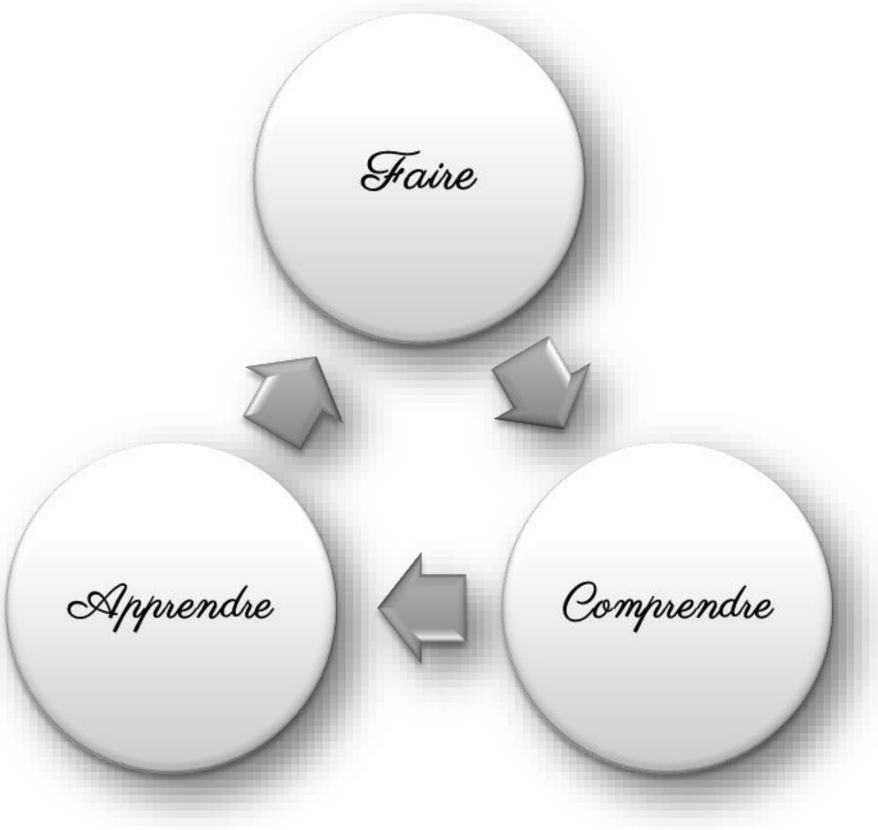

Table des matières

Terminale ➡ Préparation au BAC
Spécialité Mathématiques
Enoncé des exercices

Exercice 1. difficulté ★

Une entreprise a créé une Foire Aux Questions (« FAQ ») sur son site internet.
On étudie le nombre de questions qui y sont posées chaque mois.

Partie A : Première modélisation
Dans cette partie, on admet que, chaque mois :
- 90 % des questions déjà posées le mois précédent sont conservées sur la FAQ ;
- 130 nouvelles questions sont ajoutées à la FAQ.

Au cours du premier mois, 300 questions ont été posées.
Pour estimer le nombre de questions, en centaines, présentes sur la FAQ le n-ième mois, on modélise la situation ci-dessus à l'aide de la suite (u_n) définie par :
$$u_1 = 3 \text{ et, pour tout entier naturel } n \geq 1,\ u_{n+1} = 0{,}9u_n + 1{,}3.$$
▶1. Calculer u_2 et u_3 et proposer une interprétation dans le contexte de l'exercice.
▶2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$:
$$u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^n.$$
▶3. En déduire que la suite (u_n) est croissante.
▶4. On considère le programme ci-contre, écrit en langage Python.
Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de `seuil(8.5)` et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil(p):
    n=1
    u=3
    while u<=p:
        n=n+1
        u=0.9*u+1.3
    return n
```

Partie B : Une autre modélisation
Dans cette partie, on considère une seconde modélisation à l'aide d'une nouvelle suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :
$$v_n = 9 - 6 \times e^{-0{,}19\times(n-1)}.$$
Le terme v_n est une estimation du nombre de questions, en centaines, présentes le n-ième mois sur la FAQ.
▶1. Préciser les valeurs arrondies au centième de v_1 et v_2.
▶2. Déterminer, en justifiant la réponse, la plus petite valeur de n telle que $v_n > 8{,}5$.

Partie C : Comparaison des deux modèles
▶1. L'entreprise considère qu'elle doit modifier la présentation de son site lorsque plus de 850 questions sont présentes sur la FAQ.
Parmi ces deux modélisations, laquelle conduit à procéder le plus tôt à cette modification ? Justifier votre réponse.
▶2. En justifiant la réponse, pour quelle modélisation y a-t-il le plus grand nombre de questions sur la FAQ à long terme ?

↑

Exercice 2. difficulté ★

Partie A :
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 400$ et pour tout entier naturel n :
$$u_{n+1} = 0{,}9u_n + 60.$$

▶ 1. a. Calculer u_1 et u_2.

b. Conjecturer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

▶ 2. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a l'inégalité $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 600$.

▶ 3. a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

b. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Justifier.

▶ 4. On donne une fonction écrite en langage Python :

```
def mystere(seuil):
    n=0
    u=400
    while u<=seuil:
        n=n+1
        u=0.9*u+60
    return n
```

Quelle valeur obtient-on en tapant dans la console de Python : `mystere(500)` ?

Partie B :

Un arboriculteur possède un verger dans lequel il a la place de cultiver au maximum 500 arbres.
Chaque année il vend 10 % des arbres de son verger et puis il replante 60 nouveaux arbres.
Le verger compte 400 arbres en 2023.
L'arboriculteur pense qu'il pourra continuer à vendre et à planter les arbres au même rythme pendant les années à venir.
Va-t-il être confronté à un problème de place dans son verger ? Expliquer votre réponse

Exercice 3. difficulté ★★★

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0{,}9\,u_n - 0{,}3.$$

▶ 1. a. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 0{,}9^n - 3$.

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-3 < u_n \leq -1$.

c. Démontrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

d. Démontrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

▶ 2. On se propose d'étudier la fonction g définie sur $]-3;-1]$ par : $g(x) = \ln(0{,}5x + 1{,}5) - x$.

a. Justifier toutes les informations données par le tableau de variations de la fonction g (limites, variations, image de -1)

x	-3		-2		-1
$g(x)$	$-\infty$	↗	$g(-2)$	↘	1

b. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ a exactement une solution que l'on notera α et dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-3}.

▶ 3. Dans la suite de l'exercice, on considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$v_n = \ln(0{,}5u_n + 1{,}5).$$

a. En utilisant la formule donnée à la question 1.a., démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison $\ln(0{,}9)$.

b. Soit n un entier naturel.
Démontrer que $u_n = v_n$ si, et seulement si $g(u_n) = 0$.

c. Démontrer qu'il n'existe aucun rang $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $u_k = \alpha$.

d. En déduire qu'il n'existe aucun rang $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $u_k = v_k$.

Exercice 4. difficulté ★

Marie Sklodowska-Curie (1867–1934) est une physicienne (mais aussi chimiste et mathématicienne), polonaise naturalisée française. Deux Prix Nobel lui ont été décernés : un en Physique (partagé avec son *mari et Henri Becquerel) en 1903 et un en Chimie en 1911 pour la découverte de deux nouveaux éléments, le polonium (nom donné en hommage à ses origines) et le radium.*

On décide d'étudier le rayonnement radioactif du polonium lors de la désintégration des noyaux atomiques au cours du temps.
Au début de l'expérience, on dispose d'un morceau de 2 g de polonium.
On sait que 1 g de polonium contient 3×10^{21} noyaux atomiques.
On admet que, au bout de 24 heures, 0,5% des noyaux se sont désintégrés et que, pour compenser cette disparition, on ajoute alors 0,005 g de polonium.
On modélise la situation à l'aide d'une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$; on note v_0 le nombre de noyaux contenus dans le polonium au début de l'expérience.

Pour $n \geq 1$, v_n désigne le nombre de noyaux contenus dans le polonium au bout de n jours écoulés.

▶ 1. a. Vérifier que $v_0 = 6 \times 10^{21}$.
   b. Expliquer que, pour tout nombre entier naturel n, on a $v_{n+1} = 0{,}995\ v_n + 1{,}5 \times 10^{19}$.

▶ 2. a. Démontrer, par récurrence sur n, que $0 \leq v_{n+1} \leq v_n$.
   b. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

▶ 3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n, par : $u_n = v_n - 3 \times 10^{21}$.
   a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 0,995.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n = 3 \times 10^{21}(0{,}995^n + 1)$.
   c. En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

▶ 4. Déterminer, par le calcul, au bout de combien de jours le nombre de noyaux de polonium sera inférieur à $4{,}5 \times 10^{21}$. Justifier la réponse.

▶ 5. On souhaite disposer de la liste des termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour cela, on utilise une fonction appelée noyaux programmée en langage Python et retranscrite partiellement ci-après.

```
def noyaux(n):
    V=6*10**21
    L=[V]
    for k in range(n):
        V=...
        L.append(V)
    return L
```

   a. À la lecture des questions précédentes, proposer deux solutions différentes pour compléter les pointillés de la fonction noyaux afin qu'elle réponde au problème.
   b. Pour quelle valeur de l'entier n la commande `noyaux(n)` renverra-t-elle les relevés quotidiens du nombre de noyaux contenus dans l'échantillon de polonium pendant 52 semaines d'étude ?

↑

Exercice 5. difficulté ★★

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{11}{u_n}\right).$$
On admet que la suite (u_n) est bien définie.

Partie A - Étude de la suite (u_n)

▶ 1. Donner u_1 et u_2 sous forme de fractions irréductibles.
▶ 2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{11}{x}\right)$$

Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[\sqrt{11}; +\infty\right[$.

▶ 3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq u_{n+1} \geq \sqrt{11}$.

▶ 4. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite réelle. On note a cette limite.

▶ 5. Après avoir déterminé et résolu une équation dont a est solution, préciser la valeur exacte de a.

Partie B - Application géométrique

Pour tout entier naturel n, on considère un rectangle R_n d'aire 11 dont la largeur est notée ℓ_n et longueur L_n.

La suite (L_n) est définie par $L_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n,

$$L_{n+1} = \frac{L_n + \ell_n}{2}$$

▶ 1. a. Expliquer pourquoi $\ell_0 = 2{,}2$.

b. Établir que pour tout entier naturel n, $\ell_n = \frac{11}{L_n}$.

▶ 2. Vérifier que la suite (L_n) correspond à la suite (u_n) de la **partie A**.

▶ 3. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $\ell_n \leq \sqrt{11} \leq L_n$.

▶ 4. On admet que les suites (L_n) et (ℓ_n) convergent toutes les deux vers $\sqrt{11}$. Interpréter géométriquement ce résultat dans le contexte de la **partie B**.

▶ 5. Voici un script, écrit en langage Python, relatif aux suites étudiées dans cette partie :

```
def heron(n):
    L=5
    ℓ=2.2
    for i in range(n):
        L=(L+ℓ)/2
        ℓ=11/L
    return round(ℓ,6),round(L,6)
```

On rappelle que la fonction Python `round(x,k)` renvoie une version arrondie du nombre `x` avec `k` décimales.

a. Si l'utilisateur tape `heron(3)` dans une console d'exécution Python, qu'obtient il comme valeurs de sortie pour ℓ et L ?

b. Donner une interprétation de ces deux valeurs.

Exercice 6. difficulté ★★

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1.$$

▶ 1. Démontrer que la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

▶ 2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $n \leq u_n \leq n + 3$.

▶ 3. En déduire la limite de la suite (u_n).

▶ 4. Déterminer la limite de la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)$.

▶ 5. On considère la fonction ci-dessous, écrite de manière incomplète en langage Python.
n désigne un entier naturel non nul.

```
def terme(n):
    U=3
    for i in range(n):
        ...
    return U
```

Compléter les pointillés pour que `terme(n)` renvoie la valeur de u_n.

Terminale ➡ Préparation au BAC

Spécialité Mathématiques

Correction des exercices

Correction de l'exercice 1.

Une entreprise a créé une Foire Aux Questions (« FAQ ») sur son site internet.
On étudie le nombre de questions qui y sont posées chaque mois.

Partie A : Première modélisation

Dans cette partie, on admet que, chaque mois :

- 90 % des questions déjà posées le mois précédent sont conservées sur la FAQ ;
- 130 nouvelles questions sont ajoutées à la FAQ.

Au cours du premier mois, 300 questions ont été posées.
Pour estimer le nombre de questions, en centaines, présentes sur la FAQ le n-ième mois, on modélise la situation ci-dessus à l'aide de la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = 3 \text{ et, pour tout entier naturel } n \geq 1, u_{n+1} = 0{,}9u_n + 1{,}3.$$

▶1. Calculer u_2 et u_3 et proposer une interprétation dans le contexte de l'exercice.

▶2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^n.$$

▶3. En déduire que la suite (u_n) est croissante.

▶4. On considère le programme ci-contre, écrit en langage Python.

Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de `seuil(8.5)` et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil(p):
    n=1
    u=3
    while u<=p:
        n=n+1
        u=0.9*u+1.3
    return n
```

Partie B : Une autre modélisation

Dans cette partie, on considère une seconde modélisation à l'aide d'une nouvelle suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :

$$v_n = 9 - 6 \times e^{-0{,}19\times(n-1)}.$$

Le terme v_n est une estimation du nombre de questions, en centaines, présentes le n-ième mois sur la FAQ.

▶1. Préciser les valeurs arrondies au centième de v_1 et v_2.

▶2. Déterminer, en justifiant la réponse, la plus petite valeur de n telle que $v_n > 8{,}5$.

Partie C : Comparaison des deux modèles

▶1. L'entreprise considère qu'elle doit modifier la présentation de son site lorsque plus de 850 questions sont présentes sur la FAQ.
Parmi ces deux modélisations, laquelle conduit à procéder le plus tôt à cette modification ? Justifier votre réponse.

▶2. En justifiant la réponse, pour quelle modélisation y a-t-il le plus grand nombre de questions sur la FAQ à long terme ?

Exercice 1	**A1.**	$u_1 = 3$ Pour $n = 1$, $u_{1+1} = u_2 = 0{,}9u_1 + 1{,}3 = 0{,}9 \times 3 + 1{,}3 = 4$ Pour $n = 2$, $u_{2+1} = u_3 = 0{,}9u_2 + 1{,}3 = 0{,}9 \times 4 + 1{,}3 = 4{,}9$ Le 2e mois, 400 questions sont présentes sur la FAQ et 490 le 3e mois.

	A2.	Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$: $u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ **Initialisation** pour $n = 1$: $$13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^1 = 13 - 10 = 3 = u_1$$ **donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.** **Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n)$** : $u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^n$ **est vraie** pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé $$u_{n+1} = 0{,}9u_n + 1{,}3$$ $$u_{n+1} = 0{,}9\left(13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^n\right) + 1{,}3$$ $$u_{n+1} = 11{,}7 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^{n+1} + 1{,}3$$ $$u_{n+1} = 13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^{n+1}$$ **donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie** **Par conséquent : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n** $\in \mathbb{N}^*$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^n$
	A3.	$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^{n+1} - \left(13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^n\right)$ $u_{n+1} - u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^{n+1} - 13 + \frac{100}{9} \times 0{,}9^n$ $u_{n+1} - u_n = -\frac{100}{9} \times 0{,}9^{n+1} + \frac{100}{9} \times 0{,}9^n$ $u_{n+1} - u_n = \frac{100}{9} \times 0{,}9^n(-0{,}9 + 1)$ $u_{n+1} - u_n = \frac{100}{9} \times 0{,}9^n \times 0{,}1$ J'en déduis que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n > 0$ La suite (u_n) est donc croissante.
	A4.	1 | 3 2 | 4.0 3 | 4.9 4 | 5.71 5 | 6.439 6 | 7.0951 7 | 7.68559 8 | 8.217031 9 | 8.6953279 La fonction `seuil(8.5)` va afficher 9.
	B1.	$v_1 = 9 - 6 \times e^{-0{,}19\times(1-1)} = 9 - 6 = 3$ $v_2 = 9 - 6 \times e^{-0{,}19\times(2-1)} = 9 - 6e^{-0{,}19} \approx 4{,}04$

	B2.	$$\begin{aligned} &v_n > 8{,}5 \\ \Leftrightarrow\ & 9 - 6 \times e^{-0{,}19\times(n-1)} > 8{,}5 \\ \Leftrightarrow\ & -6 \times e^{-0{,}19\times(n-1)} > 8{,}5 - 9 \\ \Leftrightarrow\ & -6 \times e^{-0{,}19\times(n-1)} > -0{,}5 \\ \Leftrightarrow\ & e^{-0{,}19\times(n-1)} < \frac{-0{,}5}{-6} \\ \Leftrightarrow\ & e^{-0{,}19\times(n-1)} < \frac{1}{12} \\ \Leftrightarrow\ & -0{,}19 \times (n-1) < \ln\left(\frac{1}{12}\right) \\ \Leftrightarrow\ & -0{,}19 \times (n-1) < -\ln(12) \\ \Leftrightarrow\ & n - 1 > \frac{-\ln(12)}{-0{,}19} \\ \Leftrightarrow\ & n - 1 > \frac{\ln(12)}{0{,}19} \\ \Leftrightarrow\ & n > \frac{\ln(12)}{0{,}19} + 1 \\ \Leftrightarrow\ & n > 14{,}07 \end{aligned}$$ La plus petite valeur de n telle que $v_n > 8{,}5$ est donc 15.
	C1.	Avec le 1er modèle, le nombre de question présentes sur la FAQ aura dépassé 850 dès le 9e mois et seulement le 15e mois avec le 2e modèle.
	C2.	$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^n$$ $$\lim_{n\to+\infty} u_n = 13 \text{ car } \lim_{n\to+\infty} 0{,}9^n = 0$$ $$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = 9 - 6 \times e^{-0{,}19\times(n-1)}$$ $$\lim_{n\to+\infty} v_n = 9 \text{ car } \lim_{n\to+\infty} e^{-0{,}19\times(n-1)} = 0$$ A long terme, le 1er modèle va conduire à 1300 questions alors que le 2e modèle conduira à seulement 900 questions.

Correction de l'exercice 2.

Partie A :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 400$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0{,}9u_n + 60.$$

▶ 1. a. Calculer u_1 et u_2.

b. Conjecturer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

▶ 2. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a l'inégalité $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 600$.

▶ 3. a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

b. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Justifier.

▶ 4. On donne une fonction écrite en langage Python :

```
def mystere(seuil):
    n=0
    u=400
    while u<=seuil:
        n=n+1
        u=0.9*u+60
    return n
```

Quelle valeur obtient-on en tapant dans la console de Python : `mystere(500)` ?

Partie B :

Un arboriculteur possède un verger dans lequel il a la place de cultiver au maximum 500 arbres.
Chaque année il vend 10 % des arbres de son verger et puis il replante 60 nouveaux arbres.
Le verger compte 400 arbres en 2023.
L'arboriculteur pense qu'il pourra continuer à vendre et à planter les arbres au même rythme pendant les années à venir.
Va-t-il être confronté à un problème de place dans son verger ? Expliquer votre réponse

Exercice 2.	**A1a.**	$u_0 = 400$ Pour $n = 0$, $u_{0+1} = u_1 = 0{,}9u_0 + 60 = 0{,}9 \times 400 + 60 = 420$ Pour $n = 1$, $u_{1+1} = u_2 = 0{,}9u_1 + 60 = 0{,}9 \times 420 + 60 = 438$
	A1b.	Je conjecture que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
	A2.	Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$: $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 600$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$ **Initialisation** pour $n = 0$: $u_0 = 400$ $u_1 = 420$ donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 600$ **donc $\boldsymbol{\mathcal{P}(0)}$ est vraie.** **Hérédité : On suppose que $\boldsymbol{\mathcal{P}(n)}$** : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 600$ **est vraie** pour $n \in \mathbb{N}$ fixé $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 600$ $\Longrightarrow 0 \leq 0{,}9\, u_n \leq 0{,}9\, u_{n+1} \leq 540$ $\Longrightarrow 60 \leq 0{,}9\, u_n + 60 \leq 0{,}9\, u_{n+1} + 60 \leq 600$ $\Longrightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 600$ **donc $\boldsymbol{\mathcal{P}(n+1)}$ est vraie** **Par conséquent : $\boldsymbol{\mathcal{P}(n)}$ est vraie pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$** donc $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 600$
	A3a.	$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 600$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 600. Par conséquence, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
	A3b.	$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0{,}9u_n + 60 = f(u_n)$ où la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0{,}9x + 60$ La fonction f est affine, elle est donc dérivable et donc continue sur $\mathbb{R}$. La limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc solution de l'équation $f(x) = x$ $\Leftrightarrow 0{,}9x + 60 = x$ $\Leftrightarrow 60 = x - 0{,}9x$ $\Leftrightarrow 60 = 0{,}1x$ $\Leftrightarrow x = \dfrac{60}{0{,}1} = 600$ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers 600.

	A4.	0 | 400 1 | 420.0 2 | 438.0 3 | 454.2 4 | 468.78 5 | 481.902 6 | 493.7118 7 | 504.34062 La fonction `mystere(500)` va afficher 7.
	B.	Le nombre d'arbres du verger peut être modélisé par la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où u_n est le nombre d'arbres pour l'année « 2023+n ». Si l'arboriculteur continue au même rythme, d'après la question A4, le nombre d'arbres dépassera 500 au bout de 7 ans, soit en 2030.

Correction de l'exercice 3.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0{,}9\, u_n - 0{,}3.$$

▶1. a. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 0{,}9^n - 3$.

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-3 < u_n \leq -1$.

c. Démontrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

d. Démontrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

▶2. On se propose d'étudier la fonction g définie sur $]-3; -1]$ par : $g(x) = \ln(0{,}5x + 1{,}5) - x$.

a. Justifier toutes les informations données par le tableau de variations de la fonction g (limites, variations, image de -1)

x	-3		-2		-1
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g(-2)$	$\searrow$	1

b. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ a exactement une solution que l'on notera α et dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-3}.

▶3. Dans la suite de l'exercice, on considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$v_n = \ln(0{,}5u_n + 1{,}5).$$

a. En utilisant la formule donnée à la question 1.a., démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison $\ln(0{,}9)$.

b. Soit n un entier naturel.

Démontrer que $u_n = v_n$ si, et seulement si $g(u_n) = 0$.

c. Démontrer qu'il n'existe aucun rang $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $u_k = \alpha$.

d. En déduire qu'il n'existe aucun rang $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $u_k = v_k$.

Exercice 3.	**1.a.**	Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n) : u_n = 2\times 0{,}9^n - 3$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$ **Initialisation** pour $n = 0$: $$2\times 0{,}9^0 - 3 = 2 - 3 = -1 = u_0$$ **donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie**. **Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n)$** : $u_n = 2\times 0{,}9^n - 3$ **est vraie** pour $n \in \mathbb{N}$ fixé $$u_{n+1} = 0{,}9\,u_n - 0{,}3$$ $$u_{n+1} = 0{,}9\,(2\times 0{,}9^n - 3\ ) - 0{,}3$$ $$u_{n+1} = 2\times 0{,}9^{n+1} - 3\times 0{,}9 - 0{,}3$$ $$u_{n+1} = 2\times 0{,}9^{n+1} - 3$$ **donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie** **Par conséquent : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$** donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2\times 0{,}9^n - 3$
	1.b.	$$\forall n \in \mathbb{N},\quad 0 \leq 0{,}9^n \leq 1$$ $$\Leftrightarrow 2\times 0 \leq 2\times 0{,}9^n \leq 2\times 1$$ $$\Leftrightarrow 0 \leq 2\times 0{,}9^n \leq 2$$ $$\Leftrightarrow 0-3 \leq 2\times 0{,}9^n - 3 \leq 2-3$$ $$\Leftrightarrow -3 \leq u_n \leq -1$$
	1.c.	$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2\times 0{,}9^n - 3$ $u_{n+1} - u_n = 2\times 0{,}9^{n+1} - 3 - (2\times 0{,}9^n - 3)$ $u_{n+1} - u_n = 2\times 0{,}9^{n+1} - 3 - 2\times 0{,}9^n + 3$ $u_{n+1} - u_n = 2\times 0{,}9^{n+1} - 2\times 0{,}9^n$ $u_{n+1} - u_n = 2\times 0{,}9^n \times (0{,}9 - 1)$ $u_{n+1} - u_n = 2\times 0{,}9^n \times (-0{,}1)$ or $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2\times 0{,}9^n \times (-0{,}1) < 0$ J'en déduis donc que la suite (u_n) est strictement décroissante.
	1.d.	La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par -3, la suite (u_n) est donc convergente. $$\lim_{n\to+\infty} 0{,}9^n = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} 2\times 0{,}9^n = 0 \quad \text{et donc}$$ $$\lim_{n\to+\infty} u_n = -3$$
	2.a.	$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to-3^+} \ln(0{,}5x+1{,}5) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-3^+} -x = 3\end{array}\right\}\text{par somme, } \lim_{x\to-3^+} g(x) = -\infty$$ $g(-1) = \ln(-0{,}5+1{,}5) + 1 = 1$ g est dérivable sur $]-3;-1]$ $\forall x \in\ ]-3;-1], \qquad g'(x) = \dfrac{0{,}5}{0{,}5x+1{,}5} - 1 = \dfrac{0{,}5 - 0{,}5x - 1{,}5}{0{,}5x+1{,}5}$ $g'(x) = \dfrac{-0{,}5x-1}{0{,}5x+1{,}5}$ $g'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-0{,}5x-1}{0{,}5x+1{,}5} > 0$

$$-0{,}5x-1>0$$
$$\Leftrightarrow -0{,}5x>1$$
$$\Leftrightarrow x<\frac{-1}{0{,}5}$$
$$\Leftrightarrow x<-2$$

$$0{,}5x+1{,}5>0$$
$$\Leftrightarrow 0{,}5x>-1{,}5$$
$$\Leftrightarrow x>-\frac{1{,}5}{0{,}5}$$
$$\Leftrightarrow x>-3$$

x	-3		-2		-1
$-0{,}5x-1$		$+$	0	$-$	
$0{,}5x+1{,}5$		$+$		$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g(-2)$	$\searrow$	1

2.b.

$g(-2)=\ln(-1+1{,}5)+2=\ln(0{,}5)+2=\ln\left(\frac{1}{2}\right)+2=2-\ln(2)\approx 1{,}3>0$

$\lim\limits_{x\to -3^+} g(x)=-\infty<0$

De plus, la fonction g est dérivable sur $]-3;-1]$, elle y est donc continue, et, la fonction g est strictement croissante $]-3;-2]$.

L'équation $g(x)=0$ admet alors exactement une solution que l'on notera α.

x	f(x)
-2.889	-0.00237225823
-2.888	0.005596411753

X	Y1
-2.89	-0.01
-2.889	-0.002
-2.888	0.0056
-2.887	0.0135

$$g(-2{,}888)\approx 0{,}005596>0$$
$$g(-2{,}889)\approx -0.002372<0$$

On en déduit que $-2{,}889<\alpha<-2{,}888$

3.a.

$\forall n\in\mathbb{N},\qquad u_n=2\times 0{,}9^n-3$

$$v_n=\ln(0{,}5u_n+1{,}5)$$
$$v_n=\ln[0{,}5(2\times 0{,}9^n-3)+1{,}5]$$
$$v_n=\ln(1\times 0{,}9^n-1{,}5+1{,}5)$$
$$v_n=\ln(0{,}9^n)$$
$$v_n=n\times\ln(0{,}9)$$

$$v_{n+1}=(n+1)\times\ln(0{,}9)$$
$$v_{n+1}=n\times\ln(0{,}9)+\ln(0{,}9)$$
$$v_{n+1}=v_n+\ln(0{,}9)$$

La suite (v_n) est donc arithmétique de raison $\ln(0{,}9)$ et de 1er terme

$$v_0=\ln(-0{,}5+1{,}5)=\ln(1)=0$$

3.b.

Soit n un entier naturel,

$$u_n=v_n$$
$$\Leftrightarrow u_n=\ln(0{,}5u_n+1{,}5)$$
$$\Leftrightarrow 0=\ln(0{,}5u_n+1{,}5)-u_n$$
$$\Leftrightarrow 0=g(u_n)$$

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td>3.c.</td><td>Raisonnons par l'absurde,
supposons qu'il existe un entier naturel k pour lequel $u_k = \alpha$
$$-2{,}889 < \alpha < -2{,}888$$ $$\iff -2{,}889 < u_k < -2{,}888$$ $$\iff -2{,}889 < 2 \times 0{,}9^k - 3 < -2{,}888$$ $$\iff -2{,}889 + 3 < 2 \times 0{,}9^k < -2{,}888 + 3$$ $$\iff 0{,}111 < 2 \times 0{,}9^k < 0{,}112$$ $$\iff \frac{0{,}111}{2} < 0{,}9^k < \frac{0{,}112}{2}$$ $$\iff 0{,}0555 < 0{,}9^k < 0{,}056$$ La fonction $x \longmapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ donc :
$$\iff \ln(0{,}0555) < k\ln(0{,}9) < \ln(0{,}056)$$ $$\iff \frac{\ln(0{,}0555)}{\ln(0{,}9)} > k > \frac{\ln(0{,}056)}{\ln(0{,}9)} \text{ car } \ln(0{,}9) < 0$$ $$\iff 27{,}45 > k > 27{,}35$$ Il y a une absurdité car il n'existe pas d'entier k entre 27,35 et 27,45. Nous hypothèse est donc fausse, on en déduit qu'il n'existe aucun $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $u_k = \alpha$.</td></tr>
<tr><td>3.d.</td><td>Raisonnons par l'absurde,
supposons qu'il existe un entier naturel k pour lequel $u_k = v_k$
alors $g(u_k) = 0$ d'après la question 3)b)
et on sait que $u_k \in]-3; -1]$ d'après la question 1)b)
mais l'équation $g(x) = 0$ n'admet qu'une unique solution α d'après la question 2)b)
donc $u_k = \alpha$ mais c'est impossible d'après la question précédente.
On en déduit qu'il n'existe aucun rang $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $u_k = v_k$.</td></tr>
</table>

Correction de l'exercice 4.

Marie Sklodowska-Curie (1867–1934) est une physicienne (mais aussi chimiste et mathématicienne), polonaise naturalisée française. Deux Prix Nobel lui ont été décernés : un en Physique (partagé avec son mari et Henri Becquerel) en 1903 et un en Chimie en 1911 pour la découverte de deux nouveaux éléments, le polonium (nom donné en hommage à ses origines) et le radium.

On décide d'étudier le rayonnement radioactif du polonium lors de la désintégration des noyaux atomiques au cours du temps.
Au début de l'expérience, on dispose d'un morceau de 2 g de polonium.
On sait que 1 g de polonium contient 3×10^{21} noyaux atomiques.
On admet que, au bout de 24 heures, 0,5% des noyaux se sont désintégrés et que, pour compenser cette disparition, on ajoute alors 0,005 g de polonium.
On modélise la situation à l'aide d'une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$; on note v_0 le nombre de noyaux contenus dans le polonium au début de l'expérience.

Pour $n \geq 1$, v_n désigne le nombre de noyaux contenus dans le polonium au bout de n jours écoulés.

▶ 1. a. Vérifier que $v_0 = 6 \times 10^{21}$.
   b. Expliquer que, pour tout nombre entier naturel n, on a $v_{n+1} = 0{,}995\, v_n + 1{,}5 \times 10^{19}$.

▶ 2. a. Démontrer, par récurrence sur n, que $0 \leq v_{n+1} \leq v_n$.
   b. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

▶ 3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n, par : $u_n = v_n - 3 \times 10^{21}$.
   a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 0,995.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n = 3 \times 10^{21}(0{,}995^n + 1)$.
   c. En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

▶4. Déterminer, par le calcul, au bout de combien de jours le nombre de noyaux de polonium sera inférieur à $4,5 \times 10^{21}$. Justifier la réponse.

▶5. On souhaite disposer de la liste des termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour cela, on utilise une fonction appelée noyaux programmée en langage Python et retranscrite partiellement ci-après.

```
def noyaux(n):
    V=6*10**21
    L=[V]
    for k in range(n):
        V=...
        L.append(V)
    return L
```

a. À la lecture des questions précédentes, proposer deux solutions différentes pour compléter les pointillés de la fonction noyaux afin qu'elle réponde au problème.

b. Pour quelle valeur de l'entier n la commande `noyaux(n)` renverra-t-elle les relevés quotidiens du nombre de noyaux contenus dans l'échantillon de polonium pendant 52 semaines d'étude ?

Exercice 4.	**1.a.**	1 g de polonium contient 3×10^{21} noyaux atomiques, donc 2g en contiennent 2 fois plus. $v_0 = 2 \times 3 \times 10^{21} = 6 \times 10^{21}$.
	1.b.	Une baisse de 0,5% correspond à une multiplication par $1 - \frac{0,5}{100} = 0,995$. 0,005 g de polonium contient $0,005 \times 3 \times 10^{21} = 0,015 \times 10^{21} = 1,5 \times 10^{-2} \times 10^{21} = 1,5 \times 10^{19}$ noyaux Pour $n \geq 1$, on a alors $v_{n+1} = 0,995\ v_n + 1,5 \times 10^{19}$.
	2.a.	Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n) : 0 \leq v_{n+1} \leq v_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$ **Initialisation** pour $n = 0$: $v_1 = 0,995\ v_0 + 1,5 \times 10^{19} = 0,995 \times 6 \times 10^{21} + 1,5 \times 10^{19}$ $v_1 = 5,97 \times 10^{21} + 1,5 \times 10^{19}$ $v_1 = 597 \times 10^{19} + 1,5 \times 10^{19}$ $v_1 = 598,5 \times 10^{19}$ $v_1 = 5,985 \times 10^{21}$ $v_0 = 6 \times 10^{21}$ donc $0 \leq v_1 \leq v_0$ **donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.** **Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n)$** : $0 \leq v_{n+1} \leq v_n$ **est vraie** pour $n \in \mathbb{N}$ fixé $0 \leq v_{n+1} \leq v_n$ $\Longrightarrow 0 \times 0,995 \leq v_{n+1} \times 0,995 \leq v_n \times 0,995$ $\Longrightarrow 0 \leq 0,995\ v_{n+1} \leq 0,995\ v_n$ $\Longrightarrow 0 + 1,5 \times 10^{19} \leq 0,995\ v_{n+1} + 1,5 \times 10^{19} \leq 0,995\ v_n + 1,5 \times 10^{19}$ $\Longrightarrow 1,5 \times 10^{19} \leq v_{n+2} \leq v_{n+1}$ $\Longrightarrow 0 \leq v_{n+2} \leq v_{n+1}$ **donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie** **Par conséquent : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n** $\in \mathbb{N}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq v_{n+1} \leq v_n$
	2.b.	$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} \leq v_n$ donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq v_n$ donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0. On en déduit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

	3.a.	$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n - 3 \times 10^{21}$ $u_{n+1} = v_{n+1} - 3 \times 10^{21}$ $u_{n+1} = 0{,}995\, v_n + 1{,}5 \times 10^{19} - 3 \times 10^{21}$ $u_{n+1} = 0{,}995\, v_n + 1{,}5 \times 10^{19} - 300 \times 10^{19}$ $u_{n+1} = 0{,}995\, v_n - 298{,}5 \times 10^{19}$ $u_{n+1} = 0{,}995\, (v_n - 300 \times 10^{19})$ $u_{n+1} = 0{,}995\, (v_n - 3 \times 10^{21})$ $u_{n+1} = 0{,}995\, u_n$ On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 0,995.
	3.b.	Le 1er terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $u_0 = v_0 - 3 \times 10^{21} = 6 \times 10^{21} - 3 \times 10^{21}$ $u_0 = 3 \times 10^{21}$ On en déduit que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3 \times 10^{21} \times 0{,}995^n$ or $u_n = v_n - 3 \times 10^{21} \Leftrightarrow v_n = u_n + 3 \times 10^{21}$ donc $v_n = 3 \times 10^{21} \times 0{,}995^n + 3 \times 10^{21}$ $v_n = 3 \times 10^{21}(0{,}995^n + 1)$
	3.c.	$\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}995^n = 0$ car $0 < 0{,}995 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}995^n + 1 = 1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3 \times 10^{21}$ Lorsque le temps s'écoule à l'infini, le nombre de noyaux de polonium va tendre vers 3×10^{21}.
	4.	$v_n < 4{,}5 \times 10^{21}$ $\Leftrightarrow 3 \times 10^{21}(0{,}995^n + 1) < 4{,}5 \times 10^{21}$ $\Leftrightarrow 0{,}995^n + 1 < \dfrac{4{,}5 \times 10^{21}}{3 \times 10^{21}}$ $\Leftrightarrow 0{,}995^n + 1 < 1{,}5$ $\Leftrightarrow 0{,}995^n < 1{,}5 - 1$ $\Leftrightarrow 0{,}995^n < 0{,}5$ $\Leftrightarrow \ln(0{,}995^n) < \ln(0{,}5)$ $\Leftrightarrow n \times \ln(0{,}995) < \ln(0{,}5)$ $\Leftrightarrow n > \dfrac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}995)}$ car $\ln(0{,}995) < 0$ $\Rightarrow n > 138$ $\Rightarrow n \geq 139$ Le nombre de noyaux de polonium sera inférieur à $4{,}5 \times 10^{21}$ au bout de 139 jours.

	5.a.	`def noyaux(n):`
		 `    V=6*10**21`
		 `    L=[V]`
		 `    for k in range(n):`
		 `        V=...`
		 `        L.append(V)`
		 `    return L`
		 Avec la formule de récurrence :
		 $v_0 = 6 \times 10^{21}$ et
		 $v_{k+1} = 0{,}995\, v_k + 1{,}5 \times 10^{19}$
		 `V=0.995*V+1.5*10**19`
		 Avec la formule explicite :
		 $v_k = 3 \times 10^{21}(0{,}995^k + 1)$
		 $v_{k+1} = 3 \times 10^{21}(0{,}995^{k+1} + 1)$
		 `V=3*10**21*(0.995**(k+1)+1)`

	5.b.	52 semaines correspond à $52 \times 7 = 364$ jours. La commande qui doit être exécutée est : `noyaux(364)`

		<pre>def noyaux(n):
		    V=6*10**21
		    L=[V]
		    for k in range(n):
		        V=0.995*V+1.5*10**19
		        L.append(V)
		    return L
		print(noyaux(364))</pre>
			<pre>def noyaux(n):
			    V=6*10**21
			    L=[V]
			    for k in range(n):
			        V=3*10**21*(0.995**(k+1)+1)
			        L.append(V)
			    return L
			print(noyaux(364))</pre>

Correction de l'exercice 5.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{11}{u_n}\right).$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

Partie A - Étude de la suite (u_n)

▶ 1. Donner u_1 et u_2 sous forme de fractions irréductibles.

▶ 2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{11}{x}\right)$$

Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[\sqrt{11};+\infty\right[$.

▶ 3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq u_{n+1} \geq \sqrt{11}$.

▶ 4. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite réelle. On note a cette limite.

▶ 5. Après avoir déterminé et résolu une équation dont a est solution, préciser la valeur exacte de a.

Partie B - Application géométrique

Pour tout entier naturel n, on considère un rectangle R_n d'aire 11 dont la largeur est notée ℓ_n et longueur L_n.

La suite (L_n) est définie par $L_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n,

$$L_{n+1} = \frac{L_n + \ell_n}{2}$$

▶ 1. a. Expliquer pourquoi $\ell_0 = 2{,}2$.

b. Établir que pour tout entier naturel n, $\ell_n = \frac{11}{L_n}$.

▶ 2. Vérifier que la suite (L_n) correspond à la suite (u_n) de la **partie A**.

▶ 3. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $\ell_n \leq \sqrt{11} \leq L_n$.

▶ 4. On admet que les suites (L_n) et (ℓ_n) convergent toutes les deux vers $\sqrt{11}$. Interpréter géométriquement ce résultat dans le contexte de la **partie B**.

▶ 5. Voici un script, écrit en langage Python, relatif aux suites étudiées dans cette partie :

```
def heron(n):
    L=5
    ℓ=2.2
    for i in range(n):
        L=(L+ℓ)/2
        ℓ=11/L
    return round(ℓ,6),round(L,6)
```

On rappelle que la fonction Python `round(x,k)` renvoie une version arrondie du nombre `x` avec `k` décimales.

a. Si l'utilisateur tape `heron(3)` dans une console d'exécution Python, qu'obtient il comme valeurs de sortie pour ℓ et L ?

b. Donner une interprétation de ces deux valeurs.

Exercice 5.

A1.

Remarque :
On admet que la suite (u_n) est bien définie signifie que l'on admet que, pour tout entier n, u_n n'est jamais égal à 0 et donc que $\frac{11}{u_n}$ se calcule toujours.

$u_0 = 5$

pour $n = 0$, $u_1 = u_{0+1} = \frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{11}{u_0}\right) = \frac{1}{2}\left(5 + \frac{11}{5}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{25}{5} + \frac{11}{5}\right) = \frac{36}{10} = \frac{18}{5}$

pour $n = 1$, $u_2 = u_{1+1} = \frac{1}{2}\left(u_1 + \frac{11}{u_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{18}{5} + \frac{11}{\frac{18}{5}}\right)$

$u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{18}{5} + \frac{11}{\frac{18}{5}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{18}{5} + 11 \times \frac{5}{18}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{18}{5} + \frac{55}{18}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{324}{90} + \frac{275}{90}\right)$

$u_2 = \frac{599}{180}$

A2.

$\forall x \in \,]0; +\infty[, f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{11}{x}\right)$

La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$

$\forall x \in \,]0; +\infty[, f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{11}{x^2}\right) = \frac{x^2 - 11}{2x^2}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 11 > 0$ car $2x^2 > 0$

$\Leftrightarrow x^2 > 11$

$\Leftrightarrow x > \sqrt{11}$ ou $\underbrace{x < -\sqrt{11}}_{\text{exclu car } x>0}$

x	0		$\sqrt{11}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\sqrt{11}$	$\nearrow$	

$f(\sqrt{11}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{11} + \frac{11}{\sqrt{11}}\right) = \frac{1}{2}(\sqrt{11} + \sqrt{11}) = \frac{2\sqrt{11}}{2} = \sqrt{11}$

On en déduit que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[\sqrt{11}; +\infty[$.

<table>
<tr><td></td><td>A3.</td><td>

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n) : u_n \geq u_{n+1} \geq \sqrt{11}$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$

Initialisation pour $n = 0$:

$$u_0 = 5$$
$$u_1 = \frac{18}{5} = 3{,}6$$
$$\sqrt{11} \approx 3{,}31$$
$$\text{donc } u_0 \geq u_1 \geq \sqrt{11}$$

donc $\boldsymbol{\mathcal{P}(0)}$ est vraie.

Hérédité : On suppose que $\boldsymbol{\mathcal{P}(n)}$: $u_n \geq u_{n+1} \geq \sqrt{11}$ **est vraie** pour $n \in \mathbb{N}$ fixé

$$u_n \geq u_{n+1} \geq \sqrt{11}$$
$$\Rightarrow f(u_n) \geq f(u_{n+1}) \geq f\left(\sqrt{11}\right)$$

car la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[\sqrt{11}; +\infty\right[$

$$\text{et } f\left(\sqrt{11}\right) = \sqrt{11}$$
$$\Rightarrow u_{n+1} \geq u_{n+2} \geq \sqrt{11}$$

donc $\boldsymbol{\mathcal{P}(n+1)}$ est vraie

Par conséquent : $\boldsymbol{\mathcal{P}(n)}$ est vraie pour tout $\boldsymbol{n}$ $\in \mathbb{N}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1} \geq \sqrt{11}$

</td></tr>
<tr><td></td><td>A4.</td><td>

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est décroissante.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \sqrt{11}$ donc la suite (u_n) est minorée par $\sqrt{11}$.

J'en déduis que la suite (u_n) converge vers une limite que l'on note a.

</td></tr>
<tr><td></td><td>A5.</td><td>

$\forall x \in \left]0; +\infty\right[, f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{11}{x}\right)$

La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ donc elle est continue sur $]0; +\infty[$.

Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ et que la suite (u_n) converge alors sa limite a est solution de l'équation $f(x) = x$

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{11}{x}\right) = x$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 11}{x} = 2x$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 11}{x} - 2x = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 11 - 2x^2}{x} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{11 - x^2}{x} = 0$$
$$\Leftrightarrow 11 - x^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 11$$
$$\Leftrightarrow x = \sqrt{11} \quad \text{ou} \quad \underbrace{x = -\sqrt{11}}_{\text{exclu car } x > 0}$$

La suite (u_n) converge donc vers $\sqrt{11}$.

</td></tr>
<tr><td></td><td>B1a.</td><td>

L'aire du rectangle R_0 est 11 or $11 = L_0 \times \ell_0$

$$11 = 5 \times \ell_0$$
$$\text{donc } \ell_0 = \frac{11}{5} = 2{,}2$$

</td></tr>
<tr><td></td><td>B1b.</td><td>

Pour tout entier naturel n, l'aire du rectangle R_n est 11 or $11 = L_n \times \ell_n$

$$\text{donc } \ell_n = \frac{11}{L_n}.$$

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>B2.</td><td>$L_0 = 5 = u_0$
Pour tout entier naturel n,
$$L_{n+1} = \frac{L_n + \frac{11}{L_n}}{2} = \frac{1}{2}\left(L_n + \frac{11}{L_n}\right) \text{ donc } L_{n+1} = f(L_n)$$
On en déduit donc que la suite (L_n) correspond à la suite (u_n) de la partie A.</td></tr>
<tr><td></td><td>B3.</td><td>On peut en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = L_n \geq \sqrt{11}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{L_n} \leq \frac{1}{\sqrt{11}}$$
car la fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$
$$\Leftrightarrow 11 \times \frac{1}{L_n} \leq 11 \times \frac{1}{\sqrt{11}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{11}{L_n} \leq \frac{11}{\sqrt{11}}$$
$$\Leftrightarrow \ell_n \leq \frac{\sqrt{11} \times \sqrt{11}}{\sqrt{11}}$$
$$\Leftrightarrow \ell_n \leq \sqrt{11}$$
donc, pour tout entier naturel n, on a $\ell_n \leq \sqrt{11} \leq L_n$.</td></tr>
<tr><td></td><td>B4.</td><td>On admet que les suites (L_n) et (ℓ_n) convergent toutes les deux vers $\sqrt{11}$.
Cela signifie que, lorsque n tend vers $+\infty$, le rectangle d'aire 11 devient de plus en plus proche d'un carré de côté $\sqrt{11}$.</td></tr>
<tr><td></td><td>B5a.</td><td><table><tr><td></td><td><code>2.2</code></td><td><code>5</code></td></tr><tr><td><code>i= 0</code></td><td><code>3.0555555555555554</code></td><td><code>3.6</code></td></tr><tr><td><code>i= 1</code></td><td><code>3.30550918196995</code></td><td><code>3.3277777777777775</code></td></tr><tr><td><code>i= 2</code></td><td><code>3.3166061009422525</code></td><td><code>3.3166434798738638</code></td></tr></table>L'algorithme affiche finalement : <code>3.316606, 3.316643</code>
Si l'utilisateur tape <code>heron(3)</code> dans une console d'exécution Python, il obtient :
$\ell = 3.316606$ et $L = 3.316643$</td></tr>
<tr><td></td><td>B5b.</td><td>Les deux nombres obtenus sont une approximation du nombre $\sqrt{11}$ l'une par excès et l'autre par défaut.</td></tr>
</table>

Correction de l'exercice 6.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1.$$

▶ 1. Démontrer que la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

▶ 2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $n \leq u_n \leq n + 3$.

▶ 3. En déduire la limite de la suite (u_n).

▶ 4. Déterminer la limite de la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)$.

▶ 5. On considère la fonction ci-dessous, écrite de manière incomplète en langage Python.
n désigne un entier naturel non nul.

```
def terme(n):
    U=3
    for i in range(n):
        …
    return U
```

Compléter les pointillés pour que `terme(n)` renvoie la valeur de u_n.

Exercice 6.	**1.**	$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - n$ $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1)$ $v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1 - n - 1$ $v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2}n$ $v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n - n)$ $v_{n+1} = \frac{1}{2}\, v_n$ On en déduit que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
	2.	Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n) : n \leq u_n \leq n+3$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$ **Initialisation** pour $n = 0$: $u_0 = 3$ donc : $0 \leq u_0 \leq 0 + 3$ **donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.** **Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n)$** : $n \leq u_n \leq n+3$ **est vraie** pour $n \in \mathbb{N}$ fixé $n \leq u_n \leq n+3$ $\Longrightarrow \frac{1}{2}n \leq \frac{1}{2}u_n \leq \frac{1}{2}(n+3)$ $\Longrightarrow \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n + 1 \leq \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1 \leq \frac{1}{2}n + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}n + 1$ $\Longrightarrow n + 1 \leq u_{n+1} \leq n + \frac{5}{2}$ or $n + \frac{5}{2} \leq n + 4$ $\Longrightarrow n + 1 \leq u_{n+1} \leq n + 4$ **donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie** **Par conséquent : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n** $\in \mathbb{N}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq u_n \leq n+3$
	3.	$\forall n \in \mathbb{N}, n \leq u_n$ or $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ donc par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
	4.	$\forall n \in \mathbb{N}, n \leq u_n \leq n+3$ $\Leftrightarrow \frac{n}{n} \leq \frac{u_n}{n} \leq \frac{n+3}{n}$ $\Leftrightarrow 1 \leq \frac{u_n}{n} \leq \frac{n}{n} + \frac{3}{n}$ $\Leftrightarrow 1 \leq \frac{u_n}{n} \leq 1 + \frac{3}{n}$ or $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \frac{3}{n} = 1$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n} = 1$

5.

En utilisant la récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1$$

```
def terme(n):
    U=3
    for i in range(n):
        U=U/2+i/2+1
return U
```

Autre méthode :

Par une formule explicite :

La suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de 1^er^ terme $v_0 = u_0 - 0 = 3$

$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 3 \times \frac{1}{2^n} = \frac{3}{2^n}$

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n + n$

$$u_n = \frac{3}{2^n} + n$$

```
def terme(n):
   return 3/2**n+n
```