Vendredi 10 novembre 2023

Terminale ➡ Contrôle n° 2

Spécialité Mathématiques

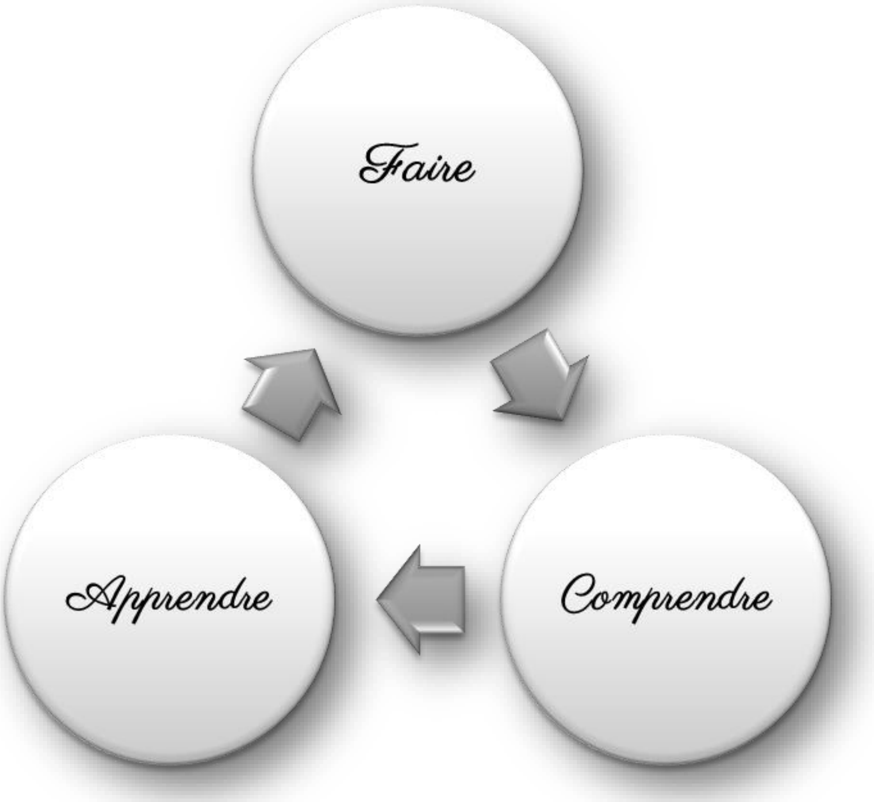


Table des matières

Terminale → Contrôle n° 2

Spécialité Mathématiques

Enoncé du sujet

Exercice 1. (7 points)

On considère la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3.$$

▶ 1. a) Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n$.

b) En déduire la limite de la suite (u_n).

▶ 2. Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n + n - 1$.

▶ 3. a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone.

b) La suite (u_n) est-elle majorée ? On justifiera sa réponse.

Exercice 2. (6 points)

▶ 1. On étudie la fonction $f_1(x) = (5 - 4x)^7$ ou $f_2(x) = (4 - 5x)^7$ définie sur $\mathbb{R}$. Démontrer que la fonction f est monotone sur $\mathbb{R}$.

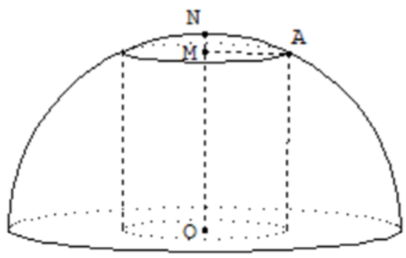
▶ 2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{e^{-x}}{e^{-x} + x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

a) Démontrer que la fonction g admet un extremum que l'on précisera.

b) Déterminer l'équation de la tangente en 0.

Exercice 3. (5 points)

On considère une demi-sphère de centre O et de 6 cm de rayon. Le point M est un point mobile sur le segment $[ON]$. On inscrit dans la sphère un cylindre $\mathcal{P}$ de hauteur $[OM]$ et de rayon de disque de base $[AM]$ où A est un point de la sphère. Pour tout $x \in [0; 6]$, posons $OM = x$ et notons $f(x)$ le volume du cylindre $\mathcal{P}$.



▶ 1. Démontrer que $f(x) = 36\pi x - \pi x^3$, $\forall x \in [0; 6]$.

▶ 2. Existe-t-il une position de M qui donne un volume maximal ? Si oui, combien vaut ce volume maximal ?

Exercice 4. (2 points)

On étudie la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ et $u_0 = 0$.

▶ 1. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.

```
def u(n):
    if n==0:
       a=0
    else:
       a=u(n-1)+1/(n*(n+1))
    return a

for n in range(11):
    print(n,'|',u(n))
```

```
0 | 0
1 | 0.5
2 | 0.6666666666666666
3 | 0.75
4 | 0.8
5 | 0.8333333333333334
6 | 0.8571428571428572
7 | 0.8750000000000001
8 | 0.888888888888889
9 | 0.9
10 | 0.9090909090909091
```

▶ 2. Démontrer votre conjecture.

Terminale ➡ Contrôle n° 2

Spécialité Mathématiques

Correction du sujet

Correction de l'exercice 1. (7 points)

On considère la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3.$$

▶ 1. a) Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n$.
b) En déduire la limite de la suite (u_n).

▶ 2. Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n + n - 1$.

▶ 3. a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone.
b) La suite (u_n) est-elle majorée ? On justifiera sa réponse.

Exercice 1.	**1a)**	Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$: $u_n \geq n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ **Initialisation** pour $n = 0$: $u_0 = 0 \geq 0$ **donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.** **Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n)$** : $u_n \geq n$ **est vraie** pour $n \in \mathbb{N}$ fixé $u_n \geq n$ Je multiplie par 3 de chaque côté $\Leftrightarrow 3u_n \geq 3n$ J'ajoute $-2n + 3$ de chaque côté $\Leftrightarrow 3u_n - 2n + 3 \geq 3n - 2n + 3$ $\Leftrightarrow u_{n+1} \geq n + 3$ or $n + 3 \geq n + 1$ et donc $u_{n+1} \geq n + 3 \geq n + 1$ **donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie** **Par conséquent : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$** donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n$
	1b)	Par comparaison, puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$,

	2.	Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$: $u_n = 3^n + n - 1$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ **Initialisation** pour $n = 0$: $3^n + n - 1 = 3^0 + 0 - 1 = 1 - 1 = 0 = u_0$ **donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.** **Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n)$** : $u_n = 3^n + n - 1$ **est vraie** pour $n \in \mathbb{N}$ fixé $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$ $u_{n+1} = 3(3^n + n - 1) - 2n + 3$ $u_{n+1} = 3^{n+1} + 3n - 3 - 2n + 3$ $u_{n+1} = 3^{n+1} + n$ $u_{n+1} = 3^{n+1} + (n+1) - 1$ **donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie** **Par conséquent : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$** donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^n + n - 1$
	3a)	Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 3^{n+1} + (n+1) - 1 - (3^n + n - 1)$ $u_{n+1} - u_n = 3^{n+1} + n + 1 - 1 - 3^n - n + 1$ $u_{n+1} - u_n = 3^n \times 3 - 3^n + 1$ $u_{n+1} - u_n = 3^n \times (3 - 1) + 1$ $u_{n+1} - u_n = 2 \times 3^n + 1 \geq 0$ La suite (u_n) est donc croissante.
	3b)	Lorsque l'on raisonne par l'absurde, c'est-à-dire si on suppose que la suite (u_n) est majorée, alors puisqu'elle est croissante, on pourrait en déduire qu'elle est convergente. Or, au début de l'exercice, nous avons démontré que la suite (u_n) est divergente puisqu'elle tend vers $+\infty$, par conséquent, la suite (u_n) n'est pas majorée.

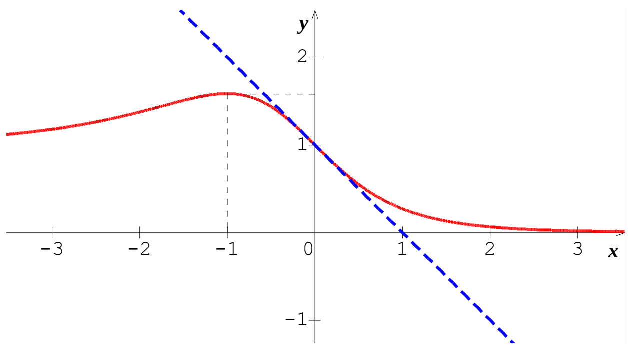
Correction de l'exercice 2. (6 points)

▶1. On étudie la fonction $f_1(x) = (5 - 4x)^7$ ou $f_2(x) = (4 - 5x)^7$ définie sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que la fonction f est monotone sur $\mathbb{R}$.

▶2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{e^{-x}}{e^{-x} + x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

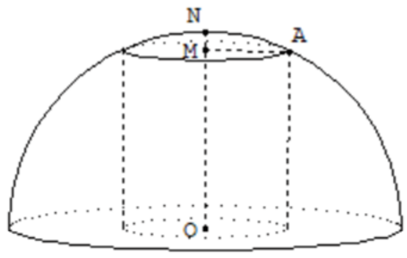
a) Démontrer que la fonction g admet un extremum que l'on précisera.

b) Déterminer l'équation de la tangente en 0.

<table>
<tr>
<td rowspan="3">Exercice 2.</td>
<td>1.</td>
<td>La fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$
$\forall x \in \mathbb{R}$,
$f'_1(x) = 7 \times (5-4x)^6 \times (-4)$
$f'_1(x) = -28\,(5-4x)^6$
or, $(5-4x)^6 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
donc, $\forall x \in \mathbb{R}, f'_1(x) \leq 0$
La fonction f_1 est donc décroissante sur $\mathbb{R}$, elle est donc bien monotone.</td>
<td>La fonction f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$
$\forall x \in \mathbb{R}$,
$f'_2(x) = 7 \times (4-5x)^6 \times (-5)$
$f'_2(x) = -35\,(4-5x)^6$
or, $(4-5x)^6 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
donc, $\forall x \in \mathbb{R}, f'_2(x) \leq 0$
La fonction f_2 est donc décroissante sur $\mathbb{R}$, elle est donc bien monotone.</td>
</tr>
<tr>
<td>2a)</td>
<td colspan="2">La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$
$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \dfrac{-e^{-x}(e^{-x}+x) - e^{-x}(-e^{-x}+1)}{(e^{-x}+x)^2}$
$g'(x) = \dfrac{-e^{-2x} - xe^{-x} + e^{-2x} - e^{-x}}{(e^{-x}+x)^2}$
$g'(x) = \dfrac{-xe^{-x} - e^{-x}}{(e^{-x}+x)^2}$
$g'(x) = \dfrac{-e^{-x}(x+1)}{(e^{-x}+x)^2}$
$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x+1 < 0$ car $\dfrac{-e^{-x}}{(e^{-x}+x)^2} < 0$
$\Leftrightarrow x < -1$
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$g'(x)$</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td></tr>
<tr><td>$g(x)$</td><td>$\nearrow$</td><td>$\frac{e}{e-1}$</td><td>$\searrow$</td></tr>
</table></td>
</tr>
<tr>
<td>2b)</td>
<td colspan="2">$g(0) = \dfrac{e^0}{e^0+0} = 1 \qquad g'(0) = \dfrac{-e^0(0+1)}{(e^0+0)^2} = -\dfrac{1}{1} = -1$
L'équation de la tangente en 0 est donc $y = -1(x-0)+1 = -x+1$

</td>
</tr>
</table>

Correction de l'exercice 3. (5 points)

On considère une demi-sphère de centre O et de 6 cm de rayon. Le point M est un point mobile sur le segment $[ON]$. On inscrit dans la sphère un cylindre $\mathcal{P}$ de hauteur $[OM]$ et de rayon de disque de base $[AM]$ où A est un point de la sphère. Pour tout $x \in [0;6]$, posons $OM = x$ et notons $f(x)$ le volume du cylindre $\mathcal{P}$.



▶1. Démontrer que $f(x) = 36\pi x - \pi x^3$, $\forall x \in [0;6]$.

▶2. Existe-t-il une position de M qui donne un volume maximal ? Si oui, combien vaut ce volume maximal ?

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Exercice 3.</td>
<td>1.</td>
<td>
Soit $x \in [0;6]$, le cylindre $\mathcal{P}$ a pour hauteur $OM = x$.
Dans le triangle OMA rectangle en M, le rayon du cylindre vaut :
$AM = \sqrt{6^2 - x^2} = \sqrt{36 - x^2}$
Le volume du cylindre est donc égal à
$f(x) = \pi R^2 h = \pi \sqrt{36 - x^2}^2 \times x$
$f(x) = \pi x(36 - x^2)$
$$f(x) = 36\pi x - \pi x^3$$
</td>
</tr>
<tr>
<td>2.</td>
<td>
La fonction f est dérivable sur $[0;6]$
$\forall x \in [0;6]$, $f'(x) = 36\pi - 3\pi x^2$
$f'(x) = 3\pi(12 - x^2)$
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 12 - x^2 > 0$
$\Leftrightarrow 12 > x^2$
$\Leftrightarrow -\sqrt{12} < x < \sqrt{12}$
or $x \in [0;6]$, donc $\Leftrightarrow 0 \leq x < 2\sqrt{3}$
<table>
<tr><td>x</td><td>0 $2\sqrt{3}$ 6</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>$+$ 0 $-$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$0 \nearrow 48\pi\sqrt{3} \searrow 0$</td></tr>
</table>
$f(2\sqrt{3}) = \pi \times 2\sqrt{3}(36 - 12) = 48\pi\sqrt{3}$
Le volume est maximal lorsque $x = 2\sqrt{3}$ cm et il vaut, au maximum, $48\pi\sqrt{3}$ cm^3.
</td>
</tr>
</table>

Correction de l'exercice 4. (2 points)

On étudie la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ et $u_0 = 0$.

▶ 1. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.

<pre>def u(n):
    if n==0:
       a=0
    else:
       a=u(n-1)+1/(n*(n+1))
    return a
 	
for n in range(11):
    print(n,'|',u(n))</pre>
	<pre>0 | 0
	1 | 0.5
	2 | 0.6666666666666666
	3 | 0.75
	4 | 0.8
	5 | 0.8333333333333334
	6 | 0.8571428571428572
	7 | 0.8750000000000001
	8 | 0.888888888888889
	9 | 0.9
	10 | 0.9090909090909091</pre>

▶ 2. Démontrer votre conjecture.

Exercice 4.		
	1.	Je conjecture que $u_0 = 0 \quad u_1 = \dfrac{1}{2} \quad u_2 = \dfrac{2}{3} \quad u_3 = \dfrac{3}{4} \quad u_4 = \dfrac{4}{5} \quad \dots \quad u_n = \dfrac{n}{n+1}$
	2.	Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n) : u_n = \frac{n}{n+1}$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$ **Initialisation** pour $n = 0$: $\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{0}{0+1} = 0 = u_0$ **donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.** **Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n)$** : $u_n = \frac{n}{n+1}$ **est vraie** pour $n \in \mathbb{N}$ fixé $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ $u_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ $u_{n+1} = \dfrac{n \times (n+2)}{(n+1) \times (n+2)} + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ $u_{n+1} = \dfrac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}$ $u_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}$ $u_{n+1} = \dfrac{\cancel{(n+1)\times}(n+1)}{\cancel{(n+1)\times}(n+2)}$ $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+2}$ **donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie** **Par conséquent : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$** donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n}{n+1}$