

Partie A : Etude générale des suites à récurrence affine

Soit a et b deux réels, on définit la suite (u_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = a u_n + b$.

- ❶ Lorsque $a = 1$, quelle est la nature de la suite (u_n) ?
- ❷ Lorsque $b = 0$, quelle est la nature de la suite (u_n) ?
- ❸ Lorsque $a \neq 1$ et $b \neq 0$, on dit que la suite (u_n) est arithmético-géométrique.

On définit la suite (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n + \frac{b}{a-1}$.

- a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
- b) En déduire, pour tout entier n , une expression de v_n en fonction de n .
- c) Déterminer alors, pour tout entier n , une expression de u_n en fonction de n .

Partie B : Application aux emprunts bancaires

On emprunte un capital noté u_0 au taux mensuel d'intérêt t lorsque les mensualités m sont constantes.

- ❶ Etude de la suite du capital restant dû :
 - a) Justifier que, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (1 + t) u_n - m$.
 - b) Déterminer alors, pour tout entier n , une expression de u_n en fonction de n .
- ❷ Lorsque l'on emprunte un capital C sur N mois au taux mensuel t . Démontrer que le montant de la mensualité m est :

$$m = \frac{C t}{1 - (1 + t)^{-N}}$$

- ❸ Evariste emprunte 180 000 euros sur 15 ans mois au taux mensuel 0,25%.
 - a) Calculer le montant de sa mensualité.
 - b) Quel sera le coût total de ce crédit ?
- ❹ Hypathie estime qu'elle peut consacrer 1 000 euros par mois au remboursement d'un emprunt. Elle souhaite que ce crédit ne dépasse pas 10 ans et les taux moyens actuels sont de l'ordre de 0,4% mensuel.
 - a) Quelle est sa capacité d'emprunt ?
 - b) Quel serait le coût total de ce crédit ?
- ❺ Emmy souhaite emprunter 100 000 euros et estime qu'elle peut consacrer 500 euros par mois au remboursement de cet emprunt. La banque lui propose un taux de 0,5% mensuel.
 - a) Quelle serait la durée de l'emprunt ?
 - b) Quel serait le coût total de ce crédit ?