Devoir à rédiger n°2
Terminale spécialité Mathématiques

Que s'est-il passé dans salle de classe 202 ?

« Nous sommes le 20 octobre 2023, votre professeur de Mathématiques a constaté un vol dans la salle P202 ce matin vers 9h50. Quelque chose a disparu …

Le bureau fédéral d'investigation vous a dépêché avec votre équipe de détectives sur les lieux du délit … Vous devez suivre les **INDICES** pour trouver qui est l'auteur de ce vol, par où iel s'est enfui.e et avec quel objet. »

Qui ?

INDICE : Pour chacune des affirmations suivantes de (P_1) à (P_6), indiquer si elle est **vraie ou fausse** et **démontrer** sa réponse.

(P_1) f admet un maximum où $\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = x\, e^{-x/2}$.

(P_2) g est monotone où $\forall x \in \mathbb{R},\ \ g(x) = \dfrac{e^{-x}}{2x^2+1}$.

Pour les question suivantes, (u_n), (v_n) et (w_n) sont trois suites qui vérifient pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$

(P_3) Si (u_n) ne tend pas vers $-\infty$ alors (v_n) ne tend pas vers $-\infty$.

(P_4) Si (u_n) et (w_n) sont bornées, alors (v_n) aussi.

(P_5) La réciproque de (P_4).

(P_6) Si (u_n) et (w_n) sont croissantes, alors (v_n) aussi.

Pour chaque affirmation vraie, on note 1 et 0 si elle est fausse. Vous obtenez un nombre binaire qu'il faut convertir en décimal …

Qui ?
$\boxed{3}$ $\boxed{6}$ *Mme Expolog*
$\boxed{4}$ $\boxed{4}$ *M. Convlimite*
$\boxed{4}$ $\boxed{5}$ *M. Perportho*
$\boxed{4}$ $\boxed{7}$ *Mme Auhasard*
$\boxed{6}$ $\boxed{1}$ *M. Sincostan*
$\boxed{6}$ $\boxed{3}$ *Mme Aladériv*
Quoi ?
□ *Des stylos*
□ *Des craies*
□ *Des livres*
□ *Des copies*
□ *Un cahier*
□ *Un compas*
Où ?
□ *Salle 3,14*
□ *Salle informatique*
□ *Salle de géométrie*
□ *Salle fractale*
□ *Salle aléatoire*
□ *Salle spiralée*

Quoi ? **INDICE :** Déterminer x dans chacun des cas suivants en justifiant :

$a)\ \ x = \lim\limits_{n\to+\infty} 8 + \sqrt{n^2+1} - n$

$b)\ \ x = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{8n+2}{1+2n}$

$c)\ \ x = u_{17}$ où $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = 2u_n - n$ et $u_0 = 1$

$d)\ \ x = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3-2n}{1-n}$

$e)\ \ x = u_4$ où $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = -2u_n - 6$ et $u_0 = -1$

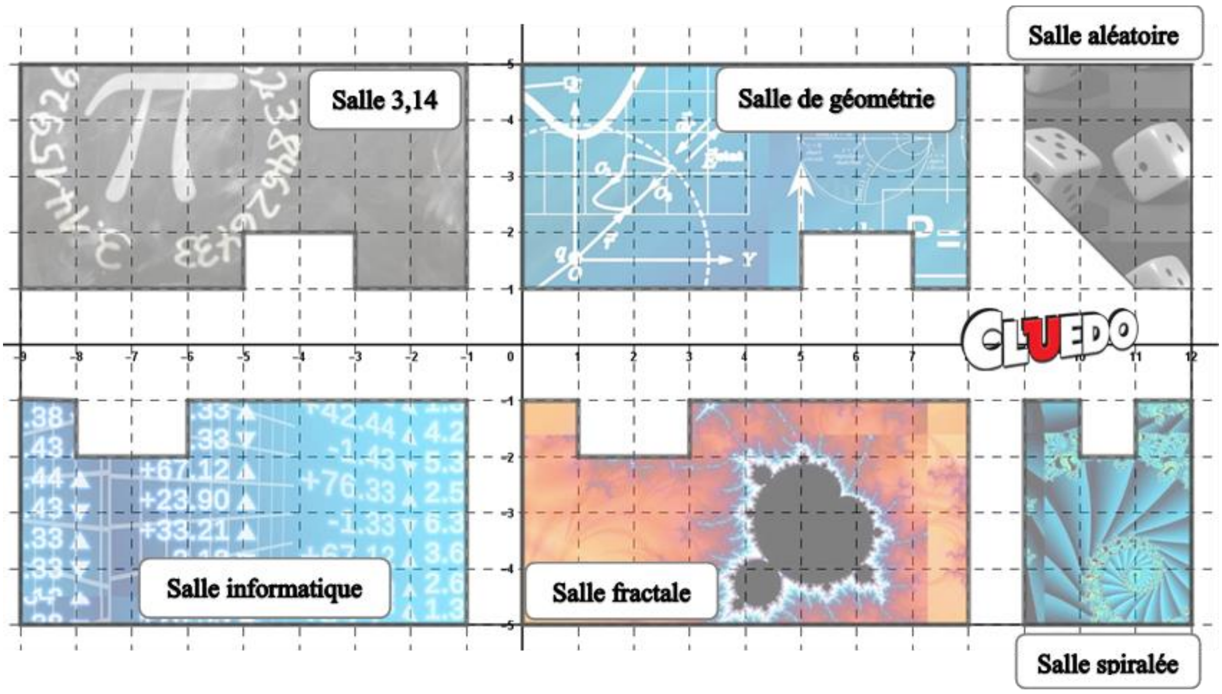
$f)\ \ x = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(3 - \dfrac{1}{n}\right)\left(\dfrac{3}{\sqrt{n}} + 5\right)$

A	B	C	D	
0	1	2	3	...

N	O	P	Q	
13	14	15	16	...

Les résultats vous permettent de trouver l'objet avec lequel notre intrus.e est parti.e … sûrement dans le désordre et peut-être en langage codé …

Où ? Déterminez l'abscisse et l'ordonnée de la position de l'intrus.e lors de sa fuite



INDICE : Soit f la fonction définie, pour tout $x \in \left[\frac{7}{2} ; +\infty\right[$, par

$$f(x) = (10 - 2x)\sqrt{2x - 7}$$

L'abscisse cherchée est l'abscisse du maximum de la fonction f.

INDICE : Soit g la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$g(x) = e^{(2x-7)^4}$$

L'ordonnée cherchée est le produit entre l'abscisse et l'ordonnée de l'extremum de la fonction g.

Correction Qui ?

INDICE : Pour chacune des affirmations suivantes de (P_1) à (P_6), indiquer si elle est vraie ou fausse et démontrer sa réponse.

$$(P_1)\ f \text{ admet un maximum où } \forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = x\,e^{-x/2}.$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f'(x) = 1 \times\ e^{-\frac{x}{2}} + x \times \left(-\frac{1}{2}e^{-x/2}\right)$

$f'(x) = \left(1 - \frac{1}{2}x\right)e^{-x/2}$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}x > 0 \text{ car } e^{-\frac{x}{2}} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{2}x > -1$$

$$\Leftrightarrow x < 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$

L'affirmation (P_1) est vraie.

$$(P_2)\ g \text{ est monotone où } \forall x \in \mathbb{R},\ \ g(x) = \frac{e^{-x}}{2x^2+1}.$$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \ g'(x) = \dfrac{-e^{-x}(2x^2+1) - e^{-x} \times 4x}{(2x^2+1)^2}$

$g'(x) = \dfrac{-e^{-x}(2x^2+1+4x)}{(2x^2+1)^2}$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 1 + 4x < 0 \text{ car } -e^{-x} < 0 \text{ et } (2x^2+1)^2 > 0$$

$$\Delta = 16 - 4 \times 2 = 8 > 0$$

$$x_1 = \frac{-4-\sqrt{8}}{4} = \frac{-4-2\sqrt{2}}{4} = \frac{-2-\sqrt{2}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-2+\sqrt{2}}{2}$$

De plus, $a = 2 > 0$ donc

x	$-\infty$	$\frac{-2-\sqrt{2}}{2}$		$\frac{-2+\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

L'affirmation (P_2) est fausse.

Pour les question suivantes, (u_n), (v_n) et (w_n) sont trois suites qui vérifient pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n$

(P_3) Si (u_n) ne tend pas vers $-\infty$ alors (v_n) ne tend pas vers $-\infty$.

On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n$ et que la suite (u_n) ne tend pas vers $-\infty$

Raisonnons par l'absurde, supposons que la suite (v_n) tende vers $-\infty$.

Alors, puisque $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$

Par comparaison, on pourra déduire que la suite (u_n) tend vers $-\infty$ ce qui est impossible

J'en déduis que la suite (v_n) ne tend pas vers $-\infty$.

L'affirmation (P_3) est vraie.

(P_4) Si (u_n) et (w_n) sont bornées, alors (v_n) aussi.

On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n$ et que (u_n) et (w_n) sont bornées

En particulier, (u_n) est minorée donc, il existe un réel m tel que $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n$

(w_n) est majorée donc, il existe un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N}, w_n \leq M$

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq M$

la suite (v_n) est donc bornée elle-aussi.

L'affirmation (P_4) est vraie.

(P_5) La réciproque de (P_4).

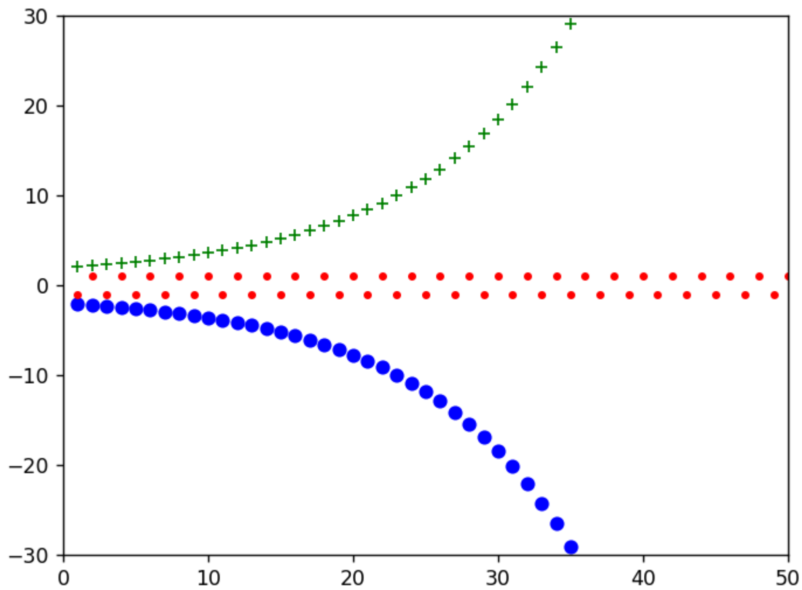
La réciproque de (P_4) s'énonce ainsi : Si (v_n) est bornée alors (u_n) et (w_n) sont bornées aussi

Contre-exemple, posons :

$\forall n \in \mathbb{N}\ v_n = (-1)^n$, (v_n) est bornée entre -1 et 1.

$\forall n \in \mathbb{N}\ w_n = 1{,}1^n + 1$, (w_n) n'est pas bornée car $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = +\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq w_n$

$\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = -1{,}1^n - 1$, (u_n) n'est pas bornée car $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$



L'affirmation (P_5) est fausse.

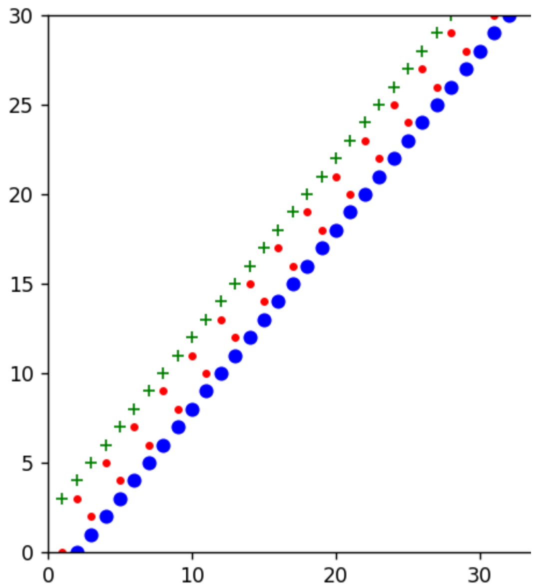
(P_6) Si (u_n) et (w_n) sont croissantes, alors (v_n) aussi.

Contre-exemple, posons :

$\forall n \in \mathbb{N}\ v_n = n + (-1)^n$, (v_n) n'est pas monotone.

$\forall n \in \mathbb{N}\ w_n = n + 2$, (w_n) est croissante et $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq w_n$

$\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = n - 2$, (u_n) est croissante et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$



L'affirmation (P_6) est fausse.

Nous obtenons donc le nombre binaire : **101100**

Après conversion en décimal :

$$2^5 \times 1 + 2^4 \times 0 + 2^3 \times 1 + 2^2 \times 1 + 2^1 \times 0 + 2^0 \times 0 = 32 + 8 + 4 = 44$$

$\boxed{4}\ \boxed{4}$ *M. Convlimite*

Correction Quoi ?

INDICE : Déterminer x dans chacun des cas suivants en justifiant :

$a)\ x = \lim\limits_{n \to +\infty} 8 + \sqrt{n^2 + 1} - n$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n^2+1} = +\infty \\ \lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty \end{array}\right\} \text{Fi par différence}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 8 + \sqrt{n^2+1} - n = 8 + \frac{\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)\left(\sqrt{n^2+1} + n\right)}{\sqrt{n^2+1} + n}$$

$$8 + \sqrt{n^2+1} - n = 8 + \frac{n^2 + 1 - n^2}{\sqrt{n^2+1} + n}$$

$$8+\sqrt{n^2+1}-n=8+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n^2+1}+n=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}=0$

et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}8+\sqrt{n^2+1}-n=8$

$b)\ x=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{8n+2}{1+2n}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}8n+2=+\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty}1+2n=+\infty\end{array}\right\}$ Fi par quotient

$\forall n\in\mathbb{N},\qquad \frac{8n+2}{1+2n}=\frac{n\left(8+\frac{2}{n}\right)}{n\left(\frac{1}{n}+2\right)}=\frac{8+\frac{2}{n}}{\frac{1}{n}+2}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}8+\frac{2}{n}=8\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}+2=2\end{array}\right\}$ donc par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{8n+2}{1+2n}=\frac{8}{2}=4$

$c)\ x=u_{17}$ où $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=2u_n-n$ et $u_0=1$

Je conjecture que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=n+1$

Initialisation : pour $n=0$

$$0+1=1=u_0$$

donc $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.

Hérédité : Je suppose que $u_n=n+1$ pour $n\in\mathbb{N}$ fixé,

$$u_{n+1}=2u_n-n$$
$$u_{n+1}=2(n+1)-n$$
$$u_{n+1}=2n+2-n$$
$$u_{n+1}=n+2$$

donc l'hérédité est vraie.

J'en déduis que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=n+1$
Par consequent, $u_{17}=18$

$d)\ x=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3-2n}{1-n}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}3-2n=\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty}1-n=-\infty\end{array}\right\}$ Fi par quotient

$\forall n\in\mathbb{N},\qquad \frac{3-2n}{1-n}=\frac{n\left(\frac{3}{n}-2\right)}{n\left(\frac{1}{n}-1\right)}=\frac{\frac{3}{n}-2}{\frac{1}{n}-1}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3}{n}-2=-2\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}-1=-1\end{array}\right\}\text{donc par quotient, }\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3-2n}{1-n}=\frac{-2}{-1}=2$$

$e)$ $x=u_4$ où $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=-2u_n-6$ et $u_0=-1$

$$u_0=-1$$
$$u_1=-2u_0-6=-2\times(-1)-6=2-6=-4$$
$$u_2=-2u_1-6=-2\times(-4)-6=8-6=2$$
$$u_3=-2u_2-6=-2\times 2-6=-4-6=-10$$
$$u_4=-2u_3-6=-2\times(-10)-6=20-6=14$$

$f)$ $x=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{3}{\sqrt{n}}+5\right)$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}3-\dfrac{1}{n}=3\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3}{\sqrt{n}}+5=5\end{array}\right\}\text{donc par produit, }\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{3}{\sqrt{n}}+5\right)=3\times 5=15$$

Nous obtenons donc les nombres suivants : **8 4 18 2 14 15**

Ce qui donne IESCOP

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Nous obtenons donc : **COPIES**

Correction Où ?

Déterminez l'abscisse et l'ordonnée de la position de l'intrus.e lors de sa fuite

INDICE : Soit f la fonction définie, pour tout $x\in\left[\frac{7}{2};+\infty\right[$, par

$$f(x)=(10-2x)\sqrt{2x-7}$$

L'abscisse cherchée est l'abscisse du maximum de la fonction f.

f est dérivable sur $\left]\frac{7}{2};+\infty\right[$

$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=(-2)\sqrt{2x-7}+(10-2x)\dfrac{2}{2\sqrt{2x-7}}$

$$f'(x) = \frac{-2\sqrt{2x-7}^2}{\sqrt{2x-7}} + \frac{10-2x}{\sqrt{2x-7}}$$
$$f'(x) = \frac{-2(2x-7)+10-2x}{\sqrt{2x-7}}$$
$$f'(x) = \frac{-4x+14+10-2x}{\sqrt{2x-7}} = \frac{-6x+24}{\sqrt{2x-7}}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -6x+24 > 0 \text{ car } \sqrt{2x-7} > 0$$
$$\Leftrightarrow -6x > -24$$
$$\Leftrightarrow x < 4$$

x	$3{,}5$		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	

INDICE : Soit g la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$g(x) = e^{(2x-7)^4}$$

L'ordonnée cherchée est le produit entre l'abscisse et l'ordonnée de l'extremum de la fonction g.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$

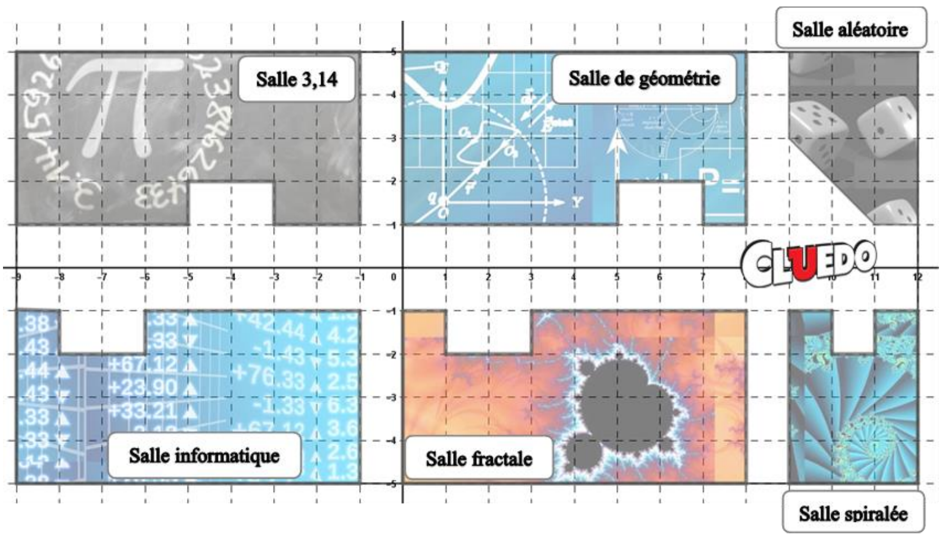
$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = e^{(2x-7)^4} \times 4 \times (2x-7)^3 \times 2$

$g'(x) = e^{(2x-7)^4} \times 8 \times (2x-7)^3$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x-7 > 0 \text{ car } 8e^{(2x-7)^4} > 0$$
$$\Leftrightarrow x > 7$$
$$\Leftrightarrow x > \frac{7}{2}$$

x	$-\infty$		$3{,}5$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Nous obtenons donc pour abscisse : **4** *et pour ordonnée :* **1×3,5=3,5**



Salle de géométrie