LYCEE Polyvalent Albert EINSTEIN

Fonctions d'une variable réelle
Terminale ➡ Préparation au BAC
Spécialité Mathématiques

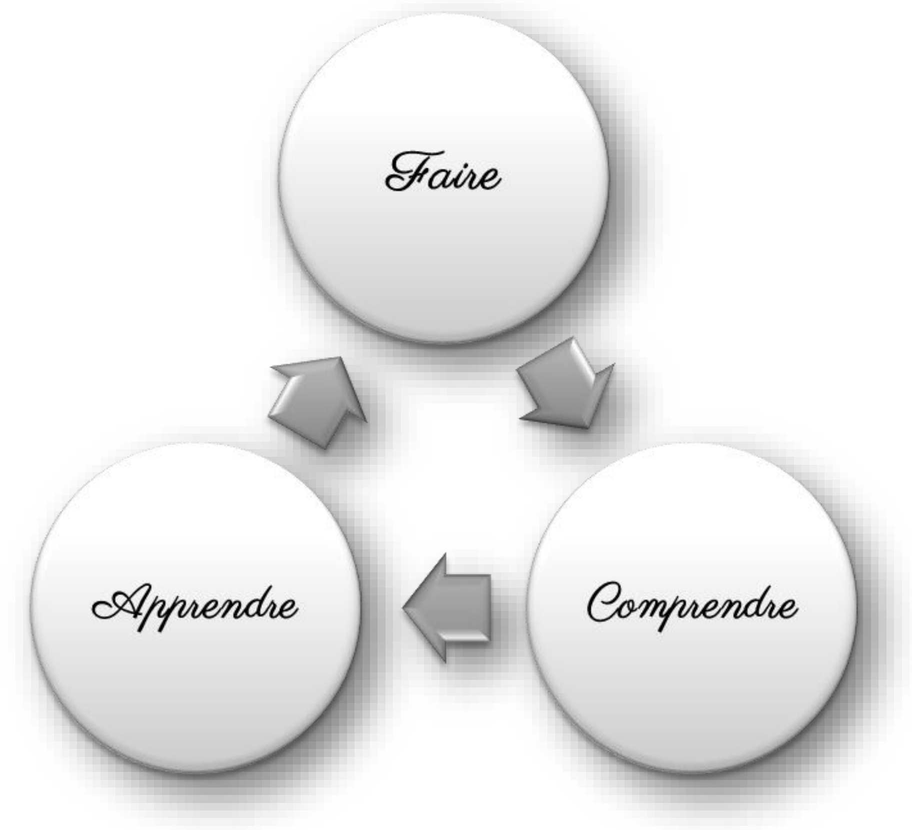


Table des matières

Terminale ➡ Préparation au BAC
Spécialité Mathématiques
Enoncé des exercices

Exercice 1. difficulté ★

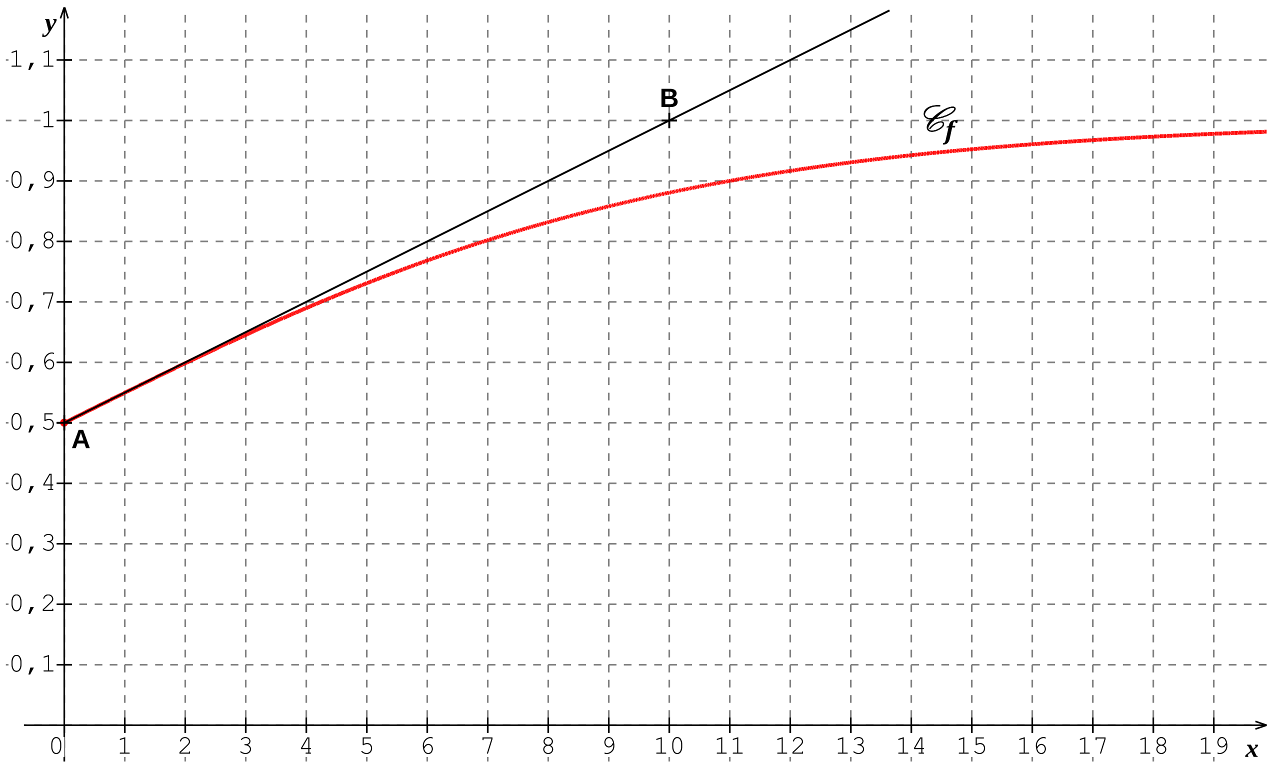
Partie A

Soit a et b des nombres réels. On considère une fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{a}{1 + e^{-bx}}.$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.

La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point $A(0; 0{,}5)$. La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A passe par le point $B(10; 1)$.



►1. Justifier que $a = 1$.
On obtient alors, pour tout réel $x \geq 0$,

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-bx}}.$$

►2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
Vérifier que, pour tout réel $x \geq 0$,

$$f'(x) = \frac{be^{-bx}}{(1 + e^{-bx})^2}.$$

►3. En utilisant les données de l'énoncé, déterminer b.

Partie B

La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction p définie sur $[0; +\infty[$ par

$$p(x) = \frac{1}{1 + e^{-0{,}2\,x}}.$$

Le réel x représente le temps écoulé, en année, depuis le 1er janvier 2020.
Le nombre $p(x)$ modélise la proportion d'individus équipés après x années.
Ainsi, pour ce modèle, $p(0)$ est la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2020 et, $p(3{,}5)$ est la proportion d'individus équipés au milieu de l'année 2023.

▶1. Quelle sera, pour ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2030 ? On en donnera une valeur arrondie au centième.
▶2. a. Déterminer le sens de variation de la fonction p sur $[0;+\infty[$.
b. Calculer la limite de la fonction p en $+\infty$.
c. Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.
▶3. On considère que, lorsque la proportion d'individus équipés dépasse 95 %, le marché est saturé. Déterminer, en expliquant la démarche, l'année au cours de laquelle cela se produira.
▶4. On définit la proportion moyenne d'individus équipés entre 2028 et 2030 par

$$m = \frac{1}{2}\int_8^{10} p(x)\,dx.$$

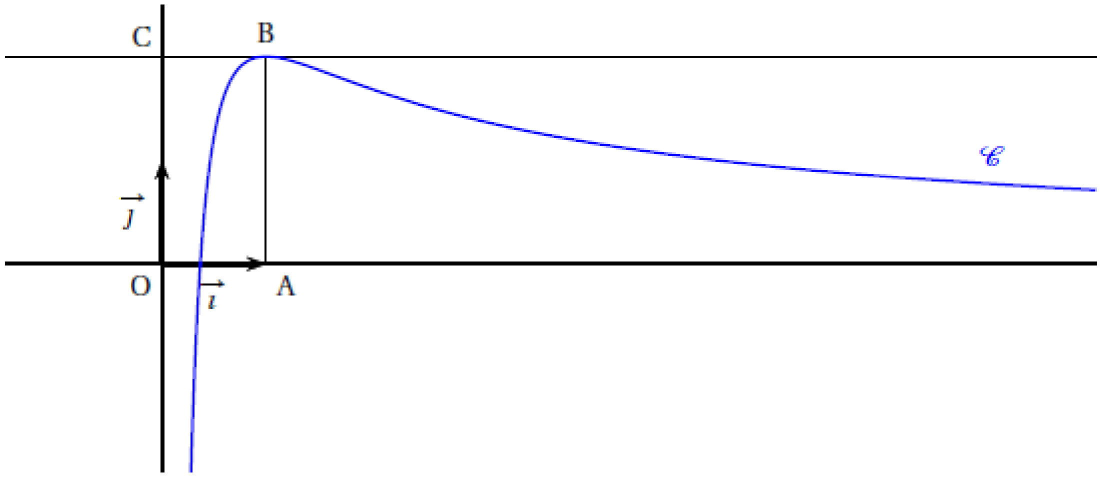
a. Vérifier que, pour tout réel $x \geq 0$,

$$p(x) = \frac{e^{0,2\,x}}{1+e^{0,2\,x}}$$

b. En déduire une primitive de la fonction p sur $[0;+\infty[$.
c. Déterminer la valeur exacte de m et son arrondi au centième.

Exercice 2. difficulté ★

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

- les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(1;0)$, $(1;2)$, $(0;2)$;
- la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathscr{C}$ en B ;
- il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x,

$$f(x) = \frac{a+b\ln(x)}{x}.$$

▶1. a) En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
b) Vérifier que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{(b-a)-b\ln(x)}{x^2}$.
c) En déduire les réels a et b.
▶2. a) Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln(x)$.
b) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \frac{2}{x} + 2\frac{\ln(x)}{x}$.
c) En déduire le tableau de variations de la fonction f.
▶3. a) Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0,1]$.
b) Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1;+\infty[$ tel que $f(\beta) = 1$. Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n+1$.
▶4. On donne les fonctions ci-dessous.

```
from math import log
```

```
def f(x):
    return (2+2*log(x))/x

def dicho(a,b,p):
    while b-a>p:
        m=(a+b)/2
        if f(m)<1:
            a=m
        else:
            b=m
    return (a,b)
```

a) Complétant le tableau ci-dessous avec toutes les étapes lorsque l'on exécute la fonction `dicho(0,1,0.1)` :

	étape 1	**étape 2**	**étape 3**	**étape 4**	**étape 5**
a	0				
b	1				
b-a					
m					

b) Quelle fonction doit-on exécuter pour obtenir les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-2}.

▶5. Le but de cette question est de démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ partage le rectangle $OABC$ en deux domaines d'aires égales.

a) Justifier que cela revient à démontrer que $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)dx = 1$.

b) En remarquant que l'expression de $f(x)$ peut s'écrire $\frac{2}{x} + 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x)$, terminer la démonstration.

Exercice 3. difficulté ★★

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A :

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = e^{-x}$.

▶1. Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $u(x) = x\, e^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).

▶2. On considère l'équation différentielle (E') : $y' + y = 0$. Résoudre l'équation différentielle (E').

▶3. Soit v une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction v est une solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $v - u$ est solution de l'équation différentielle (E').

▶4. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

▶5. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

Partie B :

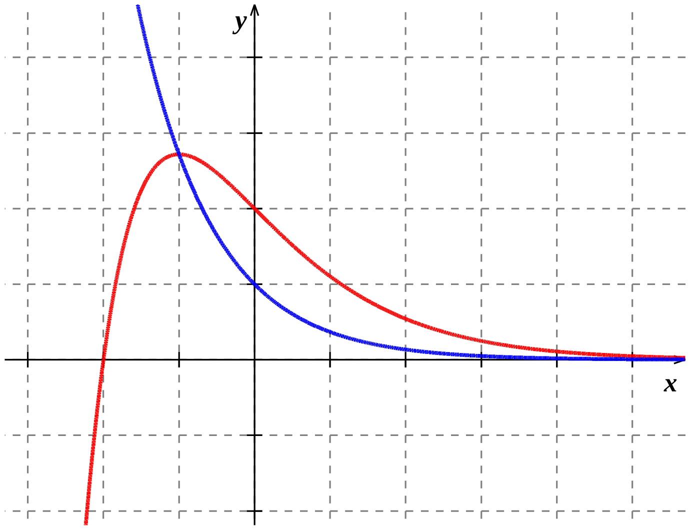
On considère la fonction f_k définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $f_k(x) = (x + k)e^{-x}$ où k est un nombre réel donné.

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthogonal.

▶1. Montrer que la fonction f_k admet un maximum en $x = 1 - k$.

▶2. On note M_k le point de la courbe $\mathscr{C}_k$ d'abscisse $1 - k$. Montrer que le point M_k appartient à la courbe Γ d'équation $y = e^{-x}$.

▶3. Sur le graphique, le repère est orthogonal mais l'unité sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées ainsi que les noms des courbes n'apparaissent pas.



Sur ce graphique, on a tracé deux courbes :

- la courbe Γ d'équation $y = e^{-x}$;
- la courbe $\mathscr{C}_k$ d'équation $y = (x + k)e^{-x}$ pour un certain nombre réel k donné.

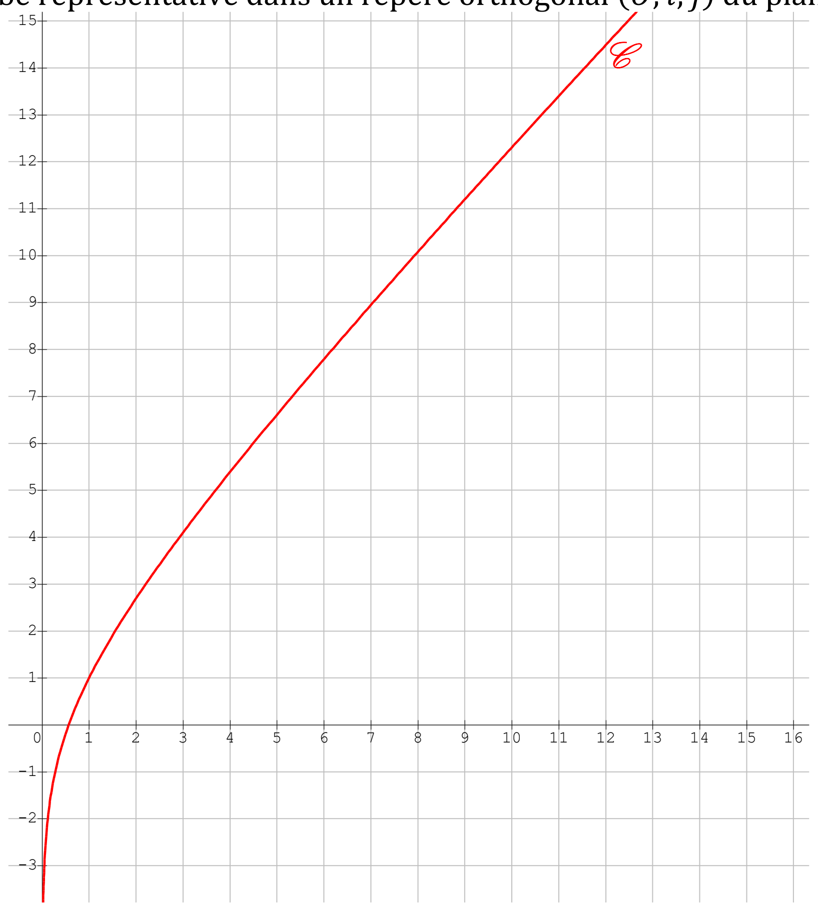
a) Identifier les courbes et les nommer sur le graphique.
b) En expliquant la démarche utilisée, déterminer la valeur du nombre réel k correspondante ainsi que l'unité graphique sur chacun des axes.

▶ 4. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_0^2 (x + 2)e^{-x}dx$.

Donner une interprétation graphique de cette intégrale.

Exercice 4. difficulté ★★

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + \ln(x)$.
On nomme $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ du plan.



▶ 1. a) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.
b) Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

▶ 2. a) Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 1.

b) Etudier les variations de la fonction h définie, sur $]0;+\infty[$, par $h(x) = \ln(x) - x + 1$.
En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ est en-dessous de la tangente Δ.
c) Tracer Δ sur le graphique.

▶3. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans $]0;+\infty[$.
On note α_n cette solution. On a donc, pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{\alpha_n + \ln(\alpha_n) = n}$.
b) Prouver que $\alpha_1 = 1$.
c) Placer les nombres α_0, α_1, α_2, α_3, α_4 et α_5 sur l'axe de abscisses en laissant apparents les traits de construction.

▶4. *a*) Démontrer que la suite (α_n) est strictement croissante.
b) En utilisant le résultat de la question 2b), démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $\dfrac{n+1}{2} \leq \alpha_n$.
c) En déduire la limite de la suite (α_n).

Exercice 5. difficulté ★★★

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

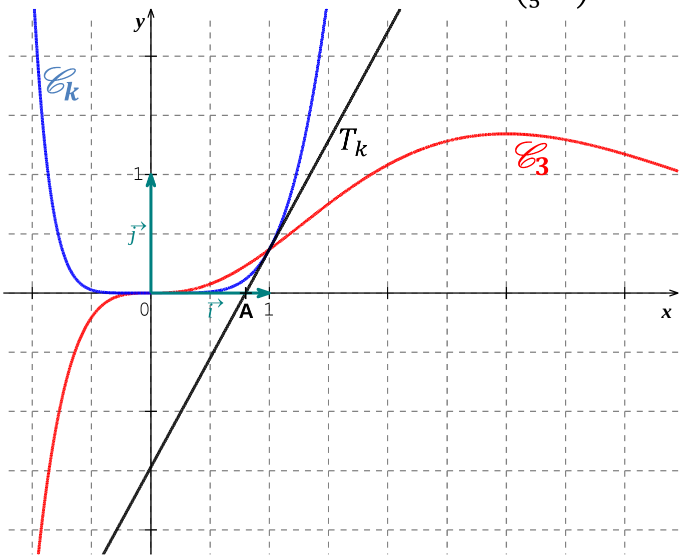
$$f_n(x) = x^n e^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ du plan.

PARTIE A :

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté une courbe $\mathscr{C}_k$ où k est un entier naturel non nul, sa tangente T_k au point d'abscisse 1 et la courbe $\mathscr{C}_3$.

La droite T_k coupe l'axe des abscisses au point A de coordonnées $\left(\frac{4}{5}, 0\right)$



▶1 a) Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$.
b) Étudier les variations de la fonction f_1 et dresser le tableau de variations de f_1.
c) À l'aide du graphique, justifier que k est un entier supérieur ou égal à 2.

▶2 a) Démontrer que pour $n > 1$, toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par le point O et un autre point dont on donnera les coordonnées.
b) Vérifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, et pour tout réel x,

$$f'_n(x) = x^{n-1}(n-x)e^{-x}.$$

▶3. Sur le graphique, la fonction f_3 semble admettre un maximum atteint pour $x = 3$. Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

▶4 a) Démontrer que la droite T_k coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\frac{k-2}{k-1}, 0\right)$.
b) En déduire, à l'aide des données de l'énoncé, la valeur de l'entier k.

PARTIE B

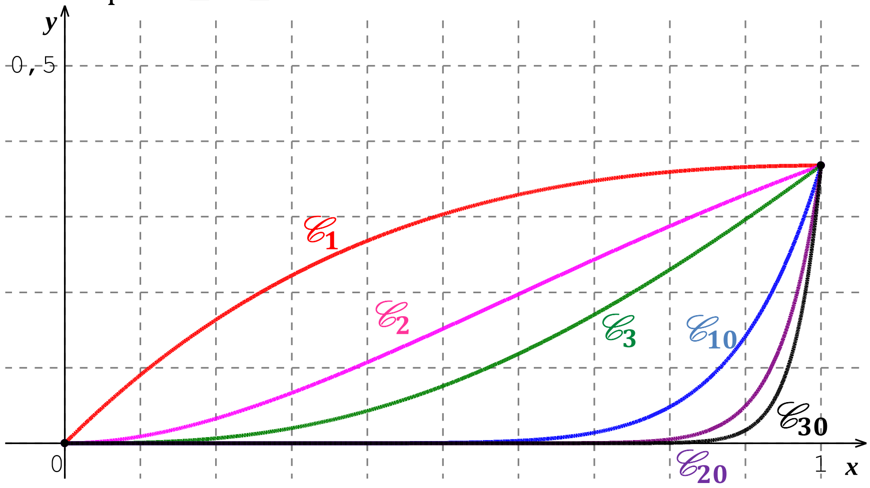
On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx.$$

▶1. Calculer I_1.

▶2. *Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les portions des courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$, $\mathscr{C}_{10}$, $\mathscr{C}_{20}$ et $\mathscr{C}_{30}$ comprises dans la bande définie par $0 \leq x \leq 1$.



a) Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en décrivant sa démarche.

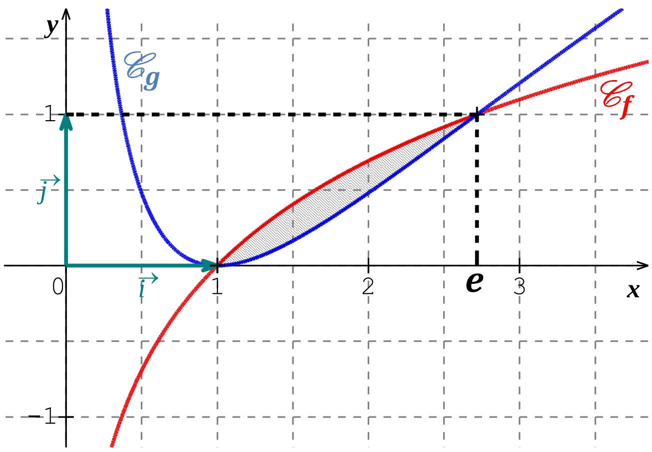
b) Démontrer cette conjecture.

c) En déduire que la suite (I_n) est convergente.

d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 6. difficulté ★★★

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ données ci-dessous représentent respectivement, dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = (\ln(x))^2$.



▶1. On cherche à déterminer l'aire $\mathcal{A}$ (en unités d'aire) de la partie du plan hachurée.

On note $I = \displaystyle\int_1^e \ln(x)\, dx$ et $J = \displaystyle\int_1^e (\ln(x))^2 dx$

a) Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $F(x) = x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien. En déduire I.

Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $J = e - 2I$.

b) En déduire J.

c) Donner la valeur de $\mathcal{A}$.

▶2. *Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.*

Pour x appartenant à l'intervalle $[1; e]$, on note M le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x et N le point de la courbe $\mathscr{C}_g$ de même abscisse. Pour quelle valeur de x la distance MN est maximale ? Calculer la valeur maximale de MN.

Terminale ⇨ Préparation au BAC

Spécialité Mathématiques

Correction des exercices

Correction de l'exercice 1.

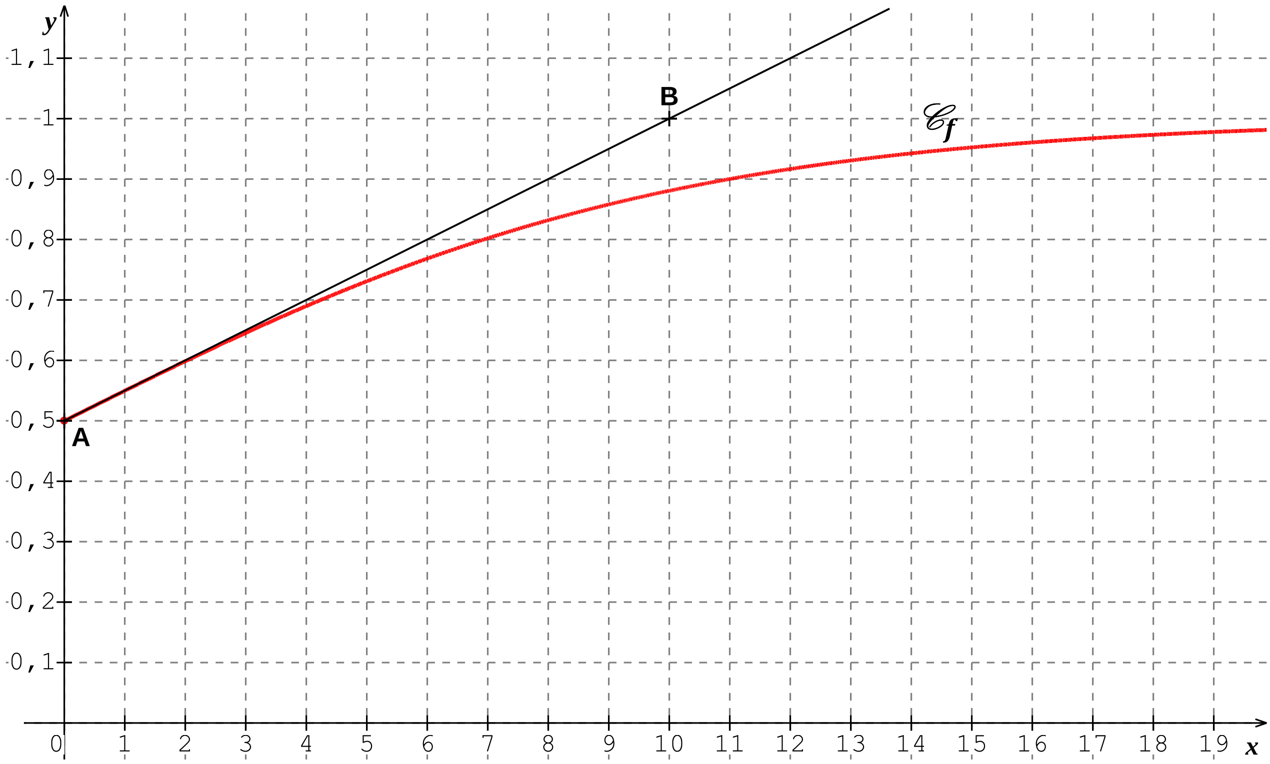
Partie A

Soit a et b des nombres réels. On considère une fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{a}{1+e^{-bx}}.$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.

La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point $A(0;0{,}5)$. La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A passe par le point $B(10;1)$.



▶ 1. Justifier que $a=1$.
On obtient alors, pour tout réel $x\geq 0$,

$$f(x)=\frac{1}{1+e^{-bx}}.$$

▶ 2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
Vérifier que, pour tout réel $x\geq 0$,

$$f'(x)=\frac{be^{-bx}}{(1+e^{-bx})^2}.$$

▶ 3. En utilisant les données de l'énoncé, déterminer b.

Partie B

La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction p définie sur $[0;+\infty[$ par

$$p(x)=\frac{1}{1+e^{-0{,}2\,x}}.$$

Le réel x représente le temps écoulé, en année, depuis le 1er janvier 2020.
Le nombre $p(x)$ modélise la proportion d'individus équipés après x années.
Ainsi, pour ce modèle, $p(0)$ est la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2020 et, $p(3{,}5)$ est

la proportion d’individus équipés au milieu de l’année 2023.

▶1. Quelle sera, pour ce modèle, la proportion d’individus équipés au 1er janvier 2030 ? On en donnera une valeur arrondie au centième.

▶2. a. Déterminer le sens de variation de la fonction p sur $[0;+\infty[$.

b. Calculer la limite de la fonction p en $+\infty$.

c. Interpréter cette limite dans le contexte de l’exercice.

▶3. On considère que, lorsque la proportion d’individus équipés dépasse 95 %, le marché est saturé. Déterminer, en expliquant la démarche, l’année au cours de laquelle cela se produira.

▶4. On définit la proportion moyenne d’individus équipés entre 2028 et 2030 par

$$m=\frac{1}{2}\int_8^{10} p(x)\,dx.$$

a. Vérifier que, pour tout réel $x \geq 0$,

$$p(x)=\frac{e^{0,2\,x}}{1+e^{0,2\,x}}$$

b. En déduire une primitive de la fonction p sur $[0;+\infty[$.

c. Déterminer la valeur exacte de m et son arrondi au centième.

Exercice 1.	**A1.**	La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point $A(0;0,5)$ $\text{donc } f(0)=0,5=\dfrac{a}{1+e^0}$ $\Leftrightarrow 0,5=\dfrac{a}{2}$ $\Leftrightarrow a=0,5\times 2=1$
	A2.	$\forall x\geq 0,\ \ f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-bx}}$ $f'(x)=\dfrac{0\times(1+e^{-bx})-1\times(-be^{-bx})}{(1+e^{-bx})^2}$ $f'(x)=\dfrac{be^{-bx}}{(1+e^{-bx})^2}$
	A3.	La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(0;0,5)$ passe par le point $B(10;1)$. Le coefficient directeur de la tangente en 0 vaut : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1-0,5}{10-0}=\dfrac{0,5}{10}=0,05$ $\text{donc } f'(0)=0,05=\dfrac{be^0}{(1+e^0)^2}$ $\Leftrightarrow 0,05=\dfrac{b}{2^2}=\dfrac{b}{4}$ $\Leftrightarrow b=0,05\times 4=0,2$
	B1.	$p(10)=\dfrac{1}{1+e^{-0,2\times 10}}=\dfrac{1}{1+e^{-2}}\approx 0,88$ En 2030, la proportion d’individus équipés sera de 88%.
	B2a.	La fonction p est dérivable sur $[0;+\infty[$ $\forall x\geq 0,\ \ p(x)=\dfrac{1}{1+e^{-0,2\,x}}$ $p'(x)=\dfrac{-(-0,2)e^{-0,2x}}{(1+e^{-0,2x})^2}=\dfrac{0,2\,e^{-0,2x}}{(1+e^{-0,2x})^2}>0\ \text{ car }\ e^{-0,2x}>0$ On en déduit que la fonction p est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
	B2b.	$\lim\limits_{x\to+\infty} -0,2\,x=-\infty\ \text{ donc }\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-0,2\,x}=0$ On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x)=1$

<table>
<tr><td></td><td>B2c.</td><td>Au fur et à mesure que les années vont passer, la proportion d'individus équipés tendra vers 100%.</td></tr>
<tr><td></td><td>B3.</td><td>

$$p(x) \geq 0{,}95$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+e^{-0{,}2\,x}} \geq 0{,}95$$
$$\Leftrightarrow 1+e^{-0{,}2\,x} \leq \frac{1}{0{,}95}$$

car la fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$

$$\Leftrightarrow e^{-0{,}2\,x} \leq \frac{1}{0{,}95} - 1$$
$$\Leftrightarrow e^{-0{,}2\,x} \leq \frac{1-0{,}95}{0{,}95}$$
$$\Leftrightarrow e^{-0{,}2\,x} \leq \frac{0{,}05}{0{,}95}$$
$$\Leftrightarrow e^{-0{,}2\,x} \leq \frac{1}{19}$$
$$\Leftrightarrow -0{,}2\,x \leq \ln\left(\frac{1}{19}\right)$$

car la fonction logarithme est croissante sur $]0;+\infty[$

$$\Leftrightarrow -0{,}2\,x \leq -\ln(19)$$
$$\Leftrightarrow \ x \geq \frac{-\ln(19)}{-0{,}2}$$
$$\Leftrightarrow \ x \geq \frac{\ln(19)}{0{,}2}$$
$$\Leftrightarrow \ x \geq 14{,}7$$

Le marché sera saturé au cours de l'année 2034.</td></tr>
<tr><td></td><td>B4a.</td><td>

$\forall x \geq 0,\ \ p(x) = \dfrac{1}{1+e^{-0{,}2\,x}}$

$$p(x) = \frac{1 \times e^{0{,}2\,x}}{(1+e^{-0{,}2\,x}) \times e^{0{,}2\,x}}$$
$$p(x) = \frac{1 \times e^{0{,}2\,x}}{1 \times e^{0{,}2\,x} + e^{-0{,}2\,x} \times e^{0{,}2\,x}}$$
$$p(x) = \frac{e^{0{,}2\,x}}{e^{0{,}2\,x}+1}$$
</td></tr>
<tr><td></td><td>B4b.</td><td>

$\forall x \geq 0,\ \ p(x) = \dfrac{e^{0{,}2\,x}}{e^{0{,}2\,x}+1} = \dfrac{0{,}2\,e^{0{,}2\,x}}{e^{0{,}2\,x}+1} \times \dfrac{1}{0{,}2} = \dfrac{0{,}2\,e^{0{,}2\,x}}{e^{0{,}2\,x}+1} \times 5$

Une primitive de la fonction p sur $[0;+\infty[$ est donc

$$P(x) = 5 \times \ln(e^{0{,}2\,x}+1)$$
</td></tr>
<tr><td></td><td>B4c.</td><td>

$m = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_8^{10} p(x)\,dx$

$m = \dfrac{1}{2}\left[5\ \ln(e^{0{,}2\,x}+1)\right]_8^{10}$

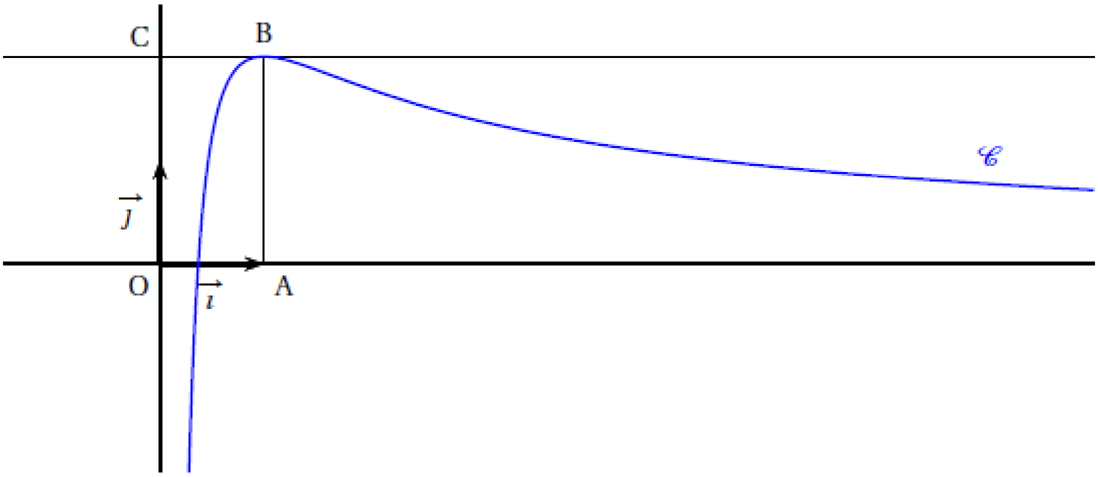
$m = \dfrac{5}{2}\left(\ln(e^{0{,}2\times 10}+1) - \ln(e^{0{,}2\times 8}+1)\right)$

$m = \dfrac{5}{2}\left(\ln(e^{2}+1) - \ln(e^{1{,}6}+1)\right)$

$m = \dfrac{5}{2}\ \ln\left(\dfrac{e^2+1}{e^{1{,}6}+1}\right) \approx 0{,}86$
</td></tr>
</table>

Correction de l'exercice 2.

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

- les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(1;0)$, $(1;2)$, $(0;2)$;
- la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathscr{C}$ en B ;
- il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x,

$$f(x)=\frac{a+b\ln(x)}{x}.$$

▶1. a) En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

b) Vérifier que pour tout réel strictement positif x, $f'(x)=\dfrac{(b-a)-b\ln(x)}{x^2}$.

c) En déduire les réels a et b.

▶2. a) Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln(x)$.

b) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif, $f(x)=\frac{2}{x}+2\frac{\ln(x)}{x}$.

c) En déduire le tableau de variations de la fonction f.

▶3. a) Démontrer que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0,1]$.

b) Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1;+\infty[$ tel que $f(\beta)=1$. Déterminer l'entier n tel que $n<\beta<n+1$.

▶4. On donne les fonctions ci-dessous.

```
from math import log

def f(x):
    return (2+2*log(x))/x

def dicho(a,b,p):
    while b-a>p:
        m=(a+b)/2
        if f(m)<1:
            a=m
        else:
            b=m
    return (a,b)
```

a) Complétant le tableau ci-dessous avec toutes les étapes lorsque l'on exécute la fonction `dicho(0,1,0.1)` :

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0				
b	1				
b-a					
m					

b) Quelle fonction doit-on exécuter pour obtenir les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-2}.

▶5. Le but de cette question est de démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ partage le rectangle $OABC$ en deux domaines d'aires égales.

a) Justifier que cela revient à démontrer que $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)dx = 1$.

b) En remarquant que l'expression de $f(x)$ peut s'écrire $\frac{2}{x} + 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x)$, terminer la démonstration.

Exercice 2.	**1a.**	La courbe passe par le point $B(1;2)$ donc $f(1) = 2$. La tangente en B passe par $B(1;2)$ et $C(0;2)$, le coefficient directeur est donc 0. J'en déduis que $f'(1) = 0$.
	1b.	La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ $$\forall x \in]0;+\infty[, \qquad f(x) = \frac{a + b\ln(x)}{x}$$ $f'(x) = \dfrac{\left(0 + b \times \frac{1}{x}\right)x - (a + b\ln(x)) \times 1}{x^2}$ $f'(x) = \dfrac{b - a - b\ln(x)}{x^2}$
	1c.	$f(1) = 2 = \dfrac{a + b\ln(1)}{1} = a$ $f'(1) = 0 = \dfrac{b - a - b\ln(1)}{1^2} = b - a$ $\Leftrightarrow b = a = 2$
	2a.	$\forall x \in]0;+\infty[, \qquad f'(x) = \dfrac{2 - 2 - 2\ln(x)}{x^2} = \dfrac{-2\ln(x)}{x^2}$ $$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -\ln(x) > 0 \text{ car } 2 \text{ et } x^2 > 0$$ $f'(x)$ a donc le même signe que $-\ln(x)$
	2b.	$\forall x \in]0;+\infty[, \qquad f(x) = \dfrac{2 + 2\ln(x)}{x}$ $\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x \to 0^+} 2 + 2\ln(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0^+\end{array}\right\}$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ $\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x \to +\infty} 2 + 2\ln(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty\end{array}\right\}$ FI par quotient $\forall x \in]0;+\infty[, \qquad f(x) = \dfrac{2 + 2\ln(x)}{x} = \dfrac{2}{x} + 2\dfrac{\ln(x)}{x}$ $\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 2\dfrac{\ln(x)}{x} = 0\end{array}\right\}$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

2c.

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -\ln(x) > 0$$
$$\Leftrightarrow \ln(x) < 0$$
$$\Leftrightarrow x < e^0$$
$$\Leftrightarrow x < 1$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

3a.

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty < 1$

$f(1) = 2 > 1$

Sur $]0,1]$, la fonction f est continue car dérivable et, elle y est strictement croissante.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution que l'on note $\alpha \in]0,1]$.

3b.

$f(1) = 2 > 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 < 1$

Sur $]1; +\infty[$, la fonction f est continue car dérivable et, elle y est strictement décroissante.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution que l'on note $\beta \in]1; +\infty[$.

$$f(5) = \frac{2 + 2\ln(5)}{5} \approx 1{,}04 > 1 \quad \text{et} \quad f(6) = \frac{2 + 2\ln(6)}{6} \approx 0{,}93 < 1$$

$$\text{donc } 5 < \beta < 6$$

4a.

	étape 1	**étape 2**	**étape 3**	**étape 4**	**étape 5**
`a`	**0**	**0**	**0.25**	**0.375**	**0.4375**
`b`	**1**	**0.5**	**0.5**	**0.5**	**0.5**
`b-a`	**1**	**0.5**	**0.25**	**0.125**	**0.0625**
`m`	**0.5**	**0.25**	**0.375**	**0.4375**	

4b.

Pour obtenir les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-2}, il faut exécuter la fonction `dicho(5,6,0.01)`.

5a.

L'aire du rectangle $OABC$ a pour aire 2.
La courbe $\mathscr{C}$ a pour intersection avec l'axe des absicsses :

$$f(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{2 + 2\ln(x)}{x} = 0$$
$$\Leftrightarrow 2 + 2\ln(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\ln(x) = -2$$
$$\Leftrightarrow \ln(x) = \frac{-2}{2}$$
$$\Leftrightarrow \ln(x) = -1$$
$$\Leftrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

La courbe $\mathscr{C}$ partage donc le rectangle $OABC$ en deux domaines d'aires égales lorsque

$$\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)dx = 1$$

	5b.	$\forall x \in]0;+\infty[, \quad f(x)=\dfrac{2+2\ln(x)}{x}=\dfrac{2}{x}+2\times\dfrac{1}{x}\times\ln(x)$ $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)dx=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(\frac{2}{x}+\underbrace{2\times\frac{1}{x}\times\ln(x)}_{2\times u'\times u}\right)dx$ $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)dx=[2\ln(x)+(\ln(x))^2\,]_{\frac{1}{e}}^{1}$ $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)dx=2\ln(1)+(\ln(1))^2-\left(2\ \ln\left(\frac{1}{e}\right)+\left(\ln\left(\frac{1}{e}\right)\right)^2\right)$ $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)dx=0-(-2\ln(e)+(-\ln(e))^2)$ $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)dx=0-(-2+(-1)^2)$ $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)dx=-(-2+1)$ $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)dx=1$

Correction de l'exercice 3.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A :

On considère l'équation différentielle (E) : $y'+y=e^{-x}$.

▶1. Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $u(x)=x\,e^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).

▶2. On considère l'équation différentielle (E') : $y'+y=0$. Résoudre l'équation différentielle (E').

▶3. Soit v une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction v est une solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $v-u$ est solution de l'équation différentielle (E').

▶4. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

▶5. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0)=2$.

Partie B :

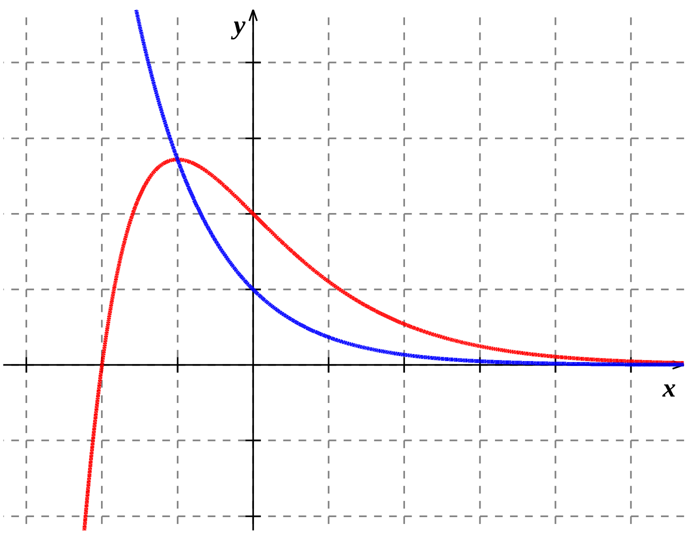
On considère la fonction f_k définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $f_k(x)=(x+k)e^{-x}$ où k est un nombre réel donné.

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthogonal.

▶1. Montrer que la fonction f_k admet un maximum en $x=1-k$.

▶2. On note M_k le point de la courbe $\mathscr{C}_k$ d'abscisse $1-k$. Montrer que le point M_k appartient à la courbe Γ d'équation $y=e^{-x}$.

▶3. Sur le graphique, le repère est orthogonal mais l'unité sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées ainsi que les noms des courbes n'apparaissent pas.



Sur ce graphique, on a tracé deux courbes :

- la courbe Γ d'équation $y=e^{-x}$;
- la courbe $\mathscr{C}_k$ d'équation $y=(x+k)e^{-x}$ pour un certain nombre réel k donné.

a) Identifier les courbes et les nommer sur le graphique.

b) En expliquant la démarche utilisée, déterminer la valeur du nombre réel k correspondante ainsi que l'unité graphique sur chacun des axes.

▶4. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^2 (x+2)e^{-x}dx$.

Donner une interprétation graphique de cette intégrale.

Exercice 3.	**A1.**	$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(x) = x\,e^{-x}$ La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) = 1 \times e^{-x} + x(-e^{-x})$ $u'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$ $u'(x) = (1-x)e^{-x}$ $u' + u = u'(x) + u(x) = (1-x)e^{-x} + x\,e^{-x}$ $u' + u = (1-x+x)e^{-x}$ $u' + u = e^{-x}$ La fonction u est donc solution de l'équation différentielle $(E)\ \ y' + y = e^{-x}$
	A2.	$(E')\ \ y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -y$ Les solutions de (E') sont de la forme $y(x) = k\,e^{-x}$ où $k \in \mathbb{R}$.
	A3.	**Démontrons la condition nécessaire :** On suppose que la fonction v est solution de l'équation différentielle (E) $(v-u)' + (v-u) = v' - u' + v - u$ $(v-u)' + (v-u) = v' + v - (u' + u)$ $(v-u)' + (v-u) = e^{-x} - e^{-x}$ car u et v sont solutions de (E) $(v-u)' + (v-u) = 0$ donc $v - u$ est solution de l'équation différentielle (E') **Démontrons la condition suffisante :** On suppose que la fonction $v - u$ est solution de l'équation différentielle (E') $v' + v = v' - u' + u' + v - u + u$ $v' + v = (v-u)' + (v-u) + u' + u$ $v' + v = 0 + e^{-x}$ $v' + v = e^{-x}$ donc v est solution de l'équation différentielle (E)
	A4.	Les solutions de l'équation différentielle (E) sont donc les fonctions v telles que $(v-u)(x) = k\,e^{-x}$ où $k \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow v(x) = k\,e^{-x} + u(x)$ $v(x) = k\,e^{-x} + x\,e^{-x}$ $v(x) = (k+x)e^{-x}$
	A5.	g est une solution de (E) donc $g(x) = (k+x)e^{-x}$ or $g(0) = 2$ donc $g(0) = 2 = (k+0)e^0 = k$, par conséquent $g(x) = (2+x)e^{-x}$

B1.

La fonction $f_k(x) = (x + k\,)e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'_k(x) = 1 \times e^{-x} + (x + k\,)(-e^{-x})$

$$f'_k(x) = e^{-x} - (x + k\,)e^{-x}$$
$$f'_k(x) = (1 - x - k\,)e^{-x}$$
$$f'_k(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x - k > 0 \text{ car } e^{-x} > 0$$
$$\Leftrightarrow 1 - k > x$$

x	$-\infty$	$1-k$	$+\infty$
$f'_k(x)$	$+$	0	$-$
$f_k(x)$	$\nearrow$	$f_k(1-k)$	$\searrow$

La fonction f_k admet donc un maximum pour $x = 1 - k$

B2.

$M_k \in \mathscr{C}_k$ et M_k d'abscisse $1 - k$
Son ordonnée vaut $f_k(1 - k) = (1 - k + k\,)e^{-(1-k)} = e^{-(1-k)}$
donc $M_k\left(1 - k; e^{-(1-k)}\right)$, le point M_k appartient donc à la courbe Γ: $y = e^{-x}$.

B3a.

$e^{-x} > 0$ pour tout x donc la courbe Γ est celle qui est toujours positive (courbe bleue).
f_k possède un maximum pour $x = 1 - k$ donc $\mathscr{C}_k$ est la courbe qui possède un maximum (courbe rouge).

B3b.

$e^{-0} = 1$ donc la courbe Γ passe par le point de coordonnées $(0; 1)$, on peut donc placer l'unité sur l'axe des ordonnées à la première graduation.

On en déduit que $f_k(0) = 2$ donc $2 = (0 + k\,)e^{-0} = k$
et donc la courbe correspond à $f_2(x) = (x + 2\,)e^{-x}$

Le maximum de la courbe $\mathscr{C}_2$ est atteint pour $x = 1 - k = 1 - 2 = -1$ et à la première graduation à gauche sur le graphique.
On peut donc placer l'unité sur l'axe des abscisses.

B4.

$\displaystyle\int_0^2 (x + 2\,)e^{-x}\,dx$, en intégrant par parties avec

$$u' = e^{-x} \qquad u = -e^{-x}$$
$$v = x + 2 \qquad v' = 1$$

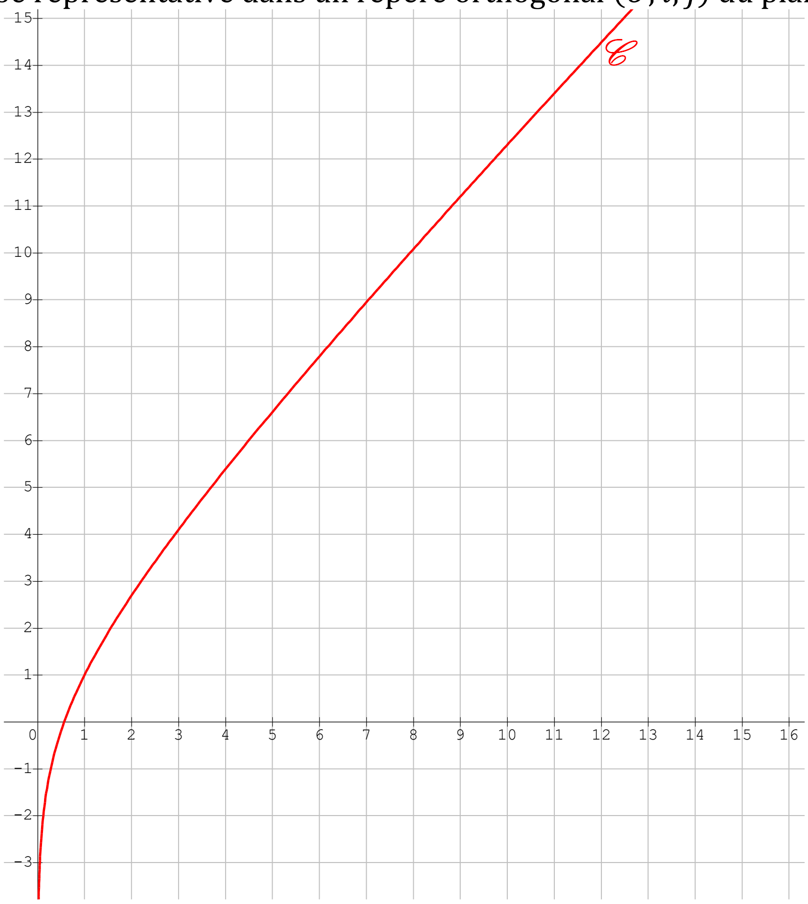
$$\int_0^2 (x + 2\,)e^{-x}\,dx = [-(x + 2)e^{-x}]_0^2 - \int_0^1 (-e^{-x})dx$$

$$\int_0^2 (x + 2\,)e^{-x}\,dx = -4e^{-2} + 2e^0 - [e^{-x}]_0^2$$
$$\int_0^2 (x + 2\,)e^{-x}\,dx = -4e^{-2} + 2 - (e^{-2} - e^{-0})$$
$$\int_0^2 (x + 2\,)e^{-x}\,dx = -4e^{-2} + 2 - e^{-2} + 1$$
$$\int_0^2 (x + 2\,)e^{-x}\,dx = 3 - 5e^{-2}$$

La fonction f_2 est positive sur $[0; 2]$, donc $\int_0^2 f_2(x\,)\,dx$ représente l'aire délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_2$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

Correction de l'exercice 4.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=x+\ln(x)$.
On nomme $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ du plan.



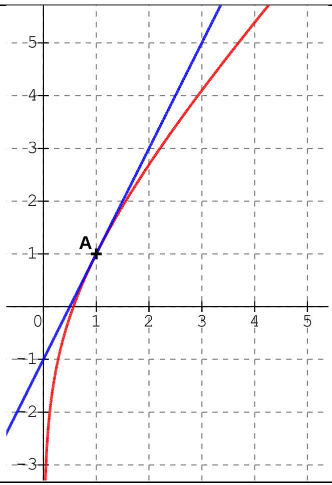
▶1. a) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.
b) Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

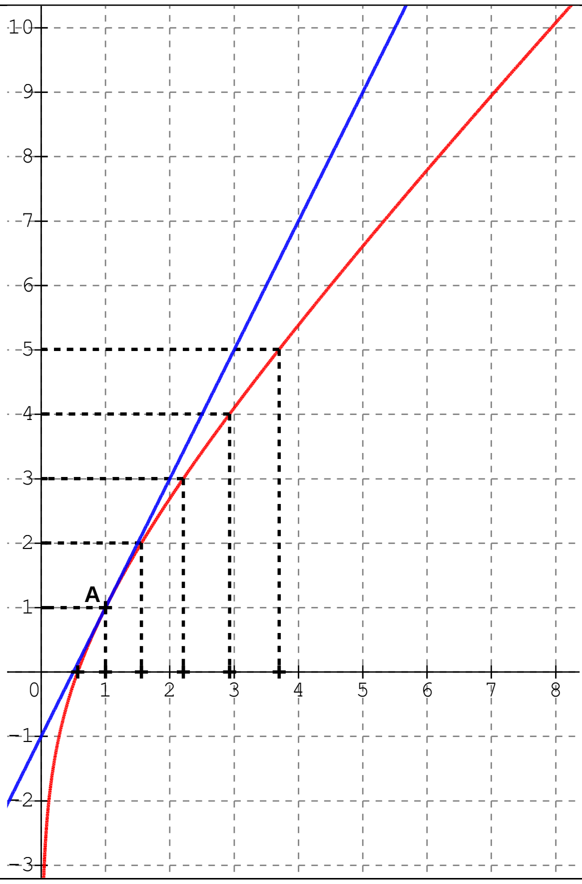
▶2. a) Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 1.
b) Etudier les variations de la fonction h définie, sur $]0;+\infty[$, par $h(x)=\ln(x)-x+1$.
En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ est en-dessous de la tangente Δ.
c) Tracer Δ sur le graphique.

▶3. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, l'équation $f(x)=n$ admet une unique solution dans $]0;+\infty[$.
On note α_n cette solution. On a donc, pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{\alpha_n+\ln(\alpha_n)=n}$.
b) Prouver que $\alpha_1=1$.
c) Placer les nombres α_0, α_1, α_2, α_3, α_4 et α_5 sur l'axe de abscisses en laissant apparents les traits de construction.

▶4. *a*) Démontrer que la suite (α_n) est strictement croissante.
b) En utilisant le résultat de la question 2b), démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $\dfrac{n+1}{2}\leq\alpha_n$.
c) En déduire la limite de la suite (α_n).

Exercice 4.	**1a.**	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} x=0\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty\end{array}\right\}$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\ln(x)=+\infty\end{array}\right\}$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

	1b.	f est dérivable sur $]0;+\infty[$ $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$ car $x > 0$ On en déduit que f est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
	2a.	$f(1) = 1 + \ln(1) = 1$ et $f'(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$ La tangente Δ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est : $y = 2(x-1) + 1 = 2x - 2 + 1 = 2x - 1$
	2b.	h est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ $\forall x \in]0;+\infty[, h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$ $h'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x > 0$ car $x > 0$ $\Leftrightarrow 1 > x$ On en déduit que h est strictement croissante sur l'intervalle $]0;1[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $]1;+\infty[$. Or $h(1) = \ln 1 - 1 + 1 = 0$ donc $h(x)$ est négative sur $]0;+\infty[$ donc $\forall x \in]0;+\infty[$, $h(x) \leq 0 \Leftrightarrow \ln x - x + 1 \leq 0$ $\Leftrightarrow x + \ln x - 2x + 1 \leq 0$ $\Leftrightarrow f(x) - (2x-1) \leq 0$ $\Leftrightarrow f(x) \leq 2x - 1$ On en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ est en-dessous de la tangente Δ.
	2c.	
	3a.	Soit $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty < n$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty > n$ f est dérivable donc continue sur $]0;+\infty[$ donc l'équation $f(x) = n$ admet moins une solution. De plus, f est monotone sur $]0;+\infty[$ donc la solution est unique, on la note $\alpha_n \in]0;+\infty[$.
	3b.	$f(1) = 1 + \ln(1) = 1$ donc $\alpha_1 = 1$.

	3c.	
	4a.	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n < n+1 \Leftrightarrow f(\alpha_n) < f(\alpha_{n+1})$ car la fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ $\Leftrightarrow \alpha_n < \alpha_{n+1}$
	4b.	On a démontré que $\forall x \in]0;+\infty[,\quad f(x) \leq 2x-1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, f(\alpha_n) \leq 2\alpha_n - 1$ $\Leftrightarrow n \leq 2\alpha_n - 1$ $\Leftrightarrow \dfrac{n+1}{2} \leq \alpha_n$
	4c.	$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{2} = +\infty$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$

Correction de l'exercice 5.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

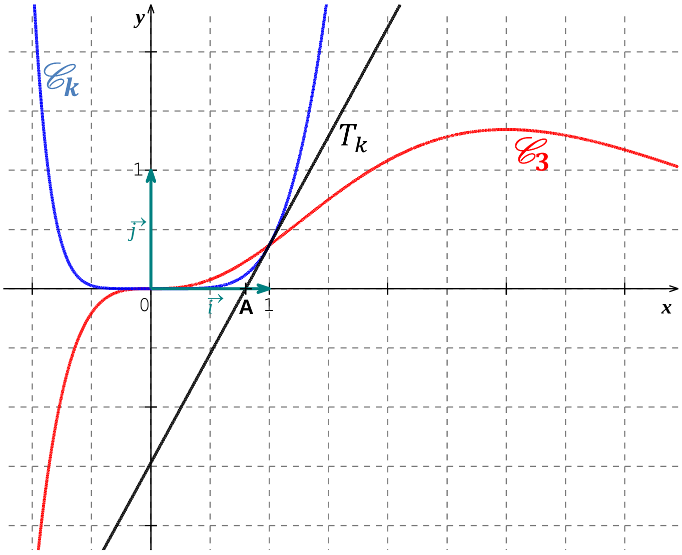
$$f_n(x) = x^n e^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ du plan.

PARTIE A :

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté une courbe $\mathscr{C}_k$ où k est un entier naturel non nul, sa tangente T_k au point d'abscisse 1 et la courbe $\mathscr{C}_3$.

La droite T_k coupe l'axe des abscisses au point A de coordonnées $\left(\frac{4}{5},0\right)$



▶1 a) Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$.
b) Étudier les variations de la fonction f_1 et dresser le tableau de variations de f_1.
c) À l'aide du graphique, justifier que k est un entier supérieur ou égal à 2.

▶2 a) Démontrer que pour $n > 1$, toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par le point O et un autre point dont on donnera les coordonnées.
b) Vérifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, et pour tout réel x,

$$f'_n(x) = x^{n-1}(n-x)e^{-x}.$$

▶3. Sur le graphique, la fonction f_3 semble admettre un maximum atteint pour $x = 3$. Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

▶4 a) Démontrer que la droite T_k coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\frac{k-2}{k-1}, 0\right)$.
b) En déduire, à l'aide des données de l'énoncé, la valeur de l'entier k.

PARTIE B

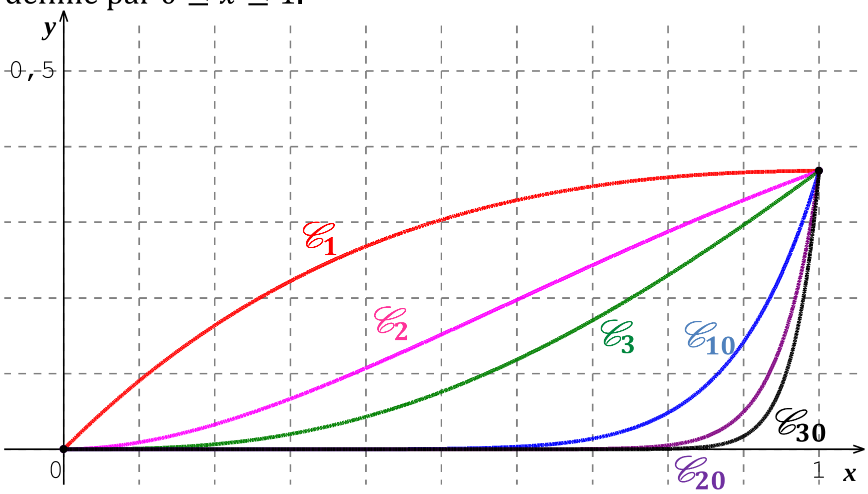
On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx.$$

▶1. Calculer I_1.

▶2. *Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les portions des courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$, $\mathscr{C}_{10}$, $\mathscr{C}_{20}$ et $\mathscr{C}_{30}$ comprises dans la bande définie par $0 \leq x \leq 1$.



a) Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en décrivant sa démarche.
b) Démontrer cette conjecture.
c) En déduire que la suite (I_n) est convergente

d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

<table>
<tr><td rowspan="6">Exercice 5.</td><td>A1a.</td><td>
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_1(x) = xe^{-x}$$
$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty\end{array}\right\}$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = -\infty$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0\end{array}\right\}$ FI par produit

$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_1(x) = xe^{-x} = \dfrac{x}{e^x}$
or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$
donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 0$
</td></tr>
<tr><td>A1b.</td><td>
La fonction $f_1(x) = xe^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'_1(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x})$
$$f'_1(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$$
$$f'_1(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x > 0 \text{ puisque } e^{-x} > 0$$
$$\Leftrightarrow 1 > x$$
$$\begin{array}{|c|ccccc|}\hline x & -\infty & & 1 & & +\infty \\ \hline f'_1(x) & & + & 0 & - & \\ \hline f_1(x) & & & \frac{1}{e} & & \\ & & \nearrow & & \searrow & \\ & -\infty & & & & 0 \\ \hline\end{array}$$
$$f_1(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$$
</td></tr>
<tr><td>A1c.</td><td>
k est un entier naturel non nul donc $k \geq 1$
D'après la question précédente, la courbe $\mathscr{C}_1$ doit être croissante sur $]-\infty; 1[$ ce qui n'est pas le cas de la courbe $\mathscr{C}_k$ représentée donc $k \geq 2$.
</td></tr>
<tr><td>A2a.</td><td>
Pour tout $n > 1$, $f_n(x) = x^n e^{-x}$ donc $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$
donc toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par le point $O(0; 0)$ et par le point de coordonnées $\left(1; \frac{1}{e}\right)$.
</td></tr>
<tr><td>A2b.</td><td>
Pour tout entier naturel $n \geq 2$, et pour tout réel x, $f_n(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = x^n e^{-x}$$
$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'_n(x) = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x}$
$f'_n(x) = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x}$
$f'_n(x) = x^{n-1}(n-x)e^{-x}$
</td></tr>
</table>

A3.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_3(x) = x^3 e^{-x}$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'_3(x) = x^2(3-x)e^{-x}$

$$f'_3(x) > 0$$
$$\Leftrightarrow x^2(3-x)e^{-x} > 0$$
$$\Leftrightarrow 3 - x > 0 \text{ car } e^{-x} > 0 \text{ et } x^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow 3 > x$$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'_3(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$f_3(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{27}{e^3}$	$\searrow$	0

$$f_3(3) = 27e^{-3} = \frac{27}{e^3}$$

donc la fonction f_3 admet un maximum atteint pour $x = 3$.

A4a.

La tangente T_k a pour coefficient directeur : $f'_k(1) = 1^{k-1}(k-1)e^{-1} = \frac{k-1}{e}$

et $f_k(1) = \frac{1}{e}$

L'équation de la tangente T_k est alors : $y = f'_k(1)(x-1) + f_k(1)$

$$y = \frac{k-1}{e}(x-1) + \frac{1}{e}$$

Cette droite coupe l'axe des abscisses en un point tel que $y = 0$ donc

$$\frac{k-1}{e}(x-1) + \frac{1}{e} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{k-1}{e}x - \frac{k-1}{e} + \frac{1}{e} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{k-1}{e}x = \frac{k-1}{e} - \frac{1}{e}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{k-2}{e} \times \frac{e}{k-1}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{k-2}{k-1}$$

La tangente T_k coupe donc l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\frac{k-2}{k-1}, 0\right)$

A4b.

La droite T_k coupe l'axe des abscisses au point A de coordonnées $\left(\frac{4}{5}, 0\right)$ donc

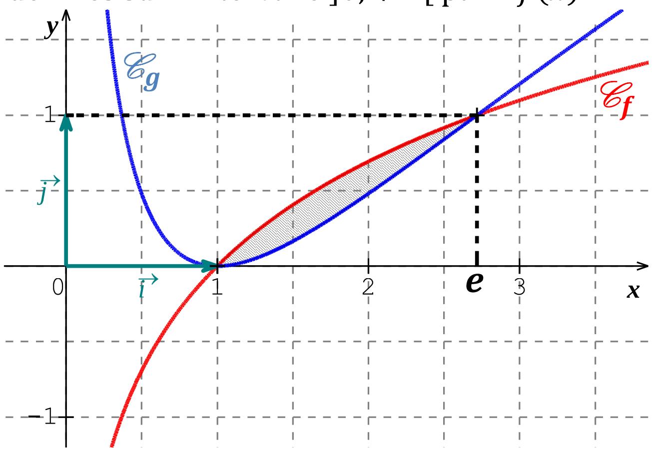
$$\frac{4}{5} = \frac{k-2}{k-1}$$
$$\Leftrightarrow 4(k-1) = 5(k-2)$$
$$\Leftrightarrow 4k - 4 = 5k - 10$$
$$\Leftrightarrow 10 - 4 = 5k - 4k$$
$$\Leftrightarrow k = 6$$

	B1.	$I_1 = \int_0^1 xe^{-x}dx$, en intégrant par parties avec $$\begin{array}{ll} u' = e^{-x} & u = -e^{-x} \\ v = x & v' = 1 \end{array}$$ $I_1 = [-xe^{-x}]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x})dx$ $I_1 = -1 \times e^{-1} + 0 - [e^{-x}]_0^1$ $I_1 = -e^{-1} - (e^{-1} - e^0)$ $I_1 = -e^{-1} - e^{-1} + 1$ $I_1 = 1 - 2e^{-1}$ $I_1 = 1 - \dfrac{2}{e}$
	B2a.	La suite (I_n) représente l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_n$ délimitée par l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 1$. On peut alors conjecturer que la suite (I_n) est décroissante.
	B2b.	Pour tout $n > 1$ et $x \in [0\,;1]$, $$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1}e^{-x} - x^n e^{-x} = (x-1)x^n e^{-x}$$ Pour tout $x \in [0\,;1]$, $0 \leq x \leq 1$ donc $x - 1 \leq 0$ de plus $x^n \geq 0$ et $e^{-x} > 0$ donc $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0$ par conséquent $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ pour tout $x \in [0\,;1]$ et donc $\int_0^1 f_{n+1}(x)dx \leq \int_0^1 f_n(x)dx$ soit $I_{n+1} \leq I_n$ pour tout $n > 1$ donc la suite (I_n) est décroissante.
	B2c.	Pour tout $n > 1$ et pour tout $x \in [0\,;1]$, $f_n(x) = x^n e^{-x}$, $$x^n \geq 0 \text{ et } e^{-x} > 0 \text{ donc } f_n(x) \geq 0$$ par conséquent $\int_0^1 f_n(x)dx \geq 0$, soit $I_n \geq 0$ pour tout $n > 1$ donc la suite (I_n) est minorée par 0 or elle est décroissante donc elle converge.

	B2d.	Pour tout $x \in [0\,;1]$ $$0 \leq x \leq 1$$ $$\Leftrightarrow 0 \geq -x \geq -1$$ $$\Leftrightarrow e^0 \geq e^{-x} \geq e^{-1}$$ car la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$ $$\Leftrightarrow 1 \geq e^{-x} \geq e^{-1}$$ $$\Leftrightarrow x^n \geq x^n e^{-x} \geq x^n e^{-1} \text{ car } x^n \geq 0$$ Pour tout $n > 1, \forall x \in [0\,;1],\ f_n(x) = x^n e^{-x} \leq x^n$ $$\text{par conséquent } \int_0^1 f_n(x)dx \leq \int_0^1 x^n dx$$ $$\text{soit } I_n \leq \int_0^1 x^n dx$$ $$I_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$ $$I_n \leq \frac{1}{n+1} - 0$$ en conclusion pour tout $n > 1$, $$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$ $$\text{or } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} I_n = 0$$

Correction de l'exercice 6.

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ données ci-dessous représentent respectivement, dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = (\ln(x))^2$.



▶ 1. On cherche à déterminer l'aire $\mathcal{A}$ (en unités d'aire) de la partie du plan hachurée.

On note $I = \displaystyle\int_1^e \ln(x)\,dx$ et $J = \displaystyle\int_1^e (\ln(x))^2 dx$

a) Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $F(x) = x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien. En déduire I.
Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $J = e - 2I$.

b) En déduire J.

c) Donner la valeur de $\mathcal{A}$.

▶ 2. *Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.*

Pour x appartenant à l'intervalle $[1;e]$, on note M le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x et N le point de la courbe $\mathscr{C}_g$ de même abscisse. Pour quelle valeur de x la distance MN est maximale ? Calculer la valeur maximale de MN.

<table>
<tr>
<td rowspan="4">Exercice 6.</td>
<td>1a.</td>
<td>La fonction F définie par $F(x) = x\ln(x) - x$ est dérivable sur $]0;+\infty[$
$\forall x \in\ ]0;+\infty[,\qquad F'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1$
$$F'(x) = \ln(x) + 1 - 1$$
$$F'(x) = \ln(x)$$
La fonction F est bien une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0;+\infty[$.
On en déduit que
$I = \displaystyle\int_1^e \ln(x)\,dx = [x\ln(x) - x]_1^e$
$I = e\ln(e) - e - (1 \times \ln(1) - 1)$
$I = e \times 1 - e - (0 - 1)$
$I = e - e + 1$
$I = 1$</td>
</tr>
<tr>
<td>1a.</td>
<td>$$J = \int_1^e (\ln(x))^2 dx\ ,\quad \text{en intégrant par parties avec}$$
$$u' = 1 \qquad\qquad u = x$$
$$v = (\ln(x))^2 \quad v' = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x)$$
$J = \displaystyle\int_1^e (\ln(x))^2 dx = [x\,(\ln(x))^2]_1^e - \int_1^e 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) \times x dx$
$J = e\,(\ln(e))^2 - 1 \times\ (\ln(1))^2 - \displaystyle\int_1^e 2\ln(x)\,dx$
$J = e\ - 0 - 2\underbrace{\displaystyle\int_1^e \ln(x)\,dx}_{I}$
$J = e - 2\,I$</td>
</tr>
<tr>
<td>1b.</td>
<td>$J = e - 2\,I$
or $I = 1$ donc $J = e - 2$</td>
</tr>
<tr>
<td>1c.</td>
<td>$$\mathcal{A} = \int_1^e f(x)\,dx - \int_1^e g(x)\,dx$$
$$\mathcal{A} = \int_1^e \ln(x)\,dx - \int_1^e (\ln(x))^2 dx$$
$$\mathcal{A} = I - J$$
$$\mathcal{A} = 1 - (e - 2) = 1 - e + 2 = 3 - e$$</td>
</tr>
</table>

2.

Soit $x \in [1; e]$, on note M le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x et N le point de la courbe $\mathscr{C}_g$ de même abscisse donc $M(x; f(x))$ et $N(x; g(x))$

$$MN = f(x) - g(x)$$
$$MN = \ln(x) - (\ln(x))^2$$

Notons $d(x) = MN = \ln(x) - (\ln(x))^2$

La fonction d définie sur $[1; e]$ est dérivable sur $[1; e]$.

$\forall x \in [1; e], \quad d'(x) = \dfrac{1}{x} - 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln(x)$

$d'(x) = \dfrac{1 - 2\ln(x)}{x}$

$d'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - 2\ln(x) > 0$ car $x \in [1; e]$

$$\Leftrightarrow -2\ln(x) > -1$$
$$\Leftrightarrow \ln(x) < \frac{-1}{-2}$$
$$\Leftrightarrow \ln(x) < \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow x < e^{1/2}$$

car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que

x	1		$e^{1/2}$		e
$d'(x)$		$+$	0	$-$	
$d(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

$$d\left(e^{1/2}\right) = \ln\left(e^{1/2}\right) - \left(\ln\left(e^{1/2}\right)\right)^2$$
$$d\left(e^{1/2}\right) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

On en déduit que la distance MN est maximale pour $x = e^{1/2}$ et cette distance maximale vaut $MN = 1/4$.