Terminale Spécialité Mathématiques
Devoir à rédiger n° $\boxed{3}$
Dénombrement, Probabilités, Fonctions

Table des matières

Devoir à rédiger n° $\boxed{1}$
Dénombrement, Probabilités, Fonctions
Enoncé du sujet

Exercice 1.

On considère un questionnaire comportant cinq questions.
Pour chacune des cinq questions posées, trois propositions de réponses sont faites (A, B et C), une seule d'entre elles étant exacte.
Un candidat répond à toutes les questions posées en écrivant un mot réponse de cinq lettres.
Par exemple, le mot «BBAAC» signifie que le candidat a répondu B aux première et deuxième questions, A aux troisième et quatrième questions et C à la cinquième question.

▶1 a. Combien y-a-t 'il de mots-réponses possible à ce questionnaire ?
b. On suppose que le candidat répond au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire. Calculer la probabilité des évènements suivants :
E : « le candidat a exactement une réponse exacte ».
F : « le candidat n'a aucune réponse exacte ».
G : « le mot-réponse du candidat est un palindrome ». (On précise qu'un palindrome est un mot pouvant se lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche : par exemple, «BACAB» est un palindrome).

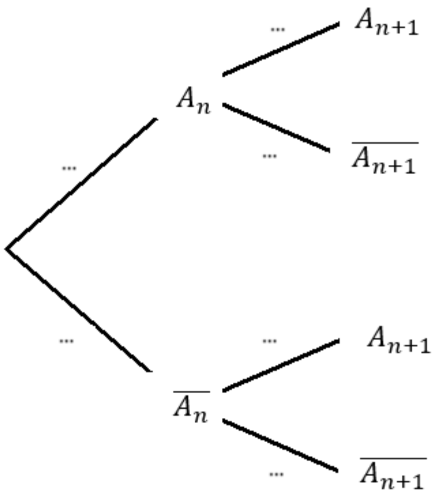
▶2. Un professeur décide de soumettre ce questionnaire à ses 28 élèves en leur demandant de répondre au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.
On désigne par X le nombre d'élèves dont le mot-réponse ne comporte aucune réponse exacte.
a. Justifier que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 28$ et $p = \frac{32}{243}$.
b. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'au plus un élève n'ait fourni que des réponses fausses.

Exercice 2.

Alice débute au jeu de fléchettes. Elle effectue des lancers successifs d'une fléchette.
Lorsqu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à $\frac{1}{3}$. Lorsqu'elle a manqué la cible à un lancer, la probabilité qu'elle manque la cible au lancer suivant est égale à $\frac{4}{5}$.
On suppose qu'au premier lancer elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer. Pour tout entier naturel n strictement positif, on considère l'événement A_n : « Alice atteint la cible au n^e coup ». On pose $p_n = P(A_n)$.

▶1. Déterminer p_1 et montrer que $p_2 = \frac{4}{15}$.

▶2a) Compléter les probabilités de l'arbre ci-dessous :



b) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $p_{n+1} = \frac{2}{15} p_n + \frac{1}{5}$.

▶ 3. Pour $n \geq 1$ on pose $u_n = p_n - \frac{3}{13}$. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique, dont on précisera le premier terme u_1 et la raison q.

▶ 4. Écrire un puis p_n en fonction de n.

▶ 5. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

Exercice 3.

On considère la fonction f, définie sur $]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{(1+x)^2}$$

▶ 1. a. Démontrer que, $\forall x \in \mathbb{R}^* \backslash \{-1\}$, $f(x) = \frac{e^x}{x^2} \times \left(\frac{1}{\frac{1}{x}+1}\right)^2$

b. En déduire la limite de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$.

▶ 2. a. Déterminer les limites de la fonction f lorsque x tend vers -1 et $-\infty$.

b. La courbe de f admet-elle des asymptotes horizontale ou verticale ?

▶ 3. a. Calculer $f'(x)$ et démontrer que son signe est celui de $\frac{x-1}{x+1}$.

b. Dresser le tableau de variation de f.

▶ 4. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $[1; 10]$.

▶ 5. On se propose de trouver un encadrement plus précis de α en utilisant l'algorithme de dichotomie ci-dessous. Que va-t-il afficher ?

```
from math import e
def f(x):
    return e**x/(1+x)**2
a=1
b=10
while b-a>=10**(-4):
    x=(a+b)/2
    if f(x)<1:
        a=x
    else:
        b=x
print(a,b)
```

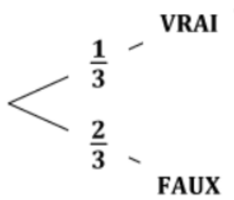
Devoir à rédiger n° $\boxed{3}$
Dénombrement, Probabilités, Fonctions
Correction du sujet

Correction de l'exercice 1.

On considère un questionnaire comportant cinq questions.
Pour chacune des cinq questions posées, trois propositions de réponses sont faites (A, B et C), une seule d'entre elles étant exacte.
Un candidat répond à toutes les questions posées en écrivant un mot réponse de cinq lettres.
Par exemple, le mot «BBAAC» signifie que le candidat a répondu B aux première et deuxième questions, A aux troisième et quatrième questions et C à la cinquième question.

▶1 a. Combien y-a-t' il de mots-réponses possible à ce questionnaire ?
b. On suppose que le candidat répond au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire. Calculer la probabilité des évènements suivants :
E : « le candidat a exactement une réponse exacte ».
F : « le candidat n'a aucune réponse exacte ».
G : « le mot-réponse du candidat est un palindrome ». (On précise qu'un palindrome est un mot pouvant se lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche : par exemple, «BACAB» est un palindrome).

▶2. Un professeur décide de soumettre ce questionnaire à ses 28 élèves en leur demandant de répondre au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.
On désigne par X le nombre d'élèves dont le mot-réponse ne comporte aucune réponse exacte.
a. Justifier que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 28$ et $p = \frac{32}{243}$.
b. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'au plus un élève n'ait fourni que des réponses fausses.

Exercice 1.	**1a.**	Pour chacune des 5 questions, il y a trois réponses possibles : A, B ou C. Le nombre de mots-réponses possible est donc $3^5 = 243$.
	1b.	**Méthode n°1 :** Pour chaque question, le candidat a une probabilité de $\frac{1}{3}$ de donner la bonne réponse.  On répète alors 5 fois, de façon identique et indépendante, l'alternative où la probabilité de répondre correctement est $\frac{1}{3}$. Le nombre de bonnes réponses suit alors une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{1}{3}$.

		$P(E)=\binom{5}{1}\times\left(\frac{1}{3}\right)^1\times\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{5\times 2^4}{3^5}=\frac{80}{243}\approx 0{,}329$ $P(F)=\binom{5}{0}\times\left(\frac{1}{3}\right)^0\times\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{2^5}{3^5}=\frac{32}{243}\approx 0{,}132$ **Méthode n°2 :** E : « le candidat a exactement une réponse exacte ». Un mot-réponse contenant exactement une bonne réponse est donc composé d'une seule bonne réponse qui peut être placée, au choix, en 5 endroits et de 4 mauvaises réponses choisies entre 2 possibilités soit 2^4. Il y en a donc $5\times 2^4=80$ mots possibles donc $P(E)=\frac{80}{243}\approx 0{,}329$ F : « le candidat n'a aucune réponse exacte ». Un mot-réponse ne contenant aucune bonne réponse est donc composé de 5 mauvaises réponses choisies entre 2 possibilités soit 2^5. Il y en a donc $2^5=32$ mots possibles donc $P(F)=\frac{32}{243}\approx 0{,}132$ G : « le mot-réponse du candidat est un palindrome ». Un mot-réponse est un palindrome lorsque l'on choisit les 3 première réponses parmi les 3 possibilités et les deux dernières réponses sont imposées par symétrie. Il y en a donc $3^3=27$ mots possibles donc $P(G)=\frac{27}{243}\approx 0{,}111$
	2a.	Chaque élève a une probabilité $P(F)=\frac{32}{243}$ que son mot-réponse ne comporte aucune réponse exacte. On répète alors 28 fois, de façon identique et indépendante, l'alternative où la probabilité que l'élève n'ait donné aucune réponse exacte est $\frac{32}{243}$. Par conséquent, X le nombre d'élèves dont le mot-réponse ne comporte aucune réponse exacte suit une loi binomiale de paramètres $n=28$ et $p=\frac{32}{243}$.
	2b.	Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'au plus un élève n'ait fourni que des réponses fausses. $P(X\leq 1)=P(X=0)+P(X=1)$ $P(X\leq 1)=\binom{28}{0}\times\left(\frac{32}{243}\right)^0\times\left(\frac{211}{243}\right)^{28}+\binom{28}{1}\times\left(\frac{32}{243}\right)^1\times\left(\frac{211}{243}\right)^{27}$ $P(X\leq 1)=\left(\frac{211}{243}\right)^{28}+28\times\frac{32}{243}\times\left(\frac{211}{243}\right)^{27}\approx 0{,}1$

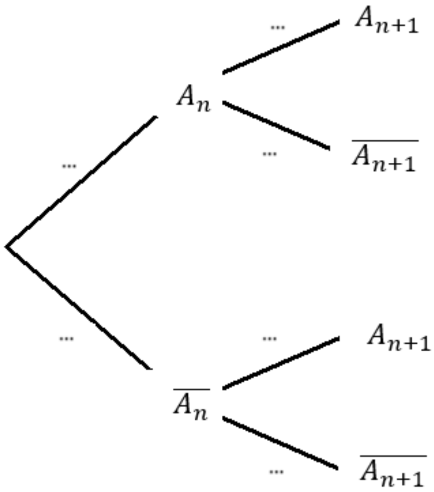
Correction de l'exercice 2.

Alice débute au jeu de fléchettes. Elle effectue des lancers successifs d'une fléchette.

Lorsqu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à $\frac{1}{3}$. Lorsqu'elle a manqué la cible à un lancer, la probabilité qu'elle manque la cible au lancer suivant est égale à $\frac{4}{5}$.
On suppose qu'au premier lancer elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer. Pour tout entier naturel n strictement positif, on considère l'événement A_n : « Alice atteint la cible au n^e coup ». On pose $p_n = P(A_n)$.

▶1. Déterminer p_1 et montrer que $p_2 = \frac{4}{15}$.

▶2a) Compléter les probabilités de l'arbre ci-dessous :



b) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $p_{n+1} = \frac{2}{15}p_n + \frac{1}{5}$.

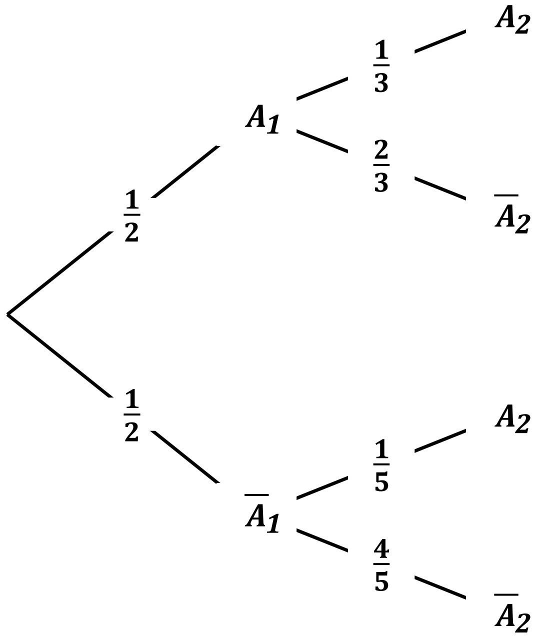
▶3. Pour $n \geq 1$ on pose $u_n = p_n - \frac{3}{13}$. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique, dont on précisera le premier terme u_1 et la raison q.

▶4. Écrire un puis p_n en fonction de n.

▶5. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

<table>
<tr><td rowspan="4">Exercice 2.</td><td>1.</td><td>

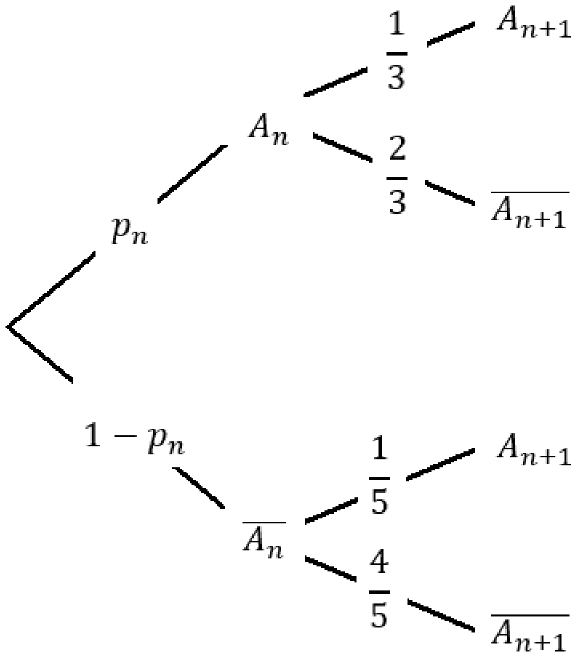
$p_1 = P(A_1)$ où l’événement A_1 est « Alice atteint la cible au 1^{er} coup » et puisqu’on suppose qu’au premier lancer Alice a autant de chances d’atteindre la cible que de la manquer, alors $p_1 = \frac{1}{2}$.



$p_2 = P(A_2) = P(A_1 \cap A_2) + P(\overline{A_1} \cap A_2)$

$p_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{10} = \frac{5}{30} + \frac{3}{30} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$

</td></tr>
<tr><td>2a.</td><td>



</td></tr>
<tr><td>2b.</td><td>

$\forall n \geq 1,$

$$p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(\overline{A_n} \cap A_{n+1})$$

$$p_{n+1} = p_n \times \frac{1}{3} + (1 - p_n) \times \frac{1}{5}$$

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{5} - \frac{1}{5}p_n = \frac{5}{15}p_n - \frac{3}{15}p_n + \frac{1}{5}$$

$$p_{n+1} = \frac{2}{15}p_n + \frac{1}{5}$$

</td></tr>
</table>

	3.	$\forall n \geq 1,\ \ u_n = p_n - \frac{3}{13}$. Soit $n \geq 1$ $u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{3}{13}$ $u_{n+1} = \frac{2}{15}p_n + \frac{1}{5} - \frac{3}{13}$ $u_{n+1} = \frac{2}{15}p_n + \frac{13}{65} - \frac{15}{65} = \frac{2}{15}p_n - \frac{2}{65}$ $u_{n+1} = \frac{2}{15}\left(p_n - \frac{2}{65} \times \frac{15}{2}\right)$ $u_{n+1} = \frac{2}{15}\left(p_n - \frac{3}{13}\right)$ $u_{n+1} = \frac{2}{15}u_n$ J'en déduis que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{15}$ et de premier terme $u_1 = p_1 - \frac{3}{13} = \frac{1}{2} - \frac{3}{13} = \frac{13-6}{26} = \frac{7}{26}$
	4.	Par conséquent, $$\forall n \geq 1,\quad u_n = \frac{7}{26} \times \left(\frac{2}{15}\right)^{n-1} = p_n - \frac{3}{13}$$ $$p_n = u_n + \frac{3}{13} = \frac{7}{26} \times \left(\frac{2}{15}\right)^{n-1} + \frac{3}{13}$$
	5.	$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{15}\right)^{n-1} = 0 \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{3}{13}$$

Correction de l'exercice 3.

On considère la fonction f, définie sur $]-\infty; -1[\ \cup\ ]-1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{(1+x)^2}$$

▶ 1. a. Démontrer que, $\forall x \in \mathbb{R}^*\backslash\{-1\},\ f(x) = \frac{e^x}{x^2} \times \left(\frac{1}{\frac{1}{x}+1}\right)^2$

b. En déduire la limite de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$.

▶ 2. a. Déterminer les limites de la fonction f lorsque x tend vers -1 et $-\infty$.

b. La courbe de f admet-elle des asymptotes horizontale ou verticale ?

▶ 3. a. Calculer $f'(x)$ et démontrer que son signe est celui de $\frac{x-1}{x+1}$.

b. Dresser le tableau de variation de f.

▶ 4. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $[1; 10]$.

▶ 5. On se propose de trouver un encadrement plus précis de α en utilisant l'algorithme de dichotomie ci-dessous. Que va-t-il afficher ?

```
from math import e
def f(x):
```

```
    return e**x/(1+x)**2
a=1
b=10
while b-a>=10**(-4):
    x=(a+b)/2
    if f(x)<1:
        a=x
    else:
        b=x
print(a,b)
```

Exercice 3.

1a.

$\forall x \in \mathbb{R}^*\backslash\{-1\}$,

$$\frac{e^x}{x^2} \times \left(\frac{1}{\frac{1}{x}+1}\right)^2 = \frac{e^x}{x^2} \times \frac{1}{\left(\frac{1}{x}+1\right)^2}$$

$$= \frac{e^x}{x^2} \times \frac{1}{\left(\frac{1+x}{x}\right)^2}$$

$$= \frac{e^x}{x^2} \times \frac{1}{\frac{(1+x)^2}{x^2}} \quad = \frac{e^x}{x^2} \times \frac{x^2}{(1+x)^2}$$

$$\frac{e^x}{x^2} \times \left(\frac{1}{\frac{1}{x}+1}\right)^2 = \frac{e^x}{(1+x)^2} = f(x)$$

1b.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}+1 = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{x}+1}\right)^2 = 1$

D'après la leçon, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$

Par produit, j'en déduis que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2a.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (1+x)^2 = +\infty \end{array}\right\}$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to-1^+} 1+x = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to-1^-} 1+x = 0^-$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-1} e^x = e^{-1} > 0 \\ \lim\limits_{x\to-1} (1+x)^2 = 0^+ \end{array}\right\}$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ x<-1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ x>-1}} f(x) = +\infty$

2b. La courbe de la fonction f admet donc la droite $y = 0$ pour asymptote horizontale en $-\infty$ et la droite $x = -1$ pour asymptote verticale.

3a. f est dérivable sur $]-\infty\,;-1[\,\cup\,]-1\,;+\infty[$,
$\forall x \in\ ]-\infty\,;-1[\,\cup\,]-1\,;+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{e^x(1+x)^2 - e^x \times 2(1+x)}{(1+x)^4}$$

$$f'(x) = \frac{[e^x(1+x) - 2e^x] \times (1+x)}{(1+x)^4}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(1+x-2)}{(1+x)^3}$$

$$f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{(1+x)^3}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} > 0 \ \text{ car } \ \frac{e^x}{(1+x)^2} > 0$$

$f'(x)$ et $\frac{x-1}{x+1}$ sont donc de même signe.

3b.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\frac{e}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(1) = \frac{e^1}{(1+1)^2} = \frac{e}{4}$$

4. f est dérivable sur $[1; 10]$, elle y est donc continue.

$$f(1) = \frac{e^1}{(1+1)^2} = \frac{e}{4} \approx 0{,}68 < 1$$

$$f(10) = \frac{e^{10}}{(10+1)^2} = \frac{e^{10}}{121} \approx 182 > 1$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[1; 10]$.
De plus, sur $[1; 10]$, le fonction f est strictement croissante. L'équation $f(x) = 1$ admet donc une solution unique que l'on notera α.

5. L'algorithme de dichotomie va afficher :

```
2.5128173828125    2.5128860473632812
```

donc $\alpha \approx 2{,}513$