoulli où la probabilité que Pégase franchisse chaque obstacle est de 0,75. La variable aléatoire X qui compte le nombre d'obstacles franchis par Pégase à l'issue d'un parcours qui comporte 6 obstacles suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0{,}75$: $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n = 6; p = 0{,}75)$
	B2a	$P(X = 6) = 0{,}75^6$
	B2b	$P(X = 6) \approx 0{,}17797 \approx 0{,}1780$
	B3	**Méthode n°1 avec la Numworks :**  $P(X \geq 5) \approx 0{,}53393 \approx 0{,}5339$ **Méthode n°2 par le complémentaire :** $P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5)$ $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) \approx 0{,}5339$   **Méthode n°3 par somme :** $P(X \geq 5) = P(X = 5) + P(X = 6)$ $P(X \geq 5) = \binom{6}{5} \times 0{,}75^5 \times 0{,}25^1 + 0{,}75^6 \approx 0{,}5339$

Correction de l'exercice 3. (5 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-2;+\infty[$ par $f(x)=\frac{e^x}{x+2}$.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]-2;+\infty[$.
On appelle C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en -2.
b. En déduire une interprétation graphique.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. **a.** Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-2;+\infty[$, on a : $f'(x)=\frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}$.
b. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]-2;+\infty[$.

4. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $]-2;+\infty[$, on a : $f''(x)=\frac{e^x(x^2+2x+2)}{(x+2)^3}$

a. Etudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$.
b. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe de C_f au point d'abscisse 0.
c. En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $]-2;+\infty[$, on a : $e^x \geq (x+2)(\,0{,}25\,x+0{,}5)$

5. **a.** Justifier que l'équation $f(x)=3$ admet exactement deux solutions sur $]-2;+\infty[$.
b. On a écrit le programme ci-contre en langage Python.
Que renvoie ce programme pour $n=2$?

c. Donner une interprétation de ce résultat le cadre de l'exercice.

```
from math import *
def delta(n):
      a=0
      y=exp(a)/(a+2)
      while y<=3:
          a=a+10**(-n)
          y=exp(a)/(a+2)
      return (a-10**(-n),a)
```

Exercice 3.	**1a.**	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-2} e^x = e^{-2}>0\\ \lim\limits_{x\to-2^+} x+2=0^+\end{array}\right\}$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=+\infty$
	1b.	J'en déduis que la courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x=-2$.

Exercice 3.

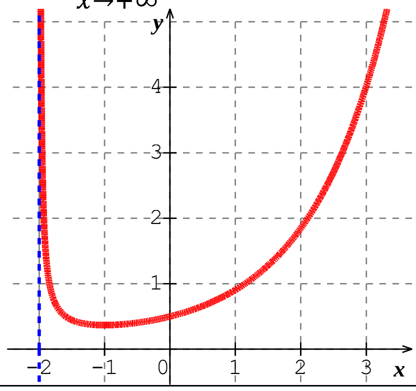
2.

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x+2 = +\infty\end{array}\right\}\text{FI par quotient}$$

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{e^x}{x+2} = \frac{e^x}{x} \times \frac{x}{x+2} = \frac{e^x}{x} \times \frac{1}{1+\frac{2}{x}}$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ par croissance comparée} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{x}} = 1\end{array}\right\}\text{donc, par quotient,}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$



3a.

$\forall x \in \left]-2;+\infty\right[, f(x) = \dfrac{e^x}{x+2}$

La fonction f est dérivable sur $\left]-2;+\infty\right[$

$\forall x \in \left]-2;+\infty\right[, f'(x) = \dfrac{e^x(x+2) - e^x}{(x+2)^2}$

$f'(x) = \dfrac{e^x(x+2-1)}{(x+2)^2} = \dfrac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}$

3b.

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2} > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x+1 > 0 \text{ car } \frac{e^x}{(x+2)^2} > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x > -1 \end{aligned}$$

x	-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(-1) = \frac{e^{-1}}{-1+2} = \frac{1}{e}$$

4a.

$\forall x \in \left]-2;+\infty\right[, f''(x) = \dfrac{e^x(x^2+2x+2)}{(x+2)^3}$

$f''(x) = \dfrac{e^x(x^2+2x+2)}{(x+2)^3} > 0 \Leftrightarrow x^2+2x+2 > 0 \quad$ car $\quad \dfrac{e^x}{(x+2)^3} > 0$

Exercice 3.

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 2 = 4 - 8 = -4 < 0$$

J'en déduis que le polynôme $x^2 + 2x + 2$ est toujours du signe de $a = 1$ donc positif.
Par conséquent, $\forall x \in]-2; +\infty[, f''(x) > 0$
La fonction f est donc convexe sur $]-2; +\infty[$.

4b.

$$f(0) = \frac{e^0}{0+2} = \frac{1}{2} \qquad f'(0) = \frac{e^0(0+1)}{(0+2)^2} = \frac{1}{8}$$

$$y = \frac{1}{8}(x-0) + \frac{1}{2}$$

L'équation réduite de la tangente (T) à la courbe de C_f au point d'abscisse 0 est :

$$y = \frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$$

4c.

La fonction f étant convexe sur $]-2; +\infty[$ alors elle est au-dessus de ses tangentes, donc

$\forall x \in]-2; +\infty[, \quad \dfrac{e^x}{x+2} \geq \dfrac{1}{8}x + \dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x}{x+2} \geq 0{,}25\,x + 0{,}5$$

$$\Leftrightarrow e^x \geq (x+2)(\,0{,}25\,x + 0{,}5) \quad \text{car } \ x > -2$$

5a.

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty > 3$$

$$f(-1) = \frac{1}{e} < 3$$

La fonction f est strictement décroissante sur $]-2; -1[$

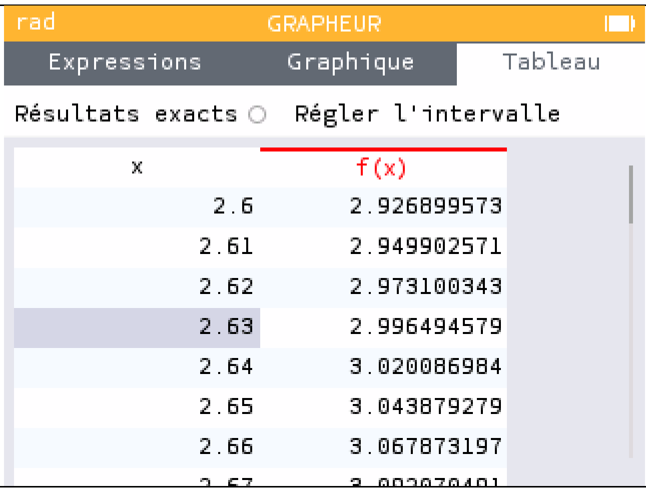
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty > 3$$

$$f(-1) = \frac{1}{e} < 3$$

La fonction f est strictement croissante sur $]-1; +\infty[$

De plus, la fonction f est continue car dérivable sur $]-2; +\infty[$
On peut en déduire que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution sur l'intervalle $]-2; -1[$ et une unique solution sur l'intervalle $]-1; +\infty[$.
Par conséquent, l'équation $f(x) = 3$ admet exactement deux solutions sur $]-2; +\infty[$.

5b. Le programme affiche : `(2.629999999999988, 2.639999999999877)`


rad GRAPHEUR

Expressions | Graphique | Tableau

Résultats exacts ○ Régler l'intervalle

x	f(x)
2.6	2.926899573
2.61	2.949902571
2.62	2.973100343
2.63	2.996494579
2.64	3.020086984
2.65	3.043879279
2.66	3.067873197
2.67	[illegible]

5c. Le programme permet d'obtenir un encadrement à 10^{-2} de la solution de l'équation $f(x) = 3$ contenue dans l'intervalle $]-1; +\infty[$.

Correction de l'exercice 4. (5 points)

Partie A – étude d'une fonction

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{48x^2 - 40x + 25}$. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la valeur de x pour que la fonction f soit minimale.

Partie B – calcul d'une aire

Dans l'espace muni du repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ d'unité 1cm, on considère les points A, B, C, D de coordonnées respectives $(4\,;-2\,;4\,), (5\,;2\,;5), (0\,;2\,;5)$ et $(4\,;-2\,;1)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CD).

2. Soit M un point de la droite (CD).
Déterminer les coordonnées du point M pour que la distance BM soit minimale.

3. On note le point I de coordonnées $\left(\frac{5}{3}; \frac{1}{3}; \frac{10}{3}\right)$.

- **a.** Justifier que le point I est un point de la droite (CD).
- **b.** Montrer que les droites (BI) et (CD) sont perpendiculaires.
- **c.** Que représente la droite (BI) dans le triangle BCD ? Justifier.
- **d.** Montrer que le triangle BCD a une aire égale à $10\sqrt{2}\ \text{cm}^2$.

Partie C – calcul d'un volume

1. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

2. Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).

3. On donne une représentation paramétrique de la droite $\Delta : \begin{cases} x = 4 \\ y = -5 + 3t \\ z = 7 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

- **a.** Montrer que la droite Δ est la droite passant par A et orthogonale au plan (BCD).
- **b.** Démontrer que le point H, intersection de la droite Δ et du plan (BCD) a pour coordonnées $\left(4; -\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

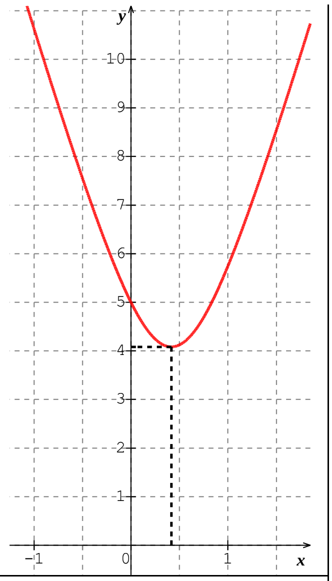
4. Justifier que la droite (AH) est la hauteur relative à la base BCD dans le tétraèdre $ABCD$.
Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

Exercice 4.	**A1.**	$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{48x^2 - 40x + 25}$ La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ $$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{96x - 40}{2\sqrt{48x^2 - 40x + 25}} = \frac{48x - 20}{\sqrt{48x^2 - 40x + 25}}$$ $f'(x) > 0 \iff \dfrac{48x - 20}{\sqrt{48x^2 - 40x + 25}} > 0$ $\iff 48x - 20 > 0$ car $\sqrt{48x^2 - 40x + 25} > 0$ $\iff 48x > 20$ $\iff x > \dfrac{20}{48}$ $\iff x > \dfrac{5}{12}$

Exercice 4.

x	$-\infty$	$\frac{5}{12}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\frac{5\sqrt{6}}{3}$	$\nearrow$

$$f\left(\frac{5}{12}\right)=\sqrt{48\times\left(\frac{5}{12}\right)^2-40\times\frac{5}{12}+25}=\frac{5\sqrt{6}}{3}$$



A2. La fonction f est donc minimale pour $x=\frac{5}{12}$.

B1.

$$C(0\,;2\,;5)\quad D(4\,;-2\,;1)\qquad \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\-4\\-4\end{pmatrix}$$

Une représentation paramétrique de la droite (CD) est :

$$\begin{cases}x=4t\\ y=2-4t\\ z=5-4t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$$

B2

$$A(4\,;-2\,;4\,)\quad B(5\,;2\,;5)\quad C(0\,;2\,;5)\quad D(4\,;-2\,;1)$$

$M\in(CD)$ donc il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $M(4t;2-4t;5-4t)$

$$\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}4t-5\\2-4t-2\\5-4t-5\end{pmatrix}\qquad \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}4t-5\\-4t\\-4t\end{pmatrix}$$

$BM=\sqrt{(4t-5)^2+(-4t)^2+(-4t)^2}$

$BM=\sqrt{16t^2-40t+25+16t^2+16t^2}$

$BM=\sqrt{48t^2-40t+25}=f(t)$

D'après la partie A, la distance BM sera minimale pour $t=\frac{5}{12}$.

Dans ce cas, les coordonnées du point M sont

$M\left(\frac{20}{12};2-\frac{20}{12};5-\frac{20}{12}\right)$ soit $M\left(\frac{5}{3};\frac{1}{3};\frac{10}{3}\right)$

B3a

$$I\left(\frac{5}{3};\frac{1}{3};\frac{10}{3}\right)$$

$$\begin{cases}\frac{5}{3}=4t\\ \frac{1}{3}=2-4t\\ \frac{10}{3}=5-4t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{5}{12}=t\\ \frac{1}{3}-2=-4t\\ \frac{10}{3}-5=-4t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\frac{5}{12}\\ -4t=-\frac{5}{3}\end{cases}\Leftrightarrow t=\frac{5}{12}$$

On en déduit que le point I est un point de la droite (CD).

Exercice 4.	**B3b**	$B(5\,;2\,;5)$ $C(0\,;2\,;5)$ $D(4\,;-2\,;1)$ $I\left(\frac{5}{3};\frac{1}{3};\frac{10}{3}\right)$ $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}\frac{-10}{3}\\ \frac{-5}{3}\\ \frac{-5}{3}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\ -4\\ -4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{CD}=4\times\left(-\frac{10}{3}\right)-4\times\left(-\frac{5}{3}\right)-4\times\left(-\frac{5}{3}\right)$ $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{CD}=\frac{-40}{3}+\frac{20}{3}+\frac{20}{3}=0$ On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux. Puisque le point I est un point de la droite (CD) alors les droites (BI) et (CD) sont sécantes et donc perpendiculaires.
	B3c	La droite (BI) est la hauteur issue de B dans le triangle BCD car la droite (BI) est perpendiculaire au côté $[CD]$.
	B3d	$\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}\frac{-10}{3}\\ \frac{-5}{3}\\ \frac{-5}{3}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\ -4\\ -4\end{pmatrix}$ $BI=\sqrt{\left(-\frac{10}{3}\right)^2+\left(-\frac{5}{3}\right)^2+\left(-\frac{5}{3}\right)^2}$ $BI=\sqrt{\frac{100}{9}+\frac{25}{9}+\frac{25}{9}}$ $BI=\sqrt{\frac{150}{9}}$ $BI=\frac{5\sqrt{6}}{3}$ $CD=\sqrt{16+16+16}=4\sqrt{3}$ L'aire du triangle BCD est donc égale à : $\frac{CD\times BI}{2}=\frac{4\sqrt{3}\times\frac{5\sqrt{6}}{3}}{2}=4\sqrt{3}\times\frac{5\sqrt{6}}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{20\sqrt{18}}{6}=\frac{10\times3\sqrt{2}}{3}=10\sqrt{2}$
	C1	$B(5\,;2\,;5)$ $C(0\,;2\,;5)$ $D(4\,;-2\,;1)$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-5\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\ -4\\ -4\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$ $\vec{n}.\overrightarrow{BC}=0+0+0=0$ $\vec{n}.\overrightarrow{CD}=0+4-4=0$ Le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonal aux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ donc le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (BCD).

<table>
<tr><td rowspan="4">Exercice 4.</td><td>C2</td><td>Une équation cartésienne du plan (BCD) est donc de la forme :
$$0x - y + z + d = 0 \Leftrightarrow -y + z + d = 0$$
or $B(5\,;2\,;5) \in (BCD)$ donc
$$-2 + 5 + d = 0$$
$$\Leftrightarrow 3 + d = 0$$
$$\Leftrightarrow d = -3$$
Une équation cartésienne du plan (BCD) est donc $-y + z - 3 = 0$</td></tr>
<tr><td>C3a</td><td>$$\Delta : \begin{cases} x = 4 \\ y = -5 + 3t \\ z = 7 - 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad A(4\,;-2\,;4\,)$$
$$\begin{cases} 4 = 4 \\ -2 = -5 + 3t \\ 4 = 7 - 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t = 3 \\ -3t = -3 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$$
On en déduit que le point A est un point de la droite Δ.
Un vecteur directeur de la droite Δ est $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$
or $\vec{u} = -3\vec{n}$
donc le vecteur $\vec{u}$ est aussi normal au plan (BCD).
On en déduit que la droite Δ est la droite passant par A et orthogonale au plan (BCD).</td></tr>
<tr><td>C3b</td><td>$H \in \Delta$ donc, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $H(4;-5+3t;7-3t)$

de plus $H \in (BCD)$ donc $-y + z - 3 = 0$
$$-(-5+3t) + 7 - 3t - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow 5 - 3t + 4 - 3t = 0$$
$$\Leftrightarrow 9 - 6t = 0$$
$$\Leftrightarrow -6t = -9$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{-9}{-6} = \frac{3}{2}$$
Les coordonnées du point H sont donc
$$H\left(4;-5+3\times\frac{3}{2};7-3\times\frac{3}{2}\right) \quad \text{soit} \quad H\left(4;\frac{-1}{2};\frac{5}{2}\right)$$</td></tr>
<tr><td>C4</td><td>Les droites (AH) et Δ sont confondues donc la droite (AH) est orthogonale au plan (BCD) et donc la droite (AH) est la hauteur relative à la base BCD dans le tétraèdre $ABCD$.
$$A(4\,;-2\,;4\,) \quad H\left(4;\frac{-1}{2};\frac{5}{2}\right) \quad \overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}+2 \\ \frac{5}{2}-4 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$
$$AH = \sqrt{0^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{18}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$
Le volume du tétraèdre $ABCD$ est donc :
$$\frac{AH \times 10\sqrt{2}}{3} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}\times 10\sqrt{2}}{3} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\times 10\sqrt{2}\times\frac{1}{3} = 10$$</td></tr>
</table>