

# **BACCALAUREAT GENERAL**

EPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

**BACCALAUREAT BLANC**

**Jeudi 27 mars 2025**

## **MATHEMATIQUES**

**Durée de l'épreuve : 4 heures**

*L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé. L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collègue » est autorisé.*

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.  
Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.*

*Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.*

## Exercice 1 (5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.  
Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. **Proposition 1** : Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\ln(1 + e^x) - \ln(1 + e^{-x}) = x$ .

2. Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 0$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$ .  
On admet que la suite  $(u_n)$  est convergente.

**Proposition 2** : La limite de la suite  $(u_n)$  est 4.

2. Soit l'espace muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .  
On considère les points  $A$  et  $B$  de coordonnées respectives  $(0; 1; 5)$  et  $(-2; -1; 2)$ .  
On considère le plan  $(P) : 2x + y - 2z - 5 = 0$ .

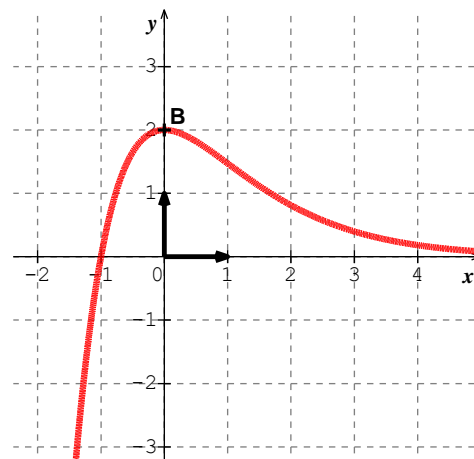
**Proposition 3** : La droite  $(AB)$  est parallèle au plan  $(P)$ .

3. Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 4.  
Un sac contient  $n$  pièces indiscernables au toucher. Ces pièces comportent toutes un côté « PILE » et un côté « FACE » sauf 3 pièces qui contiennent deux côtés « FACE ».  
On choisit au hasard une pièce puis on la lance sans la regarder. On note le côté de la pièce visible.

**Proposition 4** : La probabilité d'obtenir le côté « PILE » est égale à  $\frac{n-3}{n}$ .

4. Soit  $f$  une fonction définie et deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  
Dans un repère orthonormé, on a tracé ci-contre la courbe de la fonction  $f'$ , fonction dérivée de  $f$ .  
On admet que la courbe de  $f'$  admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses en  $B$ .

**Proposition 5** : La fonction dérivée seconde  $f''$  est positive sur l'intervalle  $] -1; +\infty[$ .



## Exercice 2 (5 points)

Un cavalier et son cheval nommé « Pégase » s'entraînent en vue d'une compétition.

*Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.*

### Partie A

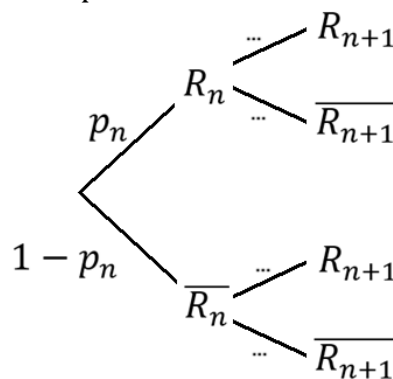
Chaque jour, Pégase doit sauter un obstacle en fin d'entraînement. Son entraîneur considère, étant donné les résultats de l'année précédente que :

- si Pégase franchit l'obstacle un jour, alors il le franchira dans 95% des cas le jour suivant;
- si Pégase ne franchit pas l'obstacle un jour, alors dans 85% des cas il ne le franchira pas non plus le lendemain.

On note pour tout entier naturel  $n$  :

- $R_n$  l'événement : « Pégase réussit à franchir l'obstacle lors de la  $n$ -ième séance. »
- $p_n$  la probabilité de l'évènement  $R_n$ . On considère que  $p_0 = 0,7$ .

1. Soit  $n$  un entier naturel, recopier l'arbre pondéré ci-dessous tout en complétant les pointillés.



2. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $p_{n+1} = 0,8 p_n + 0,15$ .

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier  $n$  naturel, on a  $p_n = 0,75 - 0,05 \times 0,8^n$ .
2. En déduire la limite de la suite  $(p_n)$ . On notera cette limite  $\ell$ .
3. Donner une interprétation de la valeur de  $\ell$  dans le cadre de l'exercice.

## Partie B

Après de longues et nombreuses séances d'entraînement, l'entraîneur estime maintenant que Pégase franchit chaque obstacle avec une probabilité de 0,75 et ce indépendamment d'avoir franchi ou non les obstacles précédents.

On note  $X$  la variable aléatoire qui donne le nombre d'obstacles franchis par Pégase à l'issue d'un parcours qui comporte 6 obstacles.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par  $X$ . Préciser ses paramètres.
2. **a.** Déterminer la valeur exacte de la probabilité que Pégase franchisse les 6 obstacles.  
**b.** Donner un arrondi à  $10^{-4}$  de cette probabilité.
3. Calculer  $P(X \geq 5)$ , à  $10^{-4}$  près. Interpréter ce résultat.

## Exercice 3 (5 points)

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]-2; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$ .  
On admet que la fonction  $f$  est deux fois dérivable sur l'intervalle  $]-2; +\infty[$ .  
On appelle  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $-2$ .  
**b.** En déduire une interprétation graphique.
2. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
3. **a.** Montrer que pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $]-2; +\infty[$ , on a :  $f'(x) = \frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}$ .  
**b.** Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]-2; +\infty[$ .
4. On admet que pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $]-2; +\infty[$ , on a :  $f''(x) = \frac{e^x(x^2+2x+2)}{(x+2)^3}$ 
  - a. Etudier la convexité de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]-2; +\infty[$ .
  - b. Déterminer l'équation réduite de la tangente  $(T)$  à la courbe de  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 0.
  - c. En déduire que, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $]-2; +\infty[$ , on a :  $e^x \geq (x+2)(0,25x+0,5)$
5. **a.** Justifier que l'équation  $f(x) = 3$  admet exactement deux solutions sur  $]-2; +\infty[$ .  
**b.** On a écrit le programme ci-contre en langage Python. Que renvoie ce programme pour  $n=2$  ?  
**c.** Donner une interprétation de ce résultat le cadre de l'exercice.

```
from math import *
def delta(n):
    a=0
    y=exp(a)/(a+2)
    while y<=3:
        a=a+10**(-n)
        y=exp(a)/(a+2)
    return (a-10**(-n),a)
```

## Exercice 4 (5 points)

### Partie A – étude d'une fonction

1. Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \sqrt{48x^2 - 40x + 25}$ . Etudier les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Déterminer la valeur de  $x$  pour que la fonction  $f$  soit minimale.

### Partie B – calcul d'une aire

Dans l'espace muni du repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  d'unité 1cm, on considère les points  $A, B, C, D$  de coordonnées respectives  $(4; -2; 4)$ ,  $(5; 2; 5)$ ,  $(0; 2; 5)$  et  $(4; -2; 1)$ .

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(CD)$ .
2. Soit  $M$  un point de la droite  $(CD)$ .  
Déterminer les coordonnées du point  $M$  pour que la distance  $BM$  soit minimale.
3. On note le point  $I$  de coordonnées  $\left(\frac{5}{3}; \frac{1}{3}; \frac{10}{3}\right)$ .
  - a. Justifier que le point  $I$  est un point de la droite  $(CD)$ .
  - b. Montrer que les droites  $(BI)$  et  $(CD)$  sont perpendiculaires.
  - c. Que représente la droite  $(BI)$  dans le triangle  $BCD$ ? Justifier.
  - d. Montrer que le triangle  $BCD$  a une aire égale à  $10\sqrt{2}$  cm<sup>2</sup>.

### Partie C – calcul d'un volume

1. Démontrer que le vecteur  $\vec{n}$  de coordonnées  $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur normal au plan  $(BCD)$ .

2. Déterminer une équation cartésienne du plan  $(BCD)$ .

3. On donne une représentation paramétrique de la droite  $\Delta : \begin{cases} x = 4 \\ y = -5 + 3t \\ z = 7 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ .

- a. Montrer que la droite  $\Delta$  est la droite passant par  $A$  et orthogonale au plan  $(BCD)$ .
- b. Démontrer que le point  $H$ , intersection de la droite  $\Delta$  et du plan  $(BCD)$  a pour coordonnées  $\left(4; -\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$ .

4. Justifier que la droite  $(AH)$  est la hauteur relative à la base  $BCD$  dans le tétraèdre  $ABCD$ .

5. Calculer le volume du tétraèdre  $ABCD$ .