Probabilités
Terminale ➡ Préparation au BAC
Spécialité Mathématiques

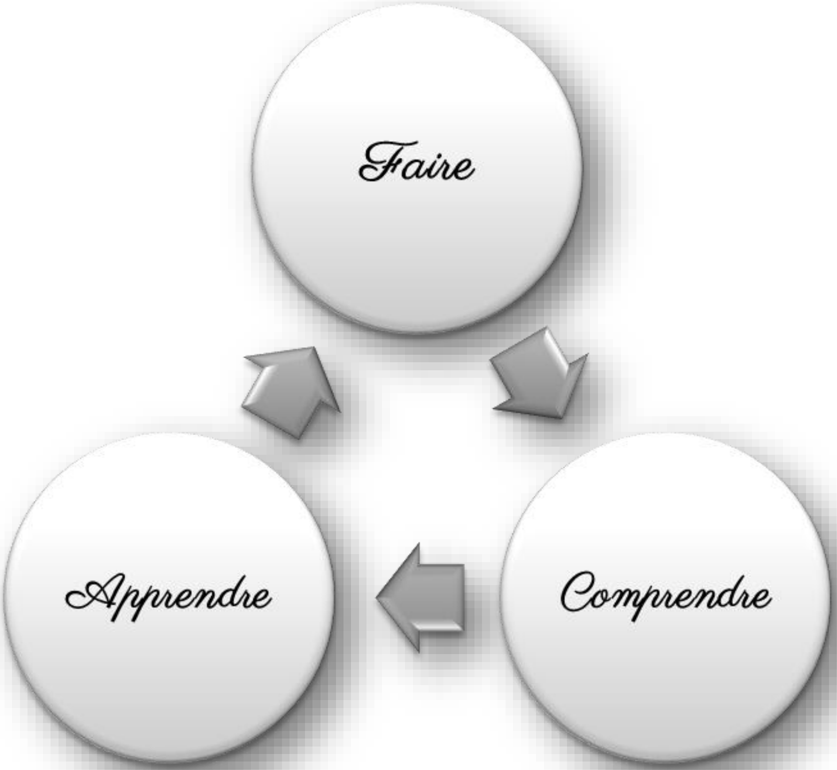


Table des matières

Terminale → Préparation au BAC

Spécialité Mathématiques

Enoncé des exercices

Exercice 1. difficulté ★

Une entreprise fait fabriquer des paires de chaussette auprès de trois fournisseurs F_1, F_2 et F_3.
Dans l'entreprise, toutes ces paires de chaussettes sont regroupées dans un stock unique.
La moitié des paires de chaussettes est fabriquée par le fournisseur F_1, le tiers par le fournisseur F_2 et le reste par le fournisseur F_3.
Une étude statistique a montré que

- 5 % des paires de chaussette fabriquées par le fournisseur F_1 ont un défaut ;
- 1,5 % des paires de chaussette fabriquées par le fournisseur F_2 ont un défaut ;
- sur l'ensemble du stock, 3,5 % des paires de chaussette ont un défaut.

On prélève au hasard une paire de chaussettes dans le stock de l'entreprise.
On considère les événements F_1, F_2, F_3 et D suivants :

- F_1 : la paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur F_1 ;
- F_2 : la paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur F_2 ;
- F_3 : la paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur F_3 ;
- D : la paire de chaussettes prélevée présente un défaut.

▶1. Déterminer $P(F_1)$, $P(F_2)$, $P_{F_1}(D)$, $P_{F_2}(D)$ et $P(D)$.
Dans la suite, on pourra s'aider d'un arbre pondéré.
▶2. a) Calculer la probabilité qu'une paire de chaussettes prélevée soit fabriquée par le fournisseur F_1 et présente un défaut.
b) Calculer la probabilité de l'événement $F_2 \cap D$.
c) En déduire la probabilité de l'événement $F_3 \cap D$.
▶3. Sachant que la paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur F_3, quelle est la probabilité qu'elle présente un défaut ?
▶4. Sachant que la paire de chaussettes prélevée présente un défaut, quelle est la probabilité qu'elle soit fabriquée par le fournisseur F_1 ?

Exercice 2. difficulté ★

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe. Un salarié malade est toujours absent et la première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
• Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à 0,04.
• Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à 0,24.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n^e semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n.
On a ainsi : $p_1 = 0$.

▶1. a. Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.

b. Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

▶2. a. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, représenter la situation entre la n^e semaine et la $n+1^e$ semaine par un arbre.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$p_{n+1} = 0{,}2\, p_n + 0{,}04.$$

c. Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_n = 0{,}05 - 0{,}05 \times 0{,}2^{n-1}.$$

d. Déterminer alors la limite de la suite (p_n).

Exercice 3. difficulté ★★

Partie A.

Démontrer que pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre entier naturel p tels que $1 < p < n$ on a :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

Partie B.

Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher :

7 jetons blancs numérotés de 1 à 7 et 3 jetons noirs numérotés de 1 à 3.

On tire simultanément deux jetons de ce sac.

▶1a. On note A l'événement « obtenir deux jetons blancs ».

Démontrer que la probabilité de l'événement A est égale à $\frac{7}{15}$.

b. On note B l'événement « obtenir deux jetons portant des numéros impairs ».

Calculer la probabilité de B.

c. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

▶2. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de jetons blancs obtenus lors de ce tirage simultané.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

c. Donner une minoration de la probabilité $P\left(\frac{11}{15} < X < \frac{31}{15}\right)$.

Exercice 4. difficulté ★★

Un code antivol d'un autoradio est un nombre de quatre chiffres, chaque chiffre pouvant prendre l'une des dix valeurs 0, 1, ... , 9.

▶1. a. Quel est le nombre de codes possibles ?

b. Quel est le nombre de codes formés de quatre chiffres distincts deux à deux ?

▶2. Après une coupure d'alimentation électrique, le propriétaire doit réintroduire le code pour pouvoir utiliser son autoradio.

Il sait que les quatre chiffres de son code sont 1, 9, 9 et 5, mais il a oublié l'ordre de ces chiffres.

a. Combien de codes différents peut-il composer avec ces 4 chiffres ?

b. Si le premier code introduit n’est pas le bon, le propriétaire doit attendre 2 minutes avant de pouvoir tenter un second essai ; le délai d’attente entre le second et le troisième essai est de 4 minutes, entre le troisième et le quatrième essai, il est de 8 minutes... (le délai d’attente double entre deux essais successifs).
Combien de codes le propriétaire peut-il introduire au maximum en 24 heures

Terminale ➡ Préparation au BAC

Spécialité Mathématiques

Correction des exercices

Correction de l'exercice 1. difficulté ★

Une entreprise fait fabriquer des paires de chaussette auprès de trois fournisseurs F_1, F_2 et F_3.

Dans l'entreprise, toutes ces paires de chaussettes sont regroupées dans un stock unique.

La moitié des paires de chaussettes est fabriquée par le fournisseur F_1, le tiers par le fournisseur F_2 et le reste par le fournisseur F_3.

Une étude statistique a montré que

- 5 % des paires de chaussette fabriquées par le fournisseur F_1 ont un défaut ;
- 1,5 % des paires de chaussette fabriquées par le fournisseur F_2 ont un défaut ;
- sur l'ensemble du stock, 3,5 % des paires de chaussette ont un défaut.

On prélève au hasard une paire de chaussettes dans le stock de l'entreprise.

On considère les événements F_1, F_2, F_3 et D suivants :

- F_1 : la paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur F_1 ;
- F_2 : la paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur F_2 ;
- F_3 : la paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur F_3 ;
- D : la paire de chaussettes prélevée présente un défaut.

▶1. Déterminer $P(F_1)$, $P(F_2)$, $P_{F_1}(D)$, $P_{F_2}(D)$ et $P(D)$.

Dans la suite, on pourra s'aider d'un arbre pondéré.

▶2. a) Calculer la probabilité qu'une paire de chaussettes prélevée soit fabriquée par le fournisseur F_1 et présente un défaut.

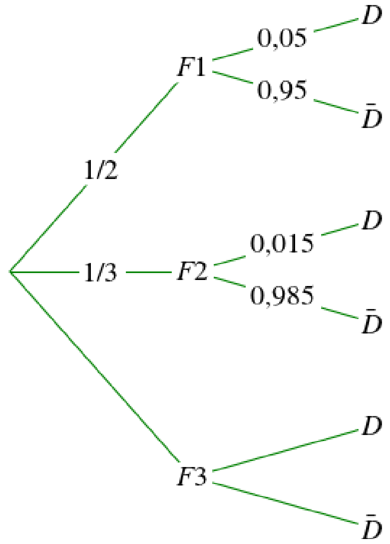
b) Calculer la probabilité de l'événement $F_2 \cap D$.

c) En déduire la probabilité de l'événement $F_3 \cap D$.

▶3. Sachant que la paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur F_3, quelle est la probabilité qu'elle présente un défaut ?

▶4. Sachant que la paire de chaussettes prélevée présente un défaut, quelle est la probabilité qu'elle soit fabriquée par le fournisseur F_1 ?

Exercice	**1.**	$P(F_1) = \frac{1}{2}$, $P(F_2) = \frac{1}{3}$, $P_{F_1}(D) = 0{,}05$, $P_{F_2}(D) = 0{,}015$ et $P(D) = 0{,}035$

	2a.	 $P(F_1 \cap D) = P(F_1) \times P_{F_1}(D) = \dfrac{1}{2} \times 0{,}05$ $P(F_1 \cap D) = 0{,}025 = \dfrac{1}{40}$
	2b.	$P(F_2 \cap D) = P(F_2) \times P_{F_2}(D) = \dfrac{1}{3} \times 0{,}015$ $P(F_2 \cap D) = 0{,}005 = \dfrac{1}{200}$
	2c.	$P(F_3 \cap D) = P(D) - P(F_1 \cap D) - P(F_2 \cap D) = 0{,}035 - 0{,}025 - 0{,}005$ $P(F_3 \cap D) = 0{,}035 - 0{,}025 - 0{,}005 = 0{,}005$
	3.	$P_{F_3}(D) = \dfrac{P(F_3 \cap D)}{P(F_3)} = \dfrac{0{,}005}{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = \dfrac{0{,}005}{\frac{1}{6}} = 0{,}005 \times 6 = 0{,}03$
	4.	$P_D(F_1) = \dfrac{P(F_1 \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0{,}025}{0{,}035} = \dfrac{25}{35} = \dfrac{5}{7} \approx 0{,}71$

Correction de l'exercice 2. difficulté ★

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe. Un salarié malade est toujours absent et la première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.

• Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n + 1$ avec une probabilité égale à 0,04.

• Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n + 1$ avec une probabilité égale à 0,24.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n^e semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n.

On a ainsi : $p_1 = 0$.

▶ 1. a. Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.

b. Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

▶2. a. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, représenter la situation entre la n^e semaine et la $n+1^e$ semaine par un arbre.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$p_{n+1} = 0{,}2\, p_n + 0{,}04.$$

c. Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

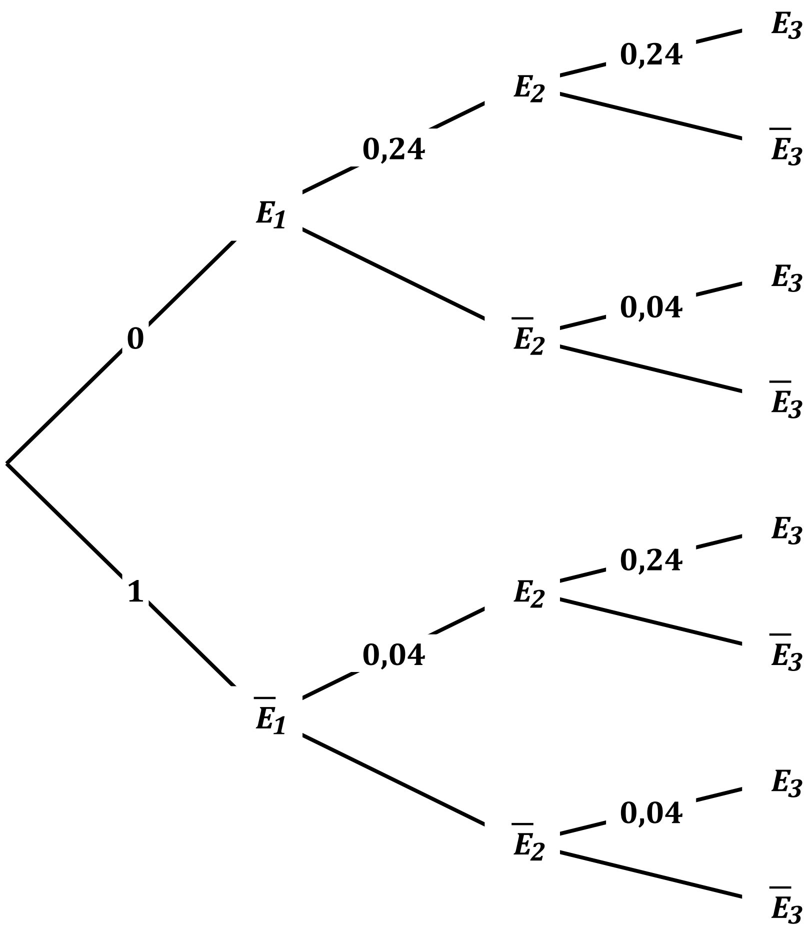
$$p_n = 0{,}05 - 0{,}05 \times 0{,}2^{n-1}.$$

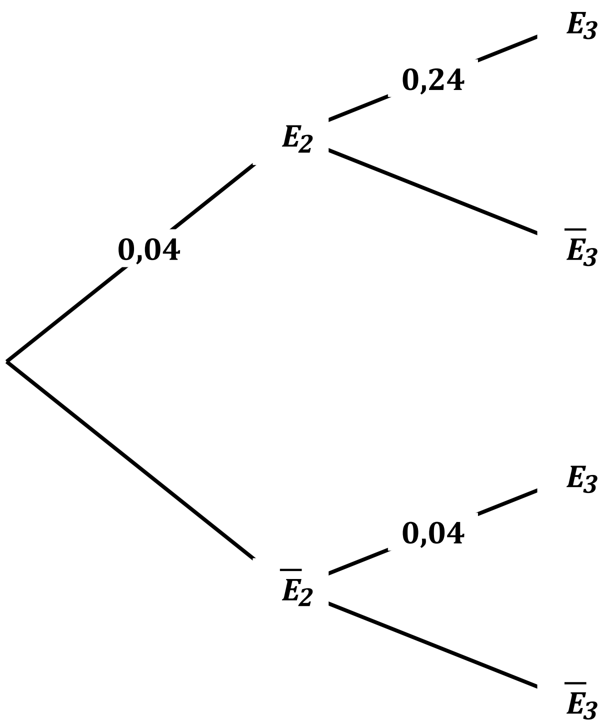
d. Déterminer alors la limite de la suite (p_n).

↑

Exercice 2.

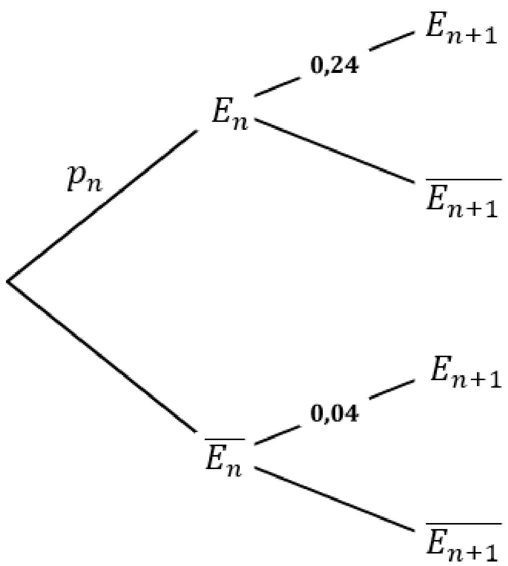
1a.





$$p_3 = P(E_3) = P(E_2 \cap E_3) + P(\overline{E_2} \cap E_3)$$

$$p_3 = 0{,}04 \times 0{,}24 + (1 - 0{,}04) \times 0{,}04 = 0{,}048$$

<table>
<tr><td rowspan="3"></td><td>1b.</td><td>$P_{E_3}(E_2) = \dfrac{P(E_2 \cap E_3)}{P(E_3)} = \dfrac{0{,}04 \times 0{,}24}{0{,}048}$
$\boldsymbol{P_{E_3}(E_2) = 0,2}$</td></tr>
<tr><td>2a.</td><td>$\forall n \in \mathbb{N}^*,$

</td></tr>
<tr><td>2b.</td><td>$\forall n \in \mathbb{N}^*,$
$p_{n+1} = P(E_{n+1}) = P(E_n \cap E_{n+1}) + P(\overline{E_n} \cap E_{n+1})$
$p_{n+1} = p_n \times 0{,}24 + (1 - p_n) \times 0{,}04$
$p_{n+1} = 0{,}24\, p_n + 0{,}04 - 0{,}04\, p_n$
$\boldsymbol{p_{n+1} = 0,2\, p_n + 0,04}$</td></tr>
</table>

	2c.	Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n) : p_n = 0{,}05 - 0{,}05 \times 0{,}2^{n-1}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Initialisation pour $n = 1$: $p_1 = 0$ or $0{,}05 - 0{,}05 \times 0{,}2^{1-1} = 0{,}05 - 0{,}05 \times 0{,}2^{0} = 0{,}05 - 0{,}05 = 0$ donc $p_1 = 0{,}05 - 0{,}05 \times 0{,}2^{1-1}$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie. Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n) : p_n = 0{,}05 - 0{,}05 \times 0{,}2^{n-1}$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé $p_{n+1} = 0{,}2\, p_n + 0{,}04$ Je substitue p_n par $0{,}05 - 0{,}05 \times 0{,}2^{n-1}$ $p_{n+1} = 0{,}2(0{,}05 - 0{,}05 \times 0{,}2^{n-1}) + 0{,}04$ Je distribue 0,2 $p_{n+1} = 0{,}2 \times 0{,}05 - 0{,}2 \times 0{,}005 \times 0{,}2^{n-1} + 0{,}04$ $p_{n+1} = 0{,}01 - 0{,}005 \times 0{,}2^{n} + 0{,}04$ $p_{n+1} = 0{,}05 - 0{,}005 \times 0{,}2^{n}$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie Par conséquent : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = 0{,}05 - 0{,}05 \times 0{,}2^{n-1}$
	2d.	$(0{,}2^{n-1})$ est une suite géométrique de raison 0,2, or $\lvert 0{,}2 \rvert < 1$ $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}2^{n-1} = 0$ Par conséquent, $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0{,}05 - 0{,}05 \times 0 = 0{,}05$

Correction de l'exercice 3. difficulté ★★

Partie A.

Démontrer que pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre entier naturel p tels que $1 \leq p < n$ on a :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

Partie B.

Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher :

7 jetons blancs numérotés de 1 à 7 et 3 jetons noirs numérotés de 1 à 3.

On tire simultanément deux jetons de ce sac.

▶ 1a. On note A l'événement « obtenir deux jetons blancs ».

Démontrer que la probabilité de l'événement A est égale à $\dfrac{7}{15}$.

b. On note B l'événement « obtenir deux jetons portant des numéros impairs ».

Calculer la probabilité de B.

c. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

▶2. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de jetons blancs obtenus lors de ce tirage simultané.
a. Déterminer la loi de probabilité de X.
b. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.
c. Donner une minoration de la probabilité $P\left(\frac{11}{15} < X < \frac{31}{15}\right)$.

<table>
<tr><td rowspan="4">Exercice 3.</td><td>A.</td><td>$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \{1; 2; \dots; n-1\}$$
$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-1-p+1)!} + \frac{(n-1)!}{p!\,(n-1-p)!}$$
$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{p \times (n-1)!}{p \times (p-1)!\,(n-p)!} + \frac{(n-1)! \times (n-p)}{p!\,(n-1-p)! \times (n-p)}$$
$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{p \times (n-1)! + (n-1)! \times (n-p)}{p!\,(n-p)!}$$
$$= \frac{(n-1)! \times (p+n-p)}{p!\,(n-p)!}$$
$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \binom{n}{p}$$</td></tr>
<tr><td>B1a.</td><td>Le nombre de cas possibles correspond au choix de 2 boules parmi 10 soit $\binom{10}{2} = 45$
Le nombre de cas favorables correspond au choix de 2 boules parmi 7 soit $\binom{7}{2} = 21$
$$P(A) = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$$</td></tr>
<tr><td>B1b.</td><td>Le nombre de cas favorables correspond maintenant au choix de 2 boules parmi les 6 boules qui portent un numéro impair soit $\binom{6}{2} = 15$
donc $P(B) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$</td></tr>
<tr><td>B1c.</td><td>$A \cap B$ est l'événement « obtenir deux jetons blancs portant des numéros impairs »
Le nombre de cas favorables correspond maintenant au choix de 2 boules parmi les 4 boules blanches qui portent un numéro impair soit $\binom{4}{2} = 6$ donc $P(A \cap B) = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$
$$\text{or } \; P(A) \times P(B) = \frac{7}{15} \times \frac{15}{45} = \frac{7}{45} \neq \frac{2}{15} = P(A \cap B)$$
donc les événements A et B ne sont pas indépendants.</td></tr>
</table>

	B2a.	La variable aléatoire X peut prendre comme valeur $\{0; 1; 2\}$ $P(X=0)=\dfrac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}}=\dfrac{3}{45}=\dfrac{1}{15}$ $P(X=1)=\dfrac{\binom{3}{1}\times\binom{7}{1}}{\binom{10}{2}}=\dfrac{3\times 7}{45}=\dfrac{7}{15}$ $P(X=2)=\dfrac{7}{15}$
	B2b.	$E(X)=\dfrac{1}{15}\times 0+\dfrac{7}{15}\times 1+\dfrac{7}{15}\times 2=\dfrac{21}{15}=\dfrac{7}{5}$ $V(X)=\dfrac{1}{15}\times\left(0-\dfrac{7}{5}\right)^2+\dfrac{7}{15}\times\left(1-\dfrac{7}{5}\right)^2+\dfrac{7}{15}\times\left(2-\dfrac{7}{5}\right)^2=\dfrac{28}{75}$
	B2c.	$P\left(\dfrac{11}{15}<X<\dfrac{31}{15}\right)=P\left(\dfrac{11}{15}-\dfrac{7}{5}<X-\dfrac{7}{5}<\dfrac{31}{15}-\dfrac{7}{5}\right)$ $=P\left(-\dfrac{2}{3}<X-\dfrac{7}{5}<\dfrac{2}{3}\right)$ $=P\left(\left\lvert X-\dfrac{7}{5}\right\rvert<\dfrac{2}{3}\right)$ $=1-P\left(\left\lvert X-\dfrac{7}{5}\right\rvert\geq\dfrac{2}{3}\right)$ or, on sait que, $\forall t\in\mathbb{R}^+$ $P\left(\left\lvert X-\dfrac{7}{5}\right\rvert\geq t\right)\leq\dfrac{V}{t^2}$ $P\left(\left\lvert X-\dfrac{7}{5}\right\rvert\geq\dfrac{2}{3}\right)\leq\dfrac{28}{75\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}$ $P\left(\left\lvert X-\dfrac{7}{5}\right\rvert\geq\dfrac{2}{3}\right)\leq 0{,}84$ $-P\left(\left\lvert X-\dfrac{7}{5}\right\rvert\geq\dfrac{2}{3}\right)\geq -0{,}84$ $1-P\left(\left\lvert X-\dfrac{7}{5}\right\rvert\geq\dfrac{2}{3}\right)\geq 0{,}16$ $P\left(\dfrac{11}{15}<X<\dfrac{31}{15}\right)\geq 0{,}16$

Correction de l'exercice 4. difficulté ★★

Un code antivol d'un autoradio est un nombre de quatre chiffres, chaque chiffre pouvant prendre l'une des dix valeurs 0, 1, ... , 9.

▸1. a. Quel est le nombre de codes possibles ?

b. Quel est le nombre de codes formés de quatre chiffres distincts deux à deux ?

▸2. Après une coupure d'alimentation électrique, le propriétaire doit réintroduire le code pour pouvoir utiliser son autoradio.

Il sait que les quatre chiffres de son code sont 1, 9, 9 et 5, mais il a oublié l'ordre de ces chiffres.
a. Combien de codes différents peut-il composer avec ces 4 chiffres ?
b. Si le premier code introduit n'est pas le bon, le propriétaire doit attendre 2 minutes avant de pouvoir tenter un second essai ; le délai d'attente entre le second et le troisième essai est de 4 minutes, entre le troisième et le quatrième essai, il est de 8 minutes... (le délai d'attente double entre deux essais successifs).
Combien de codes le propriétaire peut-il introduire au maximum en 24 heures.

<table>
<tr><td rowspan="5">Exercice 4.</td><td>1a.</td><td>Le nombre de codes possibles correspond au choix, avec répétition, de 4 chiffres parmi les 10 chiffres de 0 à 9 soit $10^4 = 10\,000$.</td></tr>
<tr><td>1b.</td><td>Le nombre de codes formés de quatre chiffres distincts deux à deux correspond au choix, sans répétition, de 4 chiffres parmi les 10 chiffres de 0 à 9 soit $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\,040$.</td></tr>
<tr><td>2a.</td><td>Le nombre de codes différents que l'on peut composer en permutant 4 chiffres est : $4! = 24$.
Ici, le chiffre 9 est en commun donc il y en a 2 fois moins soir 12 codes possibles.</td></tr>
<tr><td>2b.</td><td>Soit $n \in \mathbb{N}^*$, notons u_n le temps d'attente entre n^e essai et le $(n+1)^e$ essai. On a alors $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 2 \times u_n$.
La suite (u_n) est donc géométrique de raison 2 donc
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$$
Le temps d'attente global est donc la somme des termes de cette suite géométrique :
$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 2 + 2^2 + \cdots + 2^n$$
$$= 2 \times \frac{1-2^n}{1-2} = 2(2^n - 1) = 2^{n+1} - 2$$
Résolvons alors : $2^{n+1} - 2 \leq 24 \times 60$
$$2^{n+1} - 2 \leq 1440$$
$$\Leftrightarrow 2^{n+1} \leq 1442$$
$$\Leftrightarrow \ln(2^{n+1}) \leq \ln(1442)$$
$$\Leftrightarrow (n+1)\ln(2) \leq \ln(1442)$$
$$\Leftrightarrow n+1 \leq \frac{\ln(1442)}{\ln(2)}$$
$$\Leftrightarrow n \leq \frac{\ln(1442)}{\ln(2)} - 1$$
$$\text{or} \quad \frac{\ln(1442)}{\ln(2)} - 1 \approx 9{,}49$$
Le propriétaire ne pourra tester que 9 codes au maximum en 24 heures</td></tr>
</table>