Mardi 3 octobre 2023

Terminale ➡ Contrôle n° 1

Spécialité Mathématiques

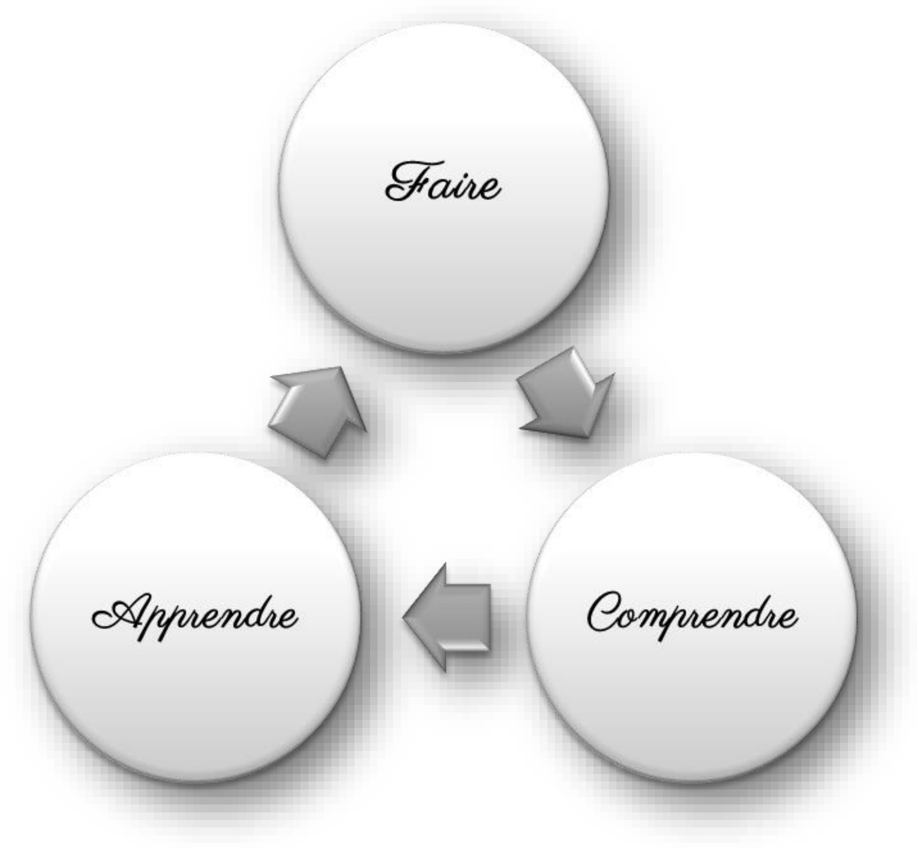

Table des matières

Terminale ➡ Contrôle n° 1
Spécialité Mathématiques
Enoncé du sujet

Exercice 1. (7 points)

Déterminer, en justifiant, la limite de la suite (u_n) dans chaque cas ci-dessous :

▶1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = \dfrac{3n-4}{n+1}$

▶2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\quad u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$

▶3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = 2 - \dfrac{3}{n+1}$

▶4. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = n^2 - 2n^3 + 4$

Exercice 2. (4 points)

▶1. On étudie la suite définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = -\sqrt{2n+1}$.
Démontrer, **à l'aide de la définition**, la limite de la suite (u_n).

▶2. On considère la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = n^2 - 2\cos(n)$
Déterminer, en justifiant, la limite de la suite (v_n).

Exercice 3. (6 points)

On étudie la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = 2u_n + 1$ et $u_0 = 1$

▶1. La suite (u_n) est-elle géométrique ?

▶2. On définit la suite (v_n), pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = 2u_n + 2$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique, on précisera ses éléments caractéristiques.

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 4. (3 points)

Soit la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_{n+1} = u_n - 2n \text{ et } u_0 = 0$$

▶1. On définit la suite (v_n), pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n + n^2$.

	A	B	C
1	n	u_n	v_n
2	0	0	0
3	1	0	1
4	2	-2	2
5	3	-6	3
6	4	-12	4
7	5	-20	5
8	6	-30	6
9	7	-42	7
10	8	-56	8
11	9	-72	9
12	10	-90	10

En s'aidant de la capture d'écran ci-contre, déterminer, en justifiant, une expression explicite pour u_n et en déduire la limite de la suite (u_n).

▶2. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? On justifiera sa réponse.

Affirmation :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites,

$$\text{Si } \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = 0$$

Terminale ➡ Contrôle n° 1

Spécialité Mathématiques

Correction du sujet

Correction de l'exercice 1. (7 points)

Déterminer, en justifiant, la limite de la suite (u_n) dans chaque cas ci-dessous :

▶1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{3n-4}{n+1}$

▶2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$

▶3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 - \dfrac{3}{n+1}$

▶4. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 - 2n^3 + 4$

Exercice 1.

1.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} 3n-4 = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n+1 = +\infty\end{array}\right\}\text{la forme est indéterminée par quotient}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{n\left(3-\frac{4}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{3-\frac{4}{n}}{1+\frac{1}{n}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} 3-\dfrac{4}{n} = 3 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{n} = 1\end{array}\right\}\text{donc, par quotient, } \boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3}$$

2.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n-1} = +\infty\end{array}\right\}\text{la forme est indéterminée par différence}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$$

$$u_n = \frac{\sqrt{n+1}^2 - \sqrt{n-1}^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$$

$$u_n = \frac{n+1-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \frac{n+1-n+1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$$

$$u_n = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}+\sqrt{n-1} = +\infty \text{ donc, par quotient, } \boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

3.

$$\lim_{n\to+\infty} n+1 = +\infty \text{ donc, par quotient, } \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n+1} = 0$$

$$\text{et donc } \boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} u_n = 2}$$

	4.	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} -2n^3+4 = -\infty\end{array}\right\}$ la forme est indéterminée par somme $\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = n^3\left(\frac{1}{n} - 2 + \frac{4}{n^3}\right)$ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} - 2 + \frac{4}{n^3} = -2\end{array}\right\}$ donc, par produit, $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$

Correction de l'exercice 2. (4 points)

▶1. On étudie la suite définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = -\sqrt{2n+1}$.
Démontrer, **à l'aide de la définition**, la limite de la suite (u_n).
▶2. On considère la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = n^2 - 2\cos(n)$
Déterminer, en justifiant, la limite de la suite (v_n).

Exercice 2.	**1.**	Soit $A < 0$, $-\sqrt{2n+1} < A$ $\Leftrightarrow \sqrt{2n+1} > -A$ $\Rightarrow 2n+1 > (-A)^2$ $\Rightarrow 2n > A^2 - 1$ $\Rightarrow n > \frac{A^2-1}{2}$ Je pose $N = \mathrm{Ent}\left(\frac{A^2-1}{2}\right) + 1$, pour tout entier $n \geq N$, $u_n < A$ J'en déduis que $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} -\sqrt{2n+1} = -\infty}$
	2.	Je sais que, $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \cos(n) \leq 1$ $\Leftrightarrow 2 \geq -2\cos(n) \geq -2$ $\Leftrightarrow n^2 + 2 \geq v_n \geq n^2 - 2$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - 2 = +\infty$ donc, par comparaison, $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty}$

Correction de l'exercice 3. (6 points)

On étudie la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = 2u_n + 1$ et $u_0 = 1$
▶1. La suite (u_n) est-elle géométrique ?

▶ 2. On définit la suite (v_n), pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = 2u_n + 2$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique, on précisera ses éléments caractéristiques.

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 3.	**1.**	$u_0 = 1$ $u_1 = 2 \times u_0 + 1 = 3$ $u_2 = 2 \times u_1 + 1 = 7$ $\frac{u_2}{u_1} = \frac{7}{3} \neq \frac{3}{1} = \frac{u_1}{u_0}$ La suite (u_n) n'est donc pas géométrique.
	2a.	Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2u_{n+1} + 2$ $v_{n+1} = 2(2u_n + 1) + 2$ $v_{n+1} = 4u_n + 2 + 2$ $v_{n+1} = 4u_n + 4$ $v_{n+1} = 2(2u_n + 2)$ $v_{n+1} = 2v_n$ La suite (v_n) est donc géométrique de raison 2 et de 1^er^ terme $v_0 = 2u_0 + 2 = 2 + 2 = 4$
	2b.	J'en déduis que, $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 4 \times 2^n = 2^{n+2}$ Et donc, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{v_n - 2}{2} = \frac{2^{n+2} - 2}{2} = 2^{n+1} - 1$
	2c.	$\lim\limits_{n \to +\infty} 2^{n+1} = +\infty$ donc $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$

Correction de l'exercice 4. (3 points)

Soit la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_{n+1} = u_n - 2n \text{ et } u_0 = 0$$

▶ 1. On définit la suite (v_n), pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n + n^2$.

En s'aidant de la capture d'écran ci-contre, déterminer, en justifiant, une expression explicite pour u_n et en déduire la limite de la suite (u_n).

	A	B	C
1	n	u_n	v_n
2	0	0	0
3	1	0	1
4	2	-2	2
5	3	-6	3
6	4	-12	4
7	5	-20	5
8	6	-30	6
9	7	-42	7
10	8	-56	8
11	9	-72	9
12	10	-90	10

▶ 2. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? On justifiera sa réponse.

Affirmation :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites,

$$\text{Si } \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = 0$$

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Exercice 4.</td>
<td>1.</td>
<td>
Démontrons que la suite (v_n) est arithmétique (la capture d'écran me permet de le conjecturer) :

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + (n+1)^2 - (u_n + n^2)$$
$$v_{n+1} - v_n = u_n - 2n \ + n^2 + 2n + 1 - u_n - n^2$$
$$v_{n+1} - v_n = 1$$

La suite (v_n) est donc arithmétique de raison 1 et de 1er terme

$$v_0 = u_0 + 0^2 = 0$$

J'en déduis que, $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 + nr = n$

Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n - n^2 = n - n^2$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty\end{array}\right\} \text{la forme est indéterminée par différence}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = n(1-n)$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1 - n = -\infty\end{array}\right\} \text{donc, par produit, } \boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$$
</td>
</tr>
<tr>
<td>2.</td>
<td>
L'affirmation est fausse car il s'agit d'un cas de forme indéterminée.

La suite de la question précédente est un contre-exemple :

Posons, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -n^2$ et $v_n = n$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n + v_n = n - n^2$ et cette dernière suite ne tend pas vers 0 d'après la question précédente.
</td>
</tr>
</table>