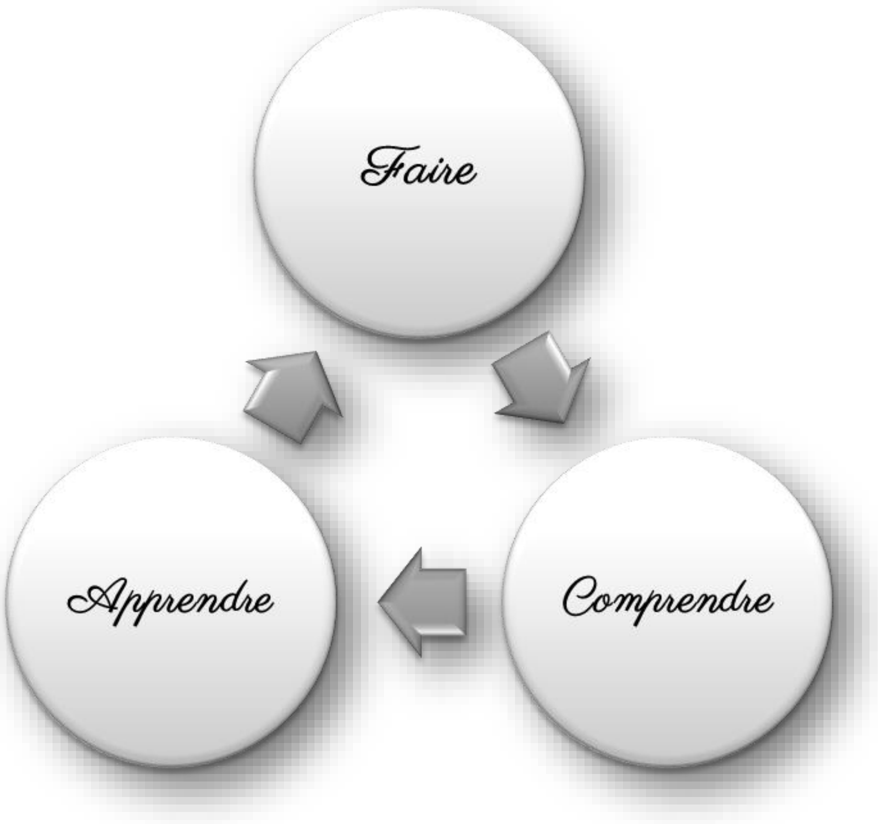


Table des matières

Terminale ➡ Préparation au BAC

Spécialité Mathématiques

Enoncé des exercices

Exercice 1. difficulté ★

On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1. Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(D; \overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DH}\right)$. On note K le point qui vérifie $\overrightarrow{KD} + 2\overrightarrow{KF} = \vec{0}$.

Partie A

▶ 1. Montrer que le point K a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

▶ 2. Montrer que les droites (EK) et (DF) sont orthogonales.

▶ 3. Calculer la distance EK.

Partie B

Soit M un point du segment $[HG]$. On note $m = HM$ (m est donc un réel appartenant à $[0; 1]$).

▶ 1. Montrer que, pour tout réel m appartenant à l'intervalle $[0; 1]$, le volume du tétraèdre $EMFD$, en unités de volume, est égal à $\frac{1}{6}$.

▶ 2. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (MFD) est $(-1 + m)x + y - mz = 0$.

▶ 3. On note d_m la distance du point E au plan (MFD).

a. Montrer que, pour tout réel m appartenant à l'intervalle $[0; 1]$,

$$d_m = \frac{1}{\sqrt{2m^2 - 2m + 2}}.$$

b. Déterminer la position de M sur le segment $[HG]$ pour laquelle la distance d_m est maximale.

c. En déduire que lorsque la distance d_m est maximale, le point K est le projeté orthogonal de E sur le plan (MFD).

Exercice 2. difficulté ★

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k}\right)$, on considère les points : $A(2; 0; 3)$, $B(0; 2; 1)$, $C(-1; -1; 2)$ et $D(3; -3; -1)$.

▶ 1. Calcul d'un angle

a. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et en déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. Calculer les longueurs AB et AC.

c. À l'aide du produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, déterminer la valeur du cosinus de l'angle $B\hat{A}C$ puis donner une valeur approchée de la mesure de l'angle $B\hat{A}C$ au dixième de degré.

▶ 2. Calcul d'une aire

a. Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par le point C et perpendiculaire à la droite (AB).

b. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

c. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal E du point C sur la droite (AB), c'est-à-dire du point d'intersection de la droite (AB) et du plan $\mathcal{P}$.

d. Calculer l'aire du triangle ABC.

▶ 3. Calcul d'un volume

a. Soit le point $F(1; -1; 3)$. Montrer que les points A, B, C et F sont coplanaires.

b. Vérifier que la droite (FD) est orthogonale au plan (ABC).
c. Sachant que le volume d'un tétraèdre est égal au tiers de l'aire de sa base multipliée par sa hauteur, calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

↑

Exercice 3. difficulté ★★

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k}\right)$, on considère :
- le point A de coordonnées $(-1;1;3)$,
- la droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

On admet que le point A n'appartient pas à la droite $\mathcal{D}$.
▶1. a. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $\mathcal{D}$.
b. Montrer que le point $B(-1;3;0)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$.
c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\vec{u}$.
▶2. On note $\mathcal{P}$ le plan passant par le point A et orthogonal à la droite $\mathcal{D}$, et on appelle H le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite $\mathcal{D}$. Ainsi, H est le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathcal{D}$.
a. Montrer que le plan $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne : $2x - y + 2z - 3 = 0$.
b. En déduire que le point H a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9};\frac{19}{9};\frac{16}{9}\right)$.
c. Calculer la longueur AH. On donnera une valeur exacte.
▶3. Dans cette question, on se propose de retrouver les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathcal{D}$, par une autre méthode.
On rappelle que le point $B(-1;3;0)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ et que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.
a. Justifier qu'il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{HB} = k\,\vec{u}$.
b. Montrer que $k = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$.
c. Calculer la valeur du nombre réel k et retrouver les coordonnées du point H.
▶4. On considère un point C appartenant au plan $\mathcal{P}$ tel que le volume du tétraèdre $ABCH$ soit égal à $\frac{8}{9}$. Calculer l'aire du triangle ACH.

↑

Exercice 4. difficulté ★★

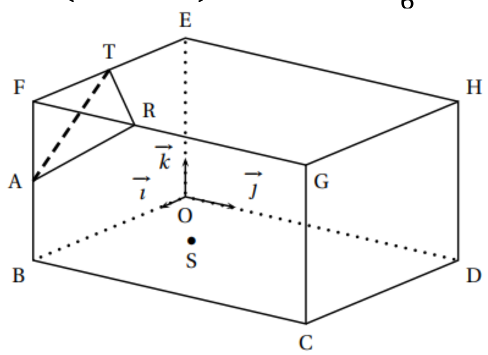
L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k}\right)$. On considère les points $A(5;0;-1)$, $B(1;4;-1)$, $C(1;0;3)$, $D(5;4;3)$ et $E(10;9;8)$.
▶1. a. Soit R le milieu du segment $[AB]$. Calculer les coordonnées du point R ainsi que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
b. Soit $\mathcal{P}_1$ le plan passant par le point R et dont $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_1$ est : $x - y - 1 = 0$.
c. Démontrer que le point E appartient au plan $\mathcal{P}_1$ et que $EA = EB$.
▶2. On considère le plan $\mathcal{P}_2$ d'équation cartésienne $x - z - 2 = 0$.
a. Justifier que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.
b. On note Δ la droite d'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.
Démontrer qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

▶3. On considère le plan $\mathcal{P}_3$ d'équation cartésienne $y + z - 3 = 0$.
Justifier que la droite Δ est sécante au plan $\mathcal{P}_3$ en un point Ω dont on déterminera les coordonnées.
Si S et T sont deux points distincts de l'espace, on rappelle que l'ensemble des points M de l'espace tels que $MS = MT$ est un plan, appelé plan médiateur du segment $[ST]$. On admet que les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont les plans médiateurs respectifs des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$.
▶4. a. Justifier que $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$.
b. En déduire que les points A, B, C et D appartiennent à une même sphère dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 5. difficulté ★★

Une exposition d'art contemporain a lieu dans une salle en forme de pavé droit de largeur 6 m, de longueur 8 m et de hauteur 4 m. Elle est représentée par le parallélépipède rectangle $OBCDEFGH$ où $OB = 6$ m, $OD = 8$ m et $OE = 4$ m.
On utilise le repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k}\right)$ tel que $\vec{\imath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OB}$, $\vec{\jmath} = \frac{1}{8}\overrightarrow{OD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OE}$.



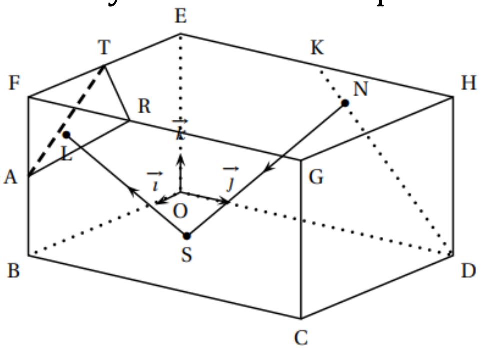
Dans ce repère on a, en particulier $C(6; 8; 0)$, $F(6; 0; 4)$ et $G(6; 8; 4)$.
Une des œuvres exposées est un triangle de verre représenté par le triangle ART qui a pour sommets $A(6; 0; 2)$, $R(6; 3; 4)$ et $T(3; 0; 4)$. Enfin, S est le point de coordonnées $\left(3; \frac{5}{2}; 0\right)$.
▶1. a. Vérifier que le triangle ART est isocèle en A.
b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AR}.\overrightarrow{AT}$.
c. En déduire une valeur approchée à 0,1 degré près de l'angle $R\hat{A}T$.
▶2. a. Justifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ART).
b. En déduire une équation cartésienne du plan (ART).
▶3. Un rayon laser dirigé vers le triangle ART est émis du plancher à partir du point S.
On admet que ce rayon est orthogonal au plan (ART).
a. Soit Δ la droite orthogonale au plan (ART) et passant par le point S.
Justifier que le système ci-dessous est une représentation paramétrique de la droite Δ :

$$\begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = \dfrac{5}{2} - 2k \\ z = 3k \end{cases} \text{ où } k \in \mathbb{R}.$$

b. Soit L le point d'intersection de la droite Δ, avec le plan (ART).

Démontrer que L a pour coordonnées $\left(5\,; \frac{1}{2}\,; 3\right)$.

▶4. L'artiste installe un rail représenté par le segment $[DK]$ ou K est le milieu du segment $[EH]$. Sur ce rail, il positionne une source lumineuse laser en un point N du segment $[DK]$ et il oriente ce second rayon laser vers le point S.



a. Montrer que, pour tout réel t de l'intervalle $[0; 1]$, le point N de coordonnées $(0; 8 - 4t\,; 4t)$ est un point du segment $[DK]$.

b. Calculer les coordonnées exactes du point N tel que les deux rayons laser représentés par les segments $[SL]$ et $[SN]$ soient perpendiculaires.

Exercice 6. difficulté ★★★

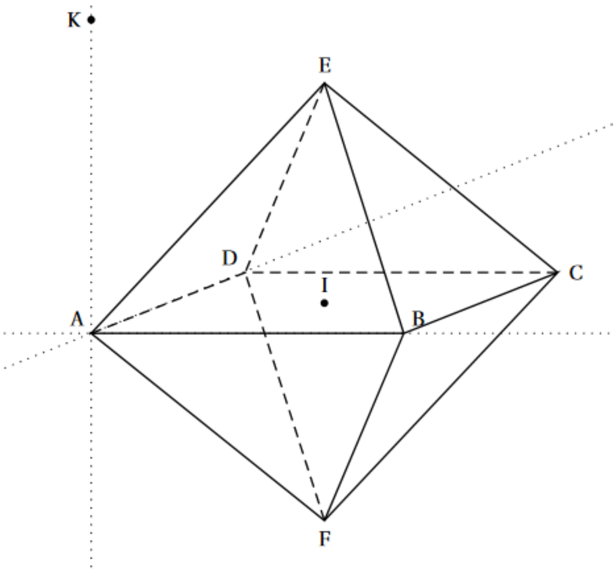
On considère un solide $ADECBF$ constitué de deux pyramides identiques ayant pour base commune le carré ABCD de centre I. Une représentation en perspective de ce solide est donnée. Toutes les arêtes sont de longueur 1.

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AK}\right)$.

▶1. a) Montrer que $IE = \frac{\sqrt{2}}{2}$. En déduire les coordonnées des points I, E et F.

b) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABE).

c) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABE).



▶2. On nomme M le milieu du segment $[DF]$ et N celui du segment $[AB]$.

a) Démontrer que les plans (FDC) et (ABE) sont parallèles.

b) Déterminer l'intersection des plans (EMN) et (FDC).

c) Construire la section du solide $ADECBF$ par le plan (EMN).

Terminale ➡ Préparation au BAC
Spécialité Mathématiques
Correction des exercices

Correction de l'exercice 1. difficulté ★

On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1. Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(D; \overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DH}\right)$. On note K le point qui vérifie $\overrightarrow{KD} + 2\overrightarrow{KF} = \vec{0}$.

Partie A

▶1. Montrer que le point K a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

▶2. Montrer que les droites (EK) et (DF) sont orthogonales.

▶3. Calculer la distance EK.

Partie B

Soit M un point du segment $[HG]$. On note $m = HM$ (m est donc un réel appartenant à $[0; 1]$).

▶1. Montrer que, pour tout réel m appartenant à l'intervalle $[0; 1]$, le volume du tétraèdre $EMFD$, en unités de volume, est égal à $\frac{1}{6}$.

▶2. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (MFD) est $(-1 + m)x + y - mz = 0$.

▶3. On note d_m la distance du point E au plan (MFD).

a. Montrer que, pour tout réel m appartenant à l'intervalle $[0; 1]$,

$$d_m = \frac{1}{\sqrt{2m^2 - 2m + 2}}.$$

b. Déterminer la position de M sur le segment $[HG]$ pour laquelle la distance d_m est maximale.

c. En déduire que lorsque la distance d_m est maximale, le point K est le projeté orthogonal de E sur le plan (MFD).

Exercice 1.	**A1.**	$$\begin{aligned} &\overrightarrow{KD} + 2\overrightarrow{KF} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{KD} + 2\left(\overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DF}\right) = \vec{0} \\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{KD} + 2\overrightarrow{KD} + 2\overrightarrow{DF} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow\ &3\overrightarrow{KD} + 2\overrightarrow{DF} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow\ &3\overrightarrow{DK} = 2\overrightarrow{DF} \\ \Leftrightarrow\ &3\overrightarrow{DK} = 2\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}\right) \\ \Leftrightarrow\ &3\overrightarrow{DK} = 2\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BF} \\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{DK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DH} \end{aligned}$$ Le point K a donc pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$

	A2.	$D(0;0;0) \quad E(1;0;1) \quad F(1;1;1)$ $\overrightarrow{EK}\begin{pmatrix}-1/3\\2/3\\-1/3\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EK}.\overrightarrow{DF} = -\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=0$ Les droites (EK) et (DF) sont donc orthogonales.
	A3.	$\overrightarrow{EK}\begin{pmatrix}-1/3\\2/3\\-1/3\end{pmatrix}$ donc $EK = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2}$ $EK = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ **ou bien** $\boldsymbol{EK = \sqrt{\frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$
	B1.	$\forall m \in [0;1]$, l'aire du triangle EMF est égale à : $\frac{b\times h}{2} = \frac{EF\times EH}{2} = \frac{1}{2}$ La hauteur du tétraèdre $EMFD$ est égale à $HD = 1$. J'en déduis que le volume du tétraèdre $EMFD$ vaut : $\frac{\frac{1}{2}\times 1}{3} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$
	B2.	$(-1+m)x+y-mz=0$ est l'équation d'un plan $\mathcal{P}$ $M(0;m;1) \quad F(1;1;1) \quad D(0;0;0)$ Vérifions que les points M, F et D vérifient chacun l'équation $(-1+m)x+y-mz=0$ $(-1+m)\times 0+0-m\times 0=0$ donc $D\in\mathcal{P}$ $(-1+m)\times 1+1-m\times 1=-1+m+1-m=0$ donc $F\in\mathcal{P}$ $(-1+m)\times 0+m-m\times 1=m-m=0$ donc $M\in\mathcal{P}$ Le plan $\mathcal{P}$ est donc confondu avec le plan (MFD) Et donc, une équation cartésienne du plan (MFD) est bien $(-1+m)x+y-mz=0$

	B3a.	$(-1+m)x+y-mz=0$ est une équation du plan (MFD) donc $\vec{n}\begin{pmatrix}-1+m\\1\\-m\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (MFD). Déterminons l'équation de la droite passant par $E(1;0;1)$ et de vecteur directeur $\vec{n}\begin{pmatrix}-1+m\\1\\-m\end{pmatrix}$: $\begin{cases}x=1+(m-1)t\\y=t\\z=1-mt\end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$ Déterminons maintenant l'intersection entre cette droite et le plan (MFD) que l'on notera $E'(x;y;z)$ $\begin{cases}x=1+(m-1)t\\y=t\\z=1-mt\end{cases}$ et $(-1+m)x+y-mz=0$ $(-1+m)(1+(m-1)t)+t-m(1-mt)=0$ $(-1+m)(1+mt-t)+t-m+m^2t=0$ $-1-mt+t+m+m^2t-mt+t-m+m^2t=0$ $2m^2t-2mt+2t-1=0$ $(2m^2-2m+2)t=1$ or $2m^2-2m+2>0\ \ \forall m\in[0;1]$ car $\Delta=-12<0$ $t=\dfrac{1}{2m^2-2m+2}$ alors $\overrightarrow{EE'}\begin{pmatrix}x-1\\y\\z-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EE'}\begin{pmatrix}(m-1)t\\t\\-mt\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EE'}\begin{pmatrix}\dfrac{m-1}{2m^2-2m+2}\\\dfrac{1}{2m^2-2m+2}\\\dfrac{-m}{2m^2-2m+2}\end{pmatrix}$ Et donc, $d_m=EE'$ $d_m=\sqrt{\left(\dfrac{m-1}{2m^2-2m+2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2m^2-2m+2}\right)^2+\left(\dfrac{-m}{2m^2-2m+2}\right)^2}$ $d_m=\sqrt{\dfrac{m^2-2m+1+1+m^2}{(2m^2-2m+2)^2}}=\sqrt{\dfrac{2m^2-2m+2}{(2m^2-2m+2)^2}}$ $d_m=\sqrt{\dfrac{1}{2m^2-2m+2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2m^2-2m+2}}$

B3b.

$$\forall m \in [0;1], f(m) = \frac{1}{\sqrt{2m^2 - 2m + 2}}$$

f est dérivable sur $[0;1]$

$$\forall m \in [0;1], f'(m) = \frac{-1 \times \dfrac{4m-2}{2\sqrt{2m^2-2m+2}}}{2m^2-2m+2}$$

$$f'(m) = \frac{-2m+1}{(2m^2-2m+2)\sqrt{2m^2-2m+2}}$$

$$\begin{aligned} f'(m) > 0 &\Leftrightarrow -2m+1 > 0 \text{ car } 2m^2-2m+2>0 \\ &\Leftrightarrow -2m > -1 \\ &\Leftrightarrow m < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2 \times \frac{1}{4} - 2 \times \frac{1}{2} + 2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} - 1 + 2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

m	0	$\frac{1}{2}$	1
$f'(m)$	$+$	0	$-$
$f(m)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\nearrow$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\searrow$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

La distance d_m est maximale pour $m = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire lorsque M est le milieu du segment $[HG]$.

B3c.

On en déduire que, pour $m = \frac{1}{2}$,

$$\overrightarrow{EE'}\begin{pmatrix} \dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} \\ \dfrac{1}{\frac{3}{2}} \\ \dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{EE'}\begin{pmatrix} \dfrac{-1}{3} \\ \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{-1}{3} \end{pmatrix} \text{ or } E(1;0;1)$$

Donc $E'\left(-\frac{1}{3}+1; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}+1\right)$ c'est-à-dire $E'\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$

Les points E' et K sont donc confondus.

Le point K est donc le projeté orthogonal de E sur le plan (MFD).

Correction de l'exercice 2. difficulté ★

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k}\right)$, on considère les points : $A(2;0;3)$, $B(0;2;1)$, $C(-1;-1;2)$ et $D(3;-3;-1)$.

▶1. Calcul d'un angle

a. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et en déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
b. Calculer les longueurs AB et AC.
c. À l'aide du produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, déterminer la valeur du cosinus de l'angle $B\hat{A}C$ puis donner une valeur approchée de la mesure de l'angle $B\hat{A}C$ au dixième de degré.

▶2. Calcul d'une aire

a. Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par le point C et perpendiculaire à la droite (AB).
b. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).
c. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal E du point C sur la droite (AB), c'est-à-dire du point d'intersection de la droite (AB) et du plan $\mathcal{P}$.
d. Calculer l'aire du triangle ABC.

▶3. Calcul d'un volume

a. Soit le point $F(1;-1;3)$. Montrer que les points A, B, C et F sont coplanaires.
b. Vérifier que la droite (FD) est orthogonale au plan (ABC).
c. Sachant que le volume d'un tétraèdre est égal au tiers de l'aire de sa base multipliée par sa hauteur, calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

<table>
<tr><td rowspan="3">Exercice 2.</td><td>1a.</td><td>
$A(2;0;3)$, $B(0\,;2\,;1)$, $C(-1\,;-1\,;2)$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}\quad\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\frac{-2}{-3}\neq\frac{2}{-1}\neq-\frac{2}{-1}$$

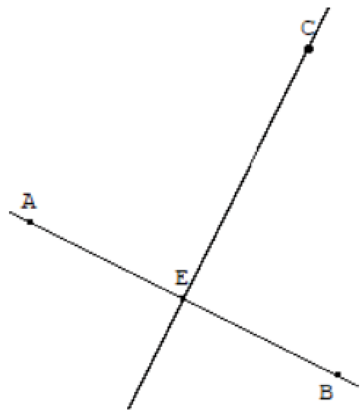
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont donc pas colinéaires. Par conséquent, les points A, B et C ne sont pas alignés.
</td></tr>
<tr><td>1b.</td><td>
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}$ donc $AB=\sqrt{4+4+4}=2\sqrt{3}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-1\\-1\end{pmatrix}$ donc $AC=\sqrt{9+1+1}=\sqrt{11}$
</td></tr>
<tr><td>1c.</td><td>
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-2\times(-3)+2\times(-1)+(-2)\times(-1)$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=6-2+2=6$$

or $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\left(B\hat{A}C\right)=2\sqrt{3}\times\sqrt{11}\times\cos\left(B\hat{A}C\right)$

$$2\sqrt{3}\times\sqrt{11}\times\cos\left(B\hat{A}C\right)=6$$
$$\cos\left(B\hat{A}C\right)=\frac{6}{2\sqrt{33}}=\frac{\sqrt{33}}{11}$$

Donc $B\hat{A}C=\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{33}}{11}\right)\approx 58{,}5°$
</td></tr>
</table>

	2a.	Le plan $\mathcal{P}$ passe par le point C et perpendiculaire à la droite (AB) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}$ donc l'équation du plan est $-2x+2y-2z+d=0$ or $C(-1\,;-1\,;2)\in\mathcal{P}$ donc $-2\times(-1)+2\times(-1)-2\times 2+d=0$ $\Leftrightarrow 2-2-4+d=0$ $\Leftrightarrow d=4$ L'équation du plan est $-2x+2y-2z+4=0$ $\Leftrightarrow -x+y-z+2=0$
	2b.	$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}$ et $A(2;0;3)$ Une représentation paramétrique de la droite (AB) est donc : $\begin{cases}x=2-2t\\y=2t\\z=3-2t\end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$
	2c.	Le projeté orthogonal E du point C sur la droite (AB) est l'intersection de la droite (AB) et du plan $\mathcal{P}$ $-x+y-z+2=0$ $\Leftrightarrow -(2-2t)+2t-(3-2t)+2=0$ $\Leftrightarrow -2+2t+2t-3+2t+2=0$ $\Leftrightarrow 6t-3=0$ $\Leftrightarrow 6t=3$ $\Leftrightarrow t=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ donc $\begin{cases}x=2-\frac{2}{2}=1\\y=\frac{2}{2}=1\\z=3-\frac{2}{2}=2\end{cases}$ c'està dire $E(1;1;2)$
	2d.	$AB=2\sqrt{3}$ $C(-1\,;-1\,;2)$ $E(1;1;2)$ $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$ donc $CE=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$ L'aire du triangle ABC vaut donc : $\frac{2\sqrt{3}\times 2\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{6}$ 

	3a.	$$A(2;0;3), F(1;-1;3)$$ $$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-1\\-1\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$$ Déterminons les réels x, y et z tels que : $$x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AF}=\vec{0}$$ $$\begin{cases}-2x-3y-z=0\\2x-y-z=0\\-2x-y=0\end{cases}$$ En retranchant les deux premières lignes : $$\Leftrightarrow\begin{cases}-2x-3y-z=0\\-4x-2y=0\\-2x-y=0\end{cases}$$ Les deux dernières lignes sont équivalentes donc : $$\Leftrightarrow\begin{cases}-2x-3y-z=0\\y=-2x\end{cases}$$ $$\Leftrightarrow\begin{cases}y=-2x\\z=4x\end{cases}$$ En choisissant $x=1$, on a pour solution $y=-2$ et $z=4$ $$\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{AF}=\vec{0}$$ $$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AF}$$ On en déduit que les points A, B, C et F sont coplanaires.
	3b.	$$D(3;-3;-1), F(1;-1;3)$$ $$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-1\\-1\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{FD}\begin{pmatrix}2\\-2\\-4\end{pmatrix}$$ $\overrightarrow{FD}.\overrightarrow{AB}=2\times(-2)-2\times 2-4\times(-2)=-4-4+8=0$ $\overrightarrow{FD}.\overrightarrow{AC}=2\times(-3)-2\times(-1)-4\times(-1)=-6+2+4=0$ La droite (FD) est donc orthogonale à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) donc la droite (FD) est orthogonale au plan (ABC).
	3c.	En prenant le triangle ABC pour base du tétraèdre, la hauteur du tétraèdre est donc le projeté orthogonale du point D sur le plan (ABC). Il s'agit donc du point F. $$FD=\sqrt{4+4+16}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$$ $$\mathcal{V}=\frac{1}{3}\times 2\sqrt{6}\times 2\sqrt{6}=8$$

Correction de l'exercice 3. difficulté ★★

Dans l’espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k}\right)$, on considère :
• le point A de coordonnées $(-1;1;3)$,
• la droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

On admet que le point A n’appartient pas à la droite $\mathcal{D}$.
▶1. a. Donner les coordonnées d’un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $\mathcal{D}$.
b. Montrer que le point $B(-1;3;0)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$.
c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\vec{u}$.
▶2. On note $\mathcal{P}$ le plan passant par le point A et orthogonal à la droite $\mathcal{D}$, et on appelle H le point d’intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite $\mathcal{D}$. Ainsi, H est le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathcal{D}$.
a. Montrer que le plan $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne : $2x - y + 2z - 3 = 0$.
b. En déduire que le point H a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9};\frac{19}{9};\frac{16}{9}\right)$.
c. Calculer la longueur AH. On donnera une valeur exacte.
▶3. Dans cette question, on se propose de retrouver les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathcal{D}$, par une autre méthode.
On rappelle que le point $B(-1;3;0)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ et que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.
a. Justifier qu’il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{HB} = k\,\vec{u}$.
b. Montrer que $k = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$.
c. Calculer la valeur du nombre réel k et retrouver les coordonnées du point H.
▶4. On considère un point C appartenant au plan $\mathcal{P}$ tel que le volume du tétraèdre $ABCH$ soit égal à $\frac{8}{9}$. Calculer l’aire du triangle ACH.

Exercice 3.	**1a.**	Un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $\mathcal{D}$ a pour coordonnées : $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
	1b.	$B(-1;3;0)$ Pour $t = -1$, $\begin{cases} x = 1 - 2 = -1 \\ y = 2 + 1 = 3 \\ z = 2 - 2 = 0 \end{cases}$ donc $B \in \mathcal{D}$
	1c.	$A(-1;1;3)$ $B(-1;3;0)$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}.\vec{u} = 0 \times 2 + 2 \times (-1) - 3 \times 2 = -2 - 6 = -8$

<table>
<tr><td></td><td>2a.</td><td>$\mathcal{P}$ le plan passant par le point A et orthogonal à la droite $\mathcal{D}$ donc $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ donc son équation est :
$$2x - y + 2z + d = 0$$
or $A(-1;1;3) \in \mathcal{P}$ donc
$$-2 - 1 + 6 + d = 0$$
$$\Leftrightarrow 3 + d = 0$$
$$\Leftrightarrow d = -3$$
$\mathcal{P}$ a pour équation : $2x - y + 2z - 3 = 0$</td></tr>
<tr><td></td><td>2b.</td><td>H est le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite $\mathcal{D}$ donc
$$2x - y + 2z - 3 = 0 \text{ et } \begin{cases}x = 1 + 2t\\ y = 2 - t\\ z = 2 + 2t\end{cases}$$
$$2(1+2t) - (2-t) + 2(2+2t) - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2(1+2t) - (2-t) + 2(2+2t) - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2 + 4t - 2 + t + 4 + 4t - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow 9t + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow 9t = -1$$
$$\Leftrightarrow t = -\frac{1}{9}$$
$$\begin{cases}x = 1 - \frac{2}{9} = \frac{9}{9} - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}\\ y = 2 + \frac{1}{9} = \frac{18}{9} + \frac{1}{9} = \frac{19}{9}\\ z = 2 - \frac{2}{9} = \frac{18}{9} - \frac{2}{9} = \frac{16}{9}\end{cases}$$
Par conséquent, le point H a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9};\frac{19}{9};\frac{16}{9}\right)$.</td></tr>
<tr><td></td><td>2c.</td><td>$$A(-1;1;3) \quad H\left(\frac{7}{9};\frac{19}{9};\frac{16}{9}\right)$$
$$\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}16/9\\10/9\\-11/9\end{pmatrix}$$
donc $AH = \sqrt{\frac{256}{81} + \frac{100}{81} + \frac{121}{81}}$
$$AH = \sqrt{\frac{477}{81}} = \frac{3\sqrt{53}}{9} = \frac{\sqrt{53}}{3}$$</td></tr>
<tr><td></td><td>3a.</td><td>H est le projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathcal{D}$ donc $H \in \mathcal{D}$
$B(-1;3;0) \in \mathcal{D}$ et $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.
$\overrightarrow{HB}$ est donc colinéaire à $\vec{u}$, par conséquent il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{HB} = k\,\vec{u}$.</td></tr>
</table>

	3b.	$\overrightarrow{AB}.\vec{u} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}).\vec{u} = \overrightarrow{AH}.\vec{u} + \overrightarrow{HB}.\vec{u}$ $\overrightarrow{AB}.\vec{u} = \underbrace{\overrightarrow{AH}.\vec{u}}_{0} + k\vec{u}.\vec{u}$ $\overrightarrow{AB}.\vec{u} = k\Vert\vec{u}\Vert^2$ donc $k = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\vec{u}}{\Vert\vec{u}\Vert^2}$
	3c.	$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ donc $\Vert\vec{u}\Vert = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$ $k = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\vec{u}}{\Vert\vec{u}\Vert^2} = \dfrac{-8}{3^2} = -\dfrac{8}{9}$ $\overrightarrow{HB} = -\dfrac{8}{9}\,\vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{BH} = \dfrac{8}{9}\,\vec{u}$ $\begin{cases} x = -1 + \dfrac{8}{9} \times 2 = \dfrac{7}{9} \\ y = 3 + \dfrac{8}{9} \times (-1) = \dfrac{19}{9} \\ z = 0 + \dfrac{8}{9} \times 2 = \dfrac{16}{9} \end{cases}$ donc $H\left(\dfrac{7}{9};\dfrac{19}{9};\dfrac{16}{9}\right)$
	4.	$B(-1;3;0) \quad H\left(\dfrac{7}{9};\dfrac{19}{9};\dfrac{16}{9}\right)$ $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}16/9\\-8/9\\16/9\end{pmatrix}$ donc $BH = \sqrt{\dfrac{256}{81} + \dfrac{64}{81} + \dfrac{256}{81}} = \sqrt{\dfrac{576}{81}} = \dfrac{24}{9} = \dfrac{8}{3}$ On a alors : $\mathcal{V} = \frac{8}{9} = \frac{1}{3} \times \frac{8}{3} \times \mathcal{A}$ $\mathcal{A} = 1$ On considère un point C appartenant au plan $\mathcal{P}$ tel que le volume du tétraèdre $ABCH$ soit égal à $\frac{8}{9}$. Calculer l'aire du triangle ACH.

Correction de l'exercice 4. difficulté ★★

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. On considère les points $A(5;0;-1)$, $B(1;4;-1)$, $C(1;0;3)$, $D(5;4;3)$ et $E(10;9;8)$.

▶1. a. Soit R le milieu du segment $[AB]$. Calculer les coordonnées du point R ainsi que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

b. Soit $\mathcal{P}_1$ le plan passant par le point R et dont $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_1$ est : $x - y - 1 = 0$.

c. Démontrer que le point E appartient au plan $\mathcal{P}_1$ et que $EA = EB$.

▶2. On considère le plan $\mathcal{P}_2$ d'équation cartésienne $x - z - 2 = 0$.

a. Justifier que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

b. On note Δ la droite d'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

Démontrer qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

▶3. On considère le plan $\mathcal{P}_3$ d'équation cartésienne $y + z - 3 = 0$.
Justifier que la droite Δ est sécante au plan $\mathcal{P}_3$ en un point Ω dont on déterminera les coordonnées.
Si S et T sont deux points distincts de l'espace, on rappelle que l'ensemble des points M de l'espace tels que $MS = MT$ est un plan, appelé plan médiateur du segment $[ST]$. On admet que les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont les plans médiateurs respectifs des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$.
▶4. a. Justifier que $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$.
b. En déduire que les points A, B, C et D appartiennent à une même sphère dont on précisera le centre et le rayon.

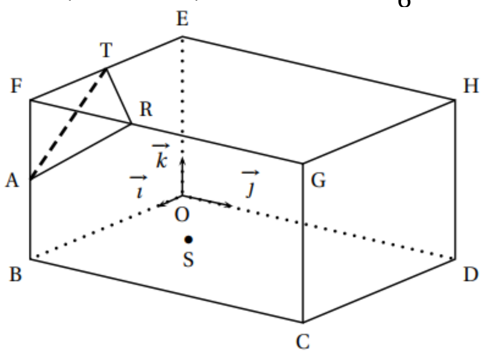
<table>
<tr><td rowspan="4">Exercice 4.</td><td>1a.</td><td>$A(5;0;-1) \quad B(1;4;-1)$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}$
R le milieu de $[AB]$ donc $R\left(\frac{5+1}{2};\frac{0+4}{2};\frac{-1-1}{2}\right)$
$R(3;2;-1)$</td></tr>
<tr><td>1b.</td><td>$\mathcal{P}_1$ est le plan passant par le point R et dont $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal
Son équation est donc de la forme : $-4x + 4y + d = 0$
or $R(3;2;-1) \in \mathcal{P}_1$
$-4 \times 3 + 4 \times 2 + d = 0$
$\Leftrightarrow -4 + d = 0$
$\Leftrightarrow d = 4$
L'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_1$ est donc : $-4x + 4y + 4 = 0$
$\Leftrightarrow x - y - 1 = 0$</td></tr>
<tr><td>1c.</td><td>$E(10;9;8)$
$10 - 9 - 1 = 0$
Donc le point E appartient au plan $\mathcal{P}_1$
$A(5;0;-1) \quad B(1;4;-1) \quad E(10;9;8)$
$\overrightarrow{EA}\begin{pmatrix}-5\\-9\\-9\end{pmatrix}$ donc $EA = \sqrt{25+81+81} = \sqrt{187}$
$\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix}-9\\-5\\-9\end{pmatrix}$ donc $EB = \sqrt{81+25+81} = \sqrt{187}$
donc $EA = EB$</td></tr>
<tr><td>2a.</td><td>Le plan $\mathcal{P}_2$ a pour équation cartésienne $x - z - 2 = 0$
donc un vecteur normal à $\mathcal{P}_2$ est $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$
or $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires donc les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles, par conséquent ils sont sécants.</td></tr>
</table>

	2b.	On note Δ la droite d'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. **Méthode n°1 : Je déterminer l'intersection sans utiliser la réponse donnée dans l'énoncé :** Soit $M(x;y;z) \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ donc $$x-y-1=0 \quad \text{et} \quad x-z-2=0$$ *En choisissant z comme paramètre :* $$x-z-2=0 \Leftrightarrow x=z+2$$ $$x-y-1=0 \Leftrightarrow y=x-1 \Leftrightarrow y=z+2-1=z+1$$ Une représentation paramétrique de l'intersection est donc : $$\begin{cases} x=2+t \\ y=1+t \\ z=t \end{cases} \text{où } t \in \mathbb{R}$$ Il s'agit bien de la droite Δ. (En choisissant x ou y comme paramètre, nous aurions obtenu une autre représentation paramétrique de la droite Δ). **Méthode n°2 : Je déterminer l'intersection en utilisant la réponse donnée dans l'énoncé :** La droite Δ est $\begin{cases} x=2+t \\ y=1+t \\ z=t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$. Je choisis deux points de Δ : Pour $t=0$, $M(2;1;0) \in \Delta$ Pour $t=1$, $N(3;2;1) \in \Delta$ Démontrons que M et N appartiennent aux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ $$\mathcal{P}_1 : x-y-1=0$$ $$2-1-1=0 \text{ donc } M(2;1;0) \in \mathcal{P}_1$$ $$3-2-1=0 \text{ donc } N(3;2;1) \in \mathcal{P}_1$$ $$\mathcal{P}_2 : x-z-2=0$$ $$2-0-2=0 \text{ donc } M(2;1;0) \in \mathcal{P}_2$$ $$3-1-2=0 \text{ donc } N(3;2;1) \in \mathcal{P}_2$$ L'intersection entre les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est donc bien la droite Δ.
	3.	$\mathcal{P}_3 : y+z-3=0$. Soit $\Omega(x;y;z) \in \Delta \cap \mathcal{P}_3$ donc $$\begin{cases} x=2+t \\ y=1+t \\ z=t \end{cases} \quad \text{et} \quad y+z-3=0$$ $$1+t+t-3=0$$ $$\Leftrightarrow 2t-2=0$$ $$\Leftrightarrow 2t=2$$ $$\Leftrightarrow t=\frac{2}{2}=1$$ donc $\Omega(3;2;1)$

	4a.	Si S et T sont deux points distincts de l'espace, on rappelle que l'ensemble des points M de l'espace tels que $MS = MT$ est un plan, appelé plan médiateur du segment $[ST]$. On admet que les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont les plans médiateurs respectifs des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$. $\mathcal{P}_1$ est le plan médiateur de $[AB]$ donc $\Omega A = \Omega B$ $\mathcal{P}_2$ est le plan médiateur de $[AC]$ donc $\Omega A = \Omega C$ et $\mathcal{P}_3$ est le plan médiateur de $[AD]$ donc $\Omega A = \Omega D$ On en déduit que $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$
	4b.	$A(5;0;-1)\quad \Omega(3;2;1)\quad \text{donc } \overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}$ $\Omega A = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3}$ On peut en déduire que les points A, B, C et D appartiennent à la sphère de centre Ω et le rayon $2\sqrt{3}$.

Correction de l'exercice 5. difficulté ★★

Une exposition d'art contemporain a lieu dans une salle en forme de pavé droit de largeur 6 m, de longueur 8 m et de hauteur 4 m. Elle est représentée par le parallélépipède rectangle $OBCDEFGH$ où $OB = 6$ m, $OD = 8$ m et $OE = 4$ m.
On utilise le repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k}\right)$ tel que $\vec{\imath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OB}$, $\vec{\jmath} = \frac{1}{8}\overrightarrow{OD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OE}$.



Dans ce repère on a, en particulier $C(6;8;0)$, $F(6;0;4)$ et $G(6;8;4)$.
Une des œuvres exposées est un triangle de verre représenté par le triangle ART qui a pour sommets $A(6;0;2)$, $R(6;3;4)$ et $T(3;0;4)$. Enfin, S est le point de coordonnées $\left(3;\frac{5}{2};0\right)$.

▶1. a. Vérifier que le triangle ART est isocèle en A.
b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AR}.\overrightarrow{AT}$.
c. En déduire une valeur approchée à 0,1 degré près de l'angle $R\hat{A}T$.

▶2. a. Justifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ART).
b. En déduire une équation cartésienne du plan (ART).

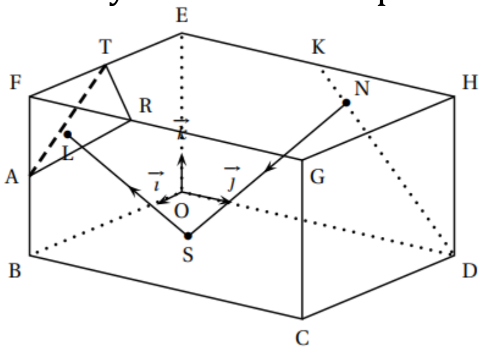
▶3. Un rayon laser dirigé vers le triangle ART est émis du plancher à partir du point S.
On admet que ce rayon est orthogonal au plan (ART).
a. Soit Δ la droite orthogonale au plan (ART) et passant par le point S.
Justifier que le système ci-dessous est une représentation paramétrique de la droite

Δ :

$$\begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = \dfrac{5}{2} - 2k \\ z = 3k \end{cases} \text{ où } k \in \mathbb{R}.$$

b. Soit L le point d'intersection de la droite Δ, avec le plan (ART).
Démontrer que L a pour coordonnées $\left(5\,;\frac{1}{2}\,;3\right)$.

▶4. L'artiste installe un rail représenté par le segment $[DK]$ ou K est le milieu du segment $[EH]$. Sur ce rail, il positionne une source lumineuse laser en un point N du segment $[DK]$ et il oriente ce second rayon laser vers le point S.



a. Montrer que, pour tout réel t de l'intervalle $[0; 1]$, le point N de coordonnées $(0; 8-4t\,; 4t)$ est un point du segment $[DK]$.
b. Calculer les coordonnées exactes du point N tel que les deux rayons laser représentés par les segments $[SL]$ et $[SN]$ soient perpendiculaires.

<table>
<tr><td rowspan="4">Exercice 5.</td><td>1a.</td><td>$A(6;0;2), R(6\,;3\,;4), T(3\,;0\,;4)$
$\overrightarrow{AR}\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$ donc $AR = \sqrt{0+9+4} = \sqrt{13}$
$\overrightarrow{AT}\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$ donc $AT = \sqrt{9+0+4} = \sqrt{13}$
Le triangle ART est donc isocèle en A.</td></tr>
<tr><td>1b.</td><td>$\overrightarrow{AR}.\overrightarrow{AT} = 0\times(-3) + 3\times 0 + 2\times 2 = 4$</td></tr>
<tr><td>1c.</td><td>$\overrightarrow{AR}.\overrightarrow{AT} = AR \times AT \times \cos(\widehat{RAT}) = \sqrt{13}\times\sqrt{13}\times\cos(\widehat{RAT})$
$\Leftrightarrow 13\times\cos(\widehat{RAT}) = 4$
$\Leftrightarrow \cos(\widehat{RAT}) = \dfrac{4}{13}$
$\Leftrightarrow \widehat{RAT} = \cos^{-1}\left(\dfrac{4}{13}\right) \approx 72{,}1°$</td></tr>
<tr><td>2a.</td><td>$\vec{n}.\overrightarrow{AR} = 2\times 0 - 2\times 3 + 3\times 2 = 0$ donc $\vec{n}\perp\overrightarrow{AR}$
$\vec{n}.\overrightarrow{AT} = 2\times(-3) - 2\times 0 + 3\times 2 = 0$ donc $\vec{n}\perp\overrightarrow{AT}$
Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ART) donc c'est un vecteur normal au plan (ART).</td></tr>
</table>

	2b.	Une équation cartésienne du plan (ART) est donc de la forme : $$2x-2y+3z+d=0$$ or $A(6;0;2)\in(ART)$ donc $$2\times 6-2\times 0+3\times 2+d=0$$ $$\Leftrightarrow 18+d=0$$ $$\Leftrightarrow d=-18$$ Une équation cartésienne du plan (ART) est donc : $$2x-2y+3z-18=0$$
	3a.	Δ est orthogonale au plan (ART), elle admet $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur et elle passe par le point $S\left(3;\frac{5}{2};0\right)$. Une équation paramétrique est donc : $$\begin{cases}x=3+2k\\ y=\dfrac{5}{2}-2k\\ z=3k\end{cases} \text{ où } k\in\mathbb{R}$$
	3b.	Soit $L(x;y;z)\in\Delta\cap(ART)$ donc $$\begin{cases}x=3+2k\\ y=\dfrac{5}{2}-2k\\ z=3k\end{cases} \quad \text{et} \quad 2x-2y+3z-18=0$$ $$2(3+2k)-2\left(\frac{5}{2}-2k\right)+3\times 3k-18=0$$ $$\Leftrightarrow 6+4k-5+4k+9k-18=0$$ $$\Leftrightarrow 17k-17=0$$ $$\Leftrightarrow 17k=17$$ $$\Leftrightarrow k=\frac{17}{17}=1$$ Par conséquent, $L\left(5\,;\frac{1}{2}\,;3\right)$.
	4a.	$$E(0;0\,;4) \quad H(0;8\,;4)$$ K est le milieu du segment $[EH]$ donc $K\left(\frac{0+0}{2};\frac{0+8}{2}\,;\frac{4+4}{2}\right)$ soit $K(0;4\,;4)$ $\forall t\in[0;1], N(0;8-4t\,;4t)$ $\quad D(0;8\,;0)$ et $K(0;4\,;4)$ $$\overrightarrow{DN}\begin{pmatrix}0\\8-4t-8\\4t\end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{DN}\begin{pmatrix}0\\-4t\\4t\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{DK}\begin{pmatrix}0\\-4\\4\end{pmatrix}$$ J'en déduis que $\overrightarrow{DN}=t\,\overrightarrow{DK}$ Par conséquent, puisque t est positif alors les vecteurs $\overrightarrow{DN}$ et $\overrightarrow{DK}$ ont le même sens. Et, puisque $t\leq 1$, la longueur DN est inférieure ou égale à la longueur DK. Par conséquent, $\forall t\in[0;1]$, N est un point du segment $[DK]$.

	4b.	$\forall t \in [0;1]$, $$S\left(3;\frac{5}{2};0\right) \quad L\left(5\,;\frac{1}{2}\,;3\right) \quad N(0;8-4t\,;4t)$$ $$\overrightarrow{SL}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{SN}\begin{pmatrix}-3\\8-4t-\frac{5}{2}\\4t-0\end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{SN}\begin{pmatrix}-3\\\frac{11}{2}-4t\\4t\end{pmatrix}$$ Les deux rayons laser représentés par les segments $[SL]$ et $[SN]$ sont orthogonaux lorsque : $$\overrightarrow{SL}.\overrightarrow{SN}=0$$ $$\Leftrightarrow 2\times(-3)-2\times\left(\frac{11}{2}-4t\right)+3\times 4t=0$$ $$\Leftrightarrow -6-11+8t+12t=0$$ $$\Leftrightarrow -17+20t=0$$ $$\Leftrightarrow 20t=17$$ $$\Leftrightarrow t=\frac{17}{20}=0{,}85$$ Les coordonnées de N sont alors : $N(0;4{,}6\,;3{,}4)$

Correction de l'exercice 6. difficulté ★★★

On considère un solide $ADECBF$ constitué de deux pyramides identiques ayant pour base commune le carré ABCD de centre I. Une représentation en perspective de ce solide est donnée. Toutes les arêtes sont de longueur 1.

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AK}\right)$.

▶1. a) Montrer que $IE=\frac{\sqrt{2}}{2}$. En déduire les coordonnées des points I, E et F.

b) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\-2\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABE).

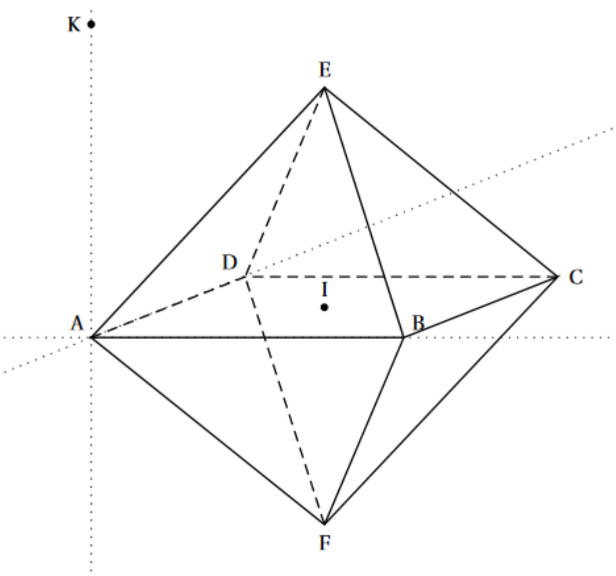
c) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABE).

▶2. On nomme M le milieu du segment $[DF]$ et N celui du segment $[AB]$.

a) Démontrer que les plans (FDC) et (ABE) sont parallèles.

b) Déterminer l'intersection des plans (EMN) et (FDC).

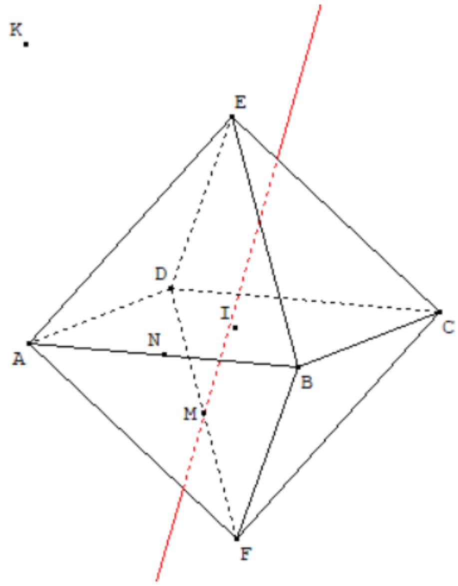
c) Construire la section du solide $ADECBF$ par le plan (EMN).



Exercice 6.	**1a.**	Dans le triangle ABC rectangle en B : $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$ $AC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ Donc $IA = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Dans le triangle EIA rectangle en I : $IE = \sqrt{EA^2 - IA^2}$ $IE = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ On a alors pour cordonnées $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$, $E\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $F\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
	1b.	$\vec{n}\begin{pmatrix}0\\-2\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$ et $E\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\\sqrt{2}/2\end{pmatrix}$ $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0 \times 1 - 2 \times 0 + \sqrt{2} \times 0 = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ $\vec{n}.\overrightarrow{AE} = 0 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{2} + \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{AE}$ Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABE) donc c'est un vecteur normal au plan (ABE).
	1c.	Une équation cartésienne du plan (ABE) est donc de la forme : $-2y + \sqrt{2}z + d = 0$ or $A(0;0;0) \in (ABE)$ donc $-2 \times 0 + \sqrt{2} \times 0 + d = 0$ $\Leftrightarrow d = 0$ Une équation cartésienne du plan (ABE) est donc : $-2y + \sqrt{2}z = 0$
	2a.	$\vec{n}\begin{pmatrix}0\\-2\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ $F\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $D(0;1;0)$ et $C(1;1;0)$ $\overrightarrow{FD}\begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\\sqrt{2}/2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\vec{n}.\overrightarrow{DC} = 0 \times 1 - 2 \times 0 + \sqrt{2} \times 0 = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{DC}$ $\vec{n}.\overrightarrow{FD} = 0 \times \frac{-1}{2} - 2 \times \frac{1}{2} + \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{FD}$ Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (FDC) donc c'est un vecteur normal au plan (FDC). On peut alors en déduire que les plans (FDC) et (ABE) sont parallèles.

2b.

M est le milieu du segment $[DF]$ donc
$M \in (FDC)$ et $M \in (EMN)$
L'intersection des plans (EMN) et (FDC) est donc une droite qui passe par le point M.



$$F\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\quad D(0;1;0)$$

M milieu du segment $[DF]$ donc

$$M\left(\frac{1}{2};\frac{\frac{1}{2}+1}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ soit } M\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$A(0;0;0),\quad B(1;0;0)$$

N milieu du segment $[AB]$ donc

$$N\left(\frac{1}{2};0;0\right)$$

$$E\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\quad M\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ et } N\left(\frac{1}{2};0;0\right)$$

L'équations du plan (EMN) est donc $x=\frac{1}{2}$.

Les plans (FDC) et (ABE) sont parallèles donc l'équation de (FDC) est de la forme : $-2y+\sqrt{2}z+d=0$ or il passe par $D(0;1;0)$
donc $-2\times 1+\sqrt{2}\times 0+d=0 \Leftrightarrow d=2$

$$(FDC) : -2y+\sqrt{2}z+2=0 \Leftrightarrow 2y=\sqrt{2}z+2 \Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{2}}{2}z+1$$

L'intersection des plans (EMN) et (FDC) est donc la droite d'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t+1 \\ z=t \end{cases} \quad \text{où } t\in\mathbb{R}$$

	2c.	On trace le segment $[EN]$. Les plans (FDC) et (ABE) sont parallèles. On trace donc la parallèle à (EN) qui passe par M, elle coupe le segment $[DC]$ au point Z. On trace les segments $[EZ]$ et $[ZM]$. De la même façon, la parallèle à (EZ) qui passe par N, elle coupe le segment $[DC]$ au point Y. On trace les segments $[NY]$ et $[YM]$.