Terminale Spécialité Mathématiques
Devoir à rédiger n° 1
Suite géométrique

Table des matières

Devoir à rédiger n° $\boxed{1}$
Suite géométrique
Enoncé du sujet

Toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation. La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1. Une curiosité mathématique ...

La suite (u_n) est définie par $u_n = 0,\underbrace{9999\ldots9}_{n \text{ fois}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

▶ 1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $10 \times u_{n+1} = u_n + 9$.

▶ 2. On utilise la suite définie par $v_n = u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

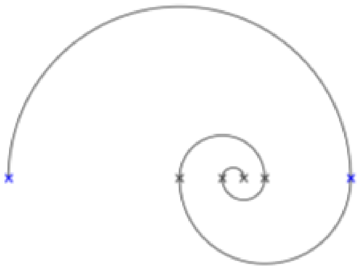
a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

b) En déduire une expression de v_n puis de u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Déterminer la limite de la suite (v_n), en déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 2. Jolie spirale !

Sur la figure ci-contre, chacun des demi-cercles a pour diamètre un rayon du demi-cercle précédent. Calculer la longueur de cette spirale lorsqu'elle est composée de 2023 demi-cercles, le rayon du plus grand mesurant 8 cm.



Devoir à rédiger n° $\boxed{1}$
Suite géométrique
Correction du sujet

Correction de l'exercice 1.

La suite (u_n) est définie par $u_n = 0,\underbrace{9999 \dots 9}_{n \text{ fois}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

▶1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $10 \times u_{n+1} = u_n + 9$.

▶2. On utilise la suite définie par $v_n = u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

b) En déduire une expression de v_n puis de u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

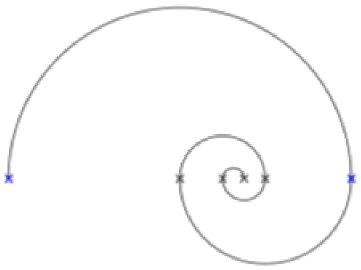
c) Déterminer la limite de la suite (v_n), en déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 1.	**1.**	Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $$u_n = 0,\underbrace{9999 \dots 9}_{n \text{ fois}}$$ $$\text{donc} \quad u_{n+1} = 0,\underbrace{9999 \dots 99}_{n+1 \text{ fois}}$$ $$10 \times u_{n+1} = 9,\underbrace{9999 \dots 9}_{n \text{ fois}}$$ $$10 \times u_{n+1} = 9 + 0,\underbrace{9999 \dots 9}_{n \text{ fois}}$$ $$10 \times u_{n+1} = 9 + u_n$$
	2a)	Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $$v_{n+1} = u_{n+1} - 1$$ $$v_{n+1} = \frac{9 + u_n}{10} - 1$$ $$v_{n+1} = \frac{9 + u_n - 10}{10}$$ $$v_{n+1} = \frac{u_n - 1}{10}$$ $$v_{n+1} = \frac{v_n}{10} = 0{,}1\, v_n$$ La suite (v_n) est donc géométrique de raison 0,1 et de 1er terme $$v_1 = 0{,}9 - 1 = -0{,}1$$
	2b)	J'en déduis que, pour tout entier non nul n, $v_n = \boldsymbol{v_1 \times q^{n-1}} = -0{,}1 \times 0{,}1^{n-1}$ et donc, $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = v_n + 1 = -0{,}1 \times 0{,}1^{n-1} + 1$$

	2c)	La suite (v_n) est donc géométrique de raison 0,1 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -0{,}1 \times 0{,}1^{n-1} = 0$ J'en déduis que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ On note : $0{,}999999\ldots. = 0{,}\underline{9} = 1$ *Le chiffre souligné signifie qu'il se répète à l'infini.*

Correction de l'exercice 2.

Sur la figure ci-contre, chacun des demi-cercles a pour diamètre un rayon du demi-cercle précédent. Calculer la longueur de cette spirale lorsqu'elle est composée de 2023 demi-cercles, le rayon du plus grand mesurant 8 cm.



Exercice 2.	Proposition de rédaction (qui n'est pas la seule possible ...) : Pour tout entier non nul n, notons R_n le rayon du n^e demi-cercle de la spirale, l'énoncé nous permet d'écrire que : $$R_1 = 8 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, R_{n+1} = \frac{1}{2} R_n$$ La suite (R_n) est donc géométrique de raison 0,5 et de 1er terme $R_1 = 8$. J'en déduis que, $\forall n \in \mathbb{N}^*, R_n = \boldsymbol{R_1 \times q^{n-1}} = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ Pour tout entier non nul n, notons p_n le périmètre du n^e demi-cercle de la spirale. On a alors : $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \pi R_n = 8\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

	La longueur de la spirale composée de 2023 demi-cercles vaut alors : $L = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_{2023} = \sum_{n=1}^{2023} p_n$ $L = \sum_{n=1}^{2023} 8\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $L = 8\pi + 8\pi \times \frac{1}{2} + 8\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + 8\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2022}$ $L = 8\pi\left[\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2022}}_{\text{somme des termes d'une suite géométrique}}\right]$ $L = 8\pi \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2022}}{1-\frac{1}{2}} = 8\pi \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2022}}{\frac{1}{2}}$ $L = 8\pi \times \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2022}\right] \times 2 = 16\pi - 16\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2022} = 16\pi - \frac{\pi}{2^{2018}} \approx 50{,}3$