Lycée Polyvalent Albert EINSTEIN

Vendredi 1er décembre 2023

Terminale → Contrôle n° 3

Spécialité Mathématiques

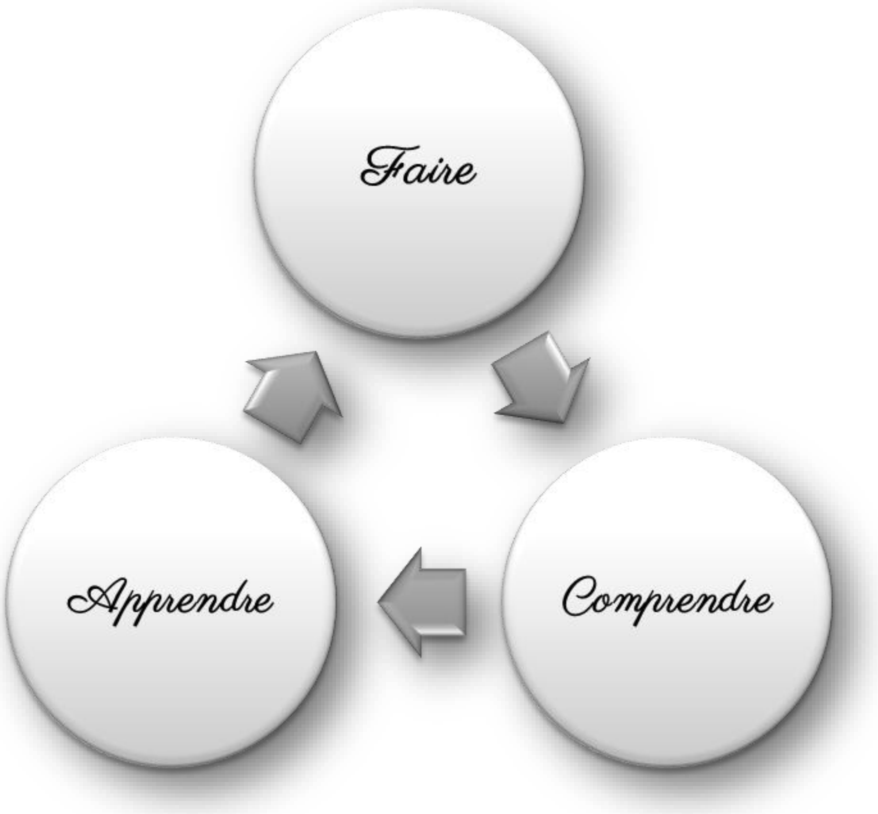


Table des matières

Terminale ➡ Contrôle n°3

Spécialité Mathématiques

Enoncé du sujet A

Exercice 1. (8 points)

Soit la fonction $f(x) = (2 - x)\sqrt{x^2 + x + 1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

▶ 1. a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Déterminer, en justifiant, la limite de f en $-\infty$.

▶ 2. a) Démontrer que, pour tout réel x,

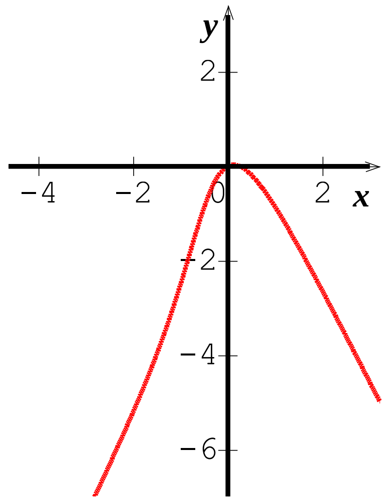
$$f'(x) = \frac{x(1 - 4x)}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

b) Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f.

▶ 3. On donne, ci-contre, la courbe de la fonction dérivée f'.

Vrai ou Faux ?

La fonction f admet un point d'inflexion. On justifiera sa réponse.



Exercice 2. (10 points)

Soit la fonction $g(x) = (x + 2)e^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

▶ 1. a) Déterminer la limite de g en $-\infty$.

b) Déterminer, en justifiant, la limite de g en $+\infty$.

c) En déduire l'existence d'une asymptote. On précisera son équation.

▶ 2. a) Etudier, en justifiant, les variations de la fonction g.

b) La fonction g admet-elle un extremum ? Donner sa valeur exacte.

c) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0.

▶ 3. La courbe de la fonction g admet-elle un point d'inflexion ? On justifiera sa réponse.

Exercice 3. (2 points)

Soit la fonction $h(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ définie sur $[0; 1[\cup]1; +\infty[$.

▶ 1. Déterminer les limites de la fonction h aux bornes de son ensemble de définition.

▶ 2. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction h.

Terminale ➡ Contrôle n°3

Spécialité Mathématiques

Enoncé du sujet B

Exercice 1. (8 points)

Soit la fonction $f(x) = (3 - x)\sqrt{x^2 - x + 1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

▶ 1. a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

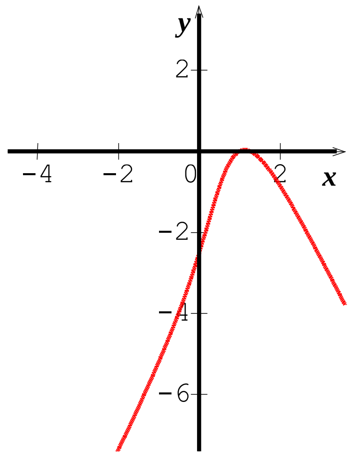
b) Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$.

▶ 2. a) Démontrer que, pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{(x-1)(5-4x)}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}$$

b) Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f.

▶ 3. On donne, ci-contre, la courbe de la fonction dérivée f'.



Vrai ou Faux ?

La fonction f admet un point d'inflexion. On justifiera sa réponse.

Exercice 2. (10 points)

Soit la fonction $g(x) = (x + 3)e^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

▶ 1. a) Déterminer la limite de g en $-\infty$.

b) Déterminer, en justifiant, la limite de g en $+\infty$.

c) En déduire l'existence d'une asymptote. On précisera son équation.

▶ 2. a) Etudier, en justifiant, les variations de la fonction g.

b) La fonction g admet-elle un extremum ? Donner sa valeur exacte.

c) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0.

▶ 3. La courbe de la fonction g admet-elle un point d'inflexion ? On justifiera sa réponse.

Exercice 3. (2 points)

Soit la fonction $h(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ définie sur $[0; 1[\cup]1; +\infty[$.

▶ 1. Déterminer les limites de la fonction h aux bornes de son ensemble de définition.

▶ 2. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction h.

Terminale ➡ Contrôle n°3

Spécialité Mathématiques

Correction du sujet A

Correction de l'exercice 1. (8 points)

Soit la fonction $f(x) = (2-x)\sqrt{x^2+x+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

▶1. a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

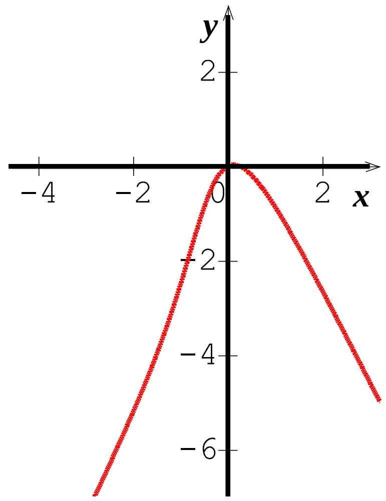
b) Déterminer, en justifiant, la limite de f en $-\infty$.

▶2. a) Démontrer que, pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{x(1-4x)}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

b) Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f.

▶3. On donne, ci-contre, la courbe de la fonction dérivée f'.



Vrai ou Faux ?

La fonction f admet un point d'inflexion. On justifiera sa réponse.

Exercice 1.	**1a)**	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 2-x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1} = +\infty\end{array}\right\}$ par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
	1b)	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x+1 = -\infty\end{array}\right\}$ par somme, il y a FI, $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = (2-x)\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}$ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2} = 1\end{array}\right\}$ par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1} = +\infty$ donc $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} 2-x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1} = +\infty\end{array}\right\}$ par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

2a)

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \underbrace{(2-x)}_{u}\underbrace{\sqrt{x^2+x+1}}_{v}$$

$$u = 2 - x \qquad u' = -1$$

$$v = \sqrt{x^2+x+1} \qquad v' = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$f'(x) = -1 \times \sqrt{x^2+x+1} + (2-x) \times \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$f'(x) = \frac{-1 \times \sqrt{x^2+x+1} \times 2\sqrt{x^2+x+1}}{2\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{(2-x)(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$f'(x) = \frac{-2(x^2+x+1) + (2-x)(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2 - 2x - 2 + 4x + 2 - 2x^2 - x}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$f'(x) = \frac{-4x^2 + x}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$f'(x) = \frac{x(1-4x)}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

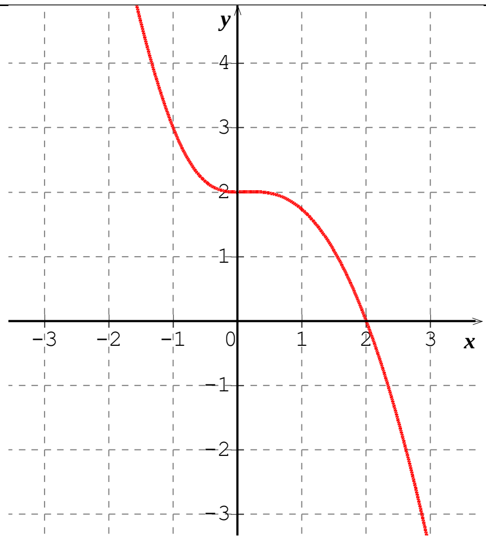
2b)

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x(1-4x) > 0$

car $2\sqrt{x^2+x+1} > 0$

Les racines sont 0 et ¼, la parabole est tournée vers le bas car $a = -4 < 0$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\frac{7\sqrt{21}}{16}$	$\searrow$	$-\infty$



$f(0) = 2 \qquad f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{7\sqrt{21}}{16}$

3.

D'après le graphique de la fonction f', elle est d'abord croissante puis décroissante. Ce qui signifie que la fonction f sera d'abord convexe puis concave. La fonction f aura bien un point d'inflexion.

Correction de l'exercice 2. (10 points)

Soit la fonction $g(x) = (x+2)e^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

▶ 1. a) Déterminer la limite de g en $-\infty$.

b) Déterminer, en justifiant, la limite de g en $+\infty$.

c) En déduire l'existence d'une asymptote. On précisera son équation.

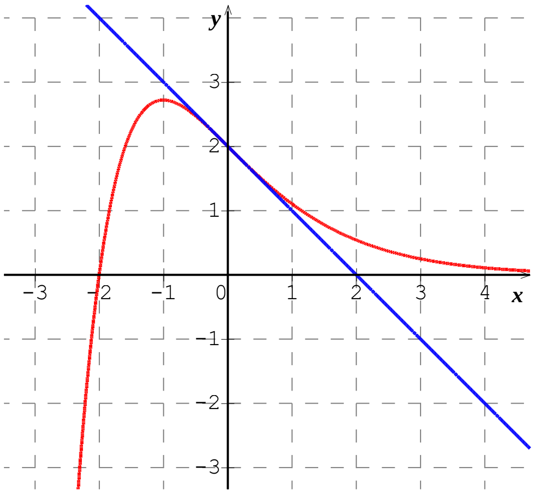
▶ 2. a) Etudier, en justifiant, les variations de la fonction g.

b) La fonction g admet-elle un extremum ? Donner sa valeur exacte.

c) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0.

▶ 3. La courbe de la fonction g admet-elle un point d'inflexion ? On justifiera sa réponse.

<table>
<tr>
<td rowspan="4">Exercice 2.</td>
<td>1a)</td>
<td>$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x+2=-\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty\end{array}\right\}$ par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$</td>
</tr>
<tr>
<td>1b)</td>
<td>$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x+2=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0\end{array}\right\}$ par produit, il y a FI,
$\forall x\in\mathbb{R}, g(x)=(x+2)e^{-x}=xe^{-x}+2e^{-x}=\dfrac{x}{e^x}+\dfrac{2}{e^x}$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$
$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x}=0\end{array}\right\}$ par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$</td>
</tr>
<tr>
<td>1c)</td>
<td>La droite $y=0$ est donc asymptote horizontale en $+\infty$.</td>
</tr>
<tr>
<td>2a)</td>
<td>La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, $\forall x\in\mathbb{R}$
$g(x)=\underbrace{(x+2)}_{u}\underbrace{e^{-x}}_{v}$
$u=x+2 \qquad u'=1$
$v=e^{-x} \qquad v'=-e^{-x}$
$g'(x)=1\times e^{-x}+(x+2)\times(-e^{-x})$
$g'(x)=[1-(x+2)]\times e^{-x}$
$g'(x)=(1-x-2)\times e^{-x}$
$g'(x)=(-x-1)\times e^{-x}$
$g'(x)>0 \Leftrightarrow -x-1>0$ car $e^{-x}>0$
$\Leftrightarrow -x>1$
$\Leftrightarrow x<-1$
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>-1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$g'(x)$</td><td></td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td></td></tr>
<tr><td>$g(x)$</td><td>$-\infty$</td><td>$\nearrow$</td><td>e</td><td>$\searrow$</td><td>0</td></tr>
</table></td>
</tr>
</table>

	2b)	La fonction g admet un maximum pour $x = -1$ et il vaut : $$g(-1) = (-1+2)e^{-(-1)} = 1 \times e^1 = e$$
	2c)	La tangente en $x = 0$: $g'(0) = (-0-1) \times e^{-0} = -1$ $g(0) = (0+2)e^{-0} = 2$ $y = -1(x-0) + 2 = -x + 2$ 
	3.	La fonction g' est dérivable sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $g'(x) = (-x-1) \times e^{-x}$ $g''(x) = (-1) \times e^{-x} + (-x-1) \times (-e^{-x})$ $g''(x) = [-1 - (-x-1)] \times e^{-x}$ $g''(x) = (-1 + x + 1) \times e^{-x}$ $g''(x) = x\, e^{-x}$ $g''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0 \quad$ car $e^{-x} > 0$ La courbe de g est convexe sur $]0\,;+\infty[$ et concave sur $]-\infty\,;0[$, elle admet donc un point d'inflexion en $x = 0$.

Correction de l'exercice 3. (2 points)

Soit la fonction $h(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ définie sur $[0;1[\,\cup\,]1;+\infty[$.

▶ 1. Déterminer les limites de la fonction h aux bornes de son ensemble de définition.

▶ 2. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction h.

Exercice 3.	**1.**	(Pas de limite en 0 car l'intervalle est fermé en 0) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1} \sqrt{x}-1 = 0\\ \lim\limits_{x\to1} x-1 = 0\end{array}\right\}$ par quotient, il y a FI, $\forall x \in [0;1[\,\cup\,]1;+\infty[, \quad h(x) = \dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$

$$h(x)=\frac{\sqrt{x}^2-1^2}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1} 1=1\\ \lim\limits_{x\to1}\sqrt{x}+1=2\end{array}\right\}\text{par quotient, } \lim_{x\to1^+}h(x)=\lim_{x\to1^-}h(x)=\frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 1=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}+1=+\infty\end{array}\right\}\text{par quotient, } \lim_{x\to+\infty}h(x)=0$$

2.

La fonction h est dérivable sur $[0;1[\,\cup\,]1;+\infty[$, $\forall x\in[0;1[\,\cup\,]1;+\infty[$

Méthode n°1 :

$$h(x)=\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{u}$$

$$u=\sqrt{x}+1 \quad u'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$h'(x)=\frac{-u'}{u^2}$$

$$h'(x)=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$$

$$h'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{x}}\times\frac{1}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$$

$$h'(x)=\frac{-1}{2\left(\sqrt{x}+1\right)^2\sqrt{x}}<0$$

Méthode n°2 :

$$h(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{u}{v}$$

$$u=\sqrt{x}-1 \quad u'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$v=x-1 \quad v'=1$$

$$h'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$h'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)-\left(\sqrt{x}-1\right)\times1}{(x-1)^2}$$

$$h'(x)=\frac{x-1-2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{2\sqrt{x}}\times\frac{1}{(x-1)^2}$$

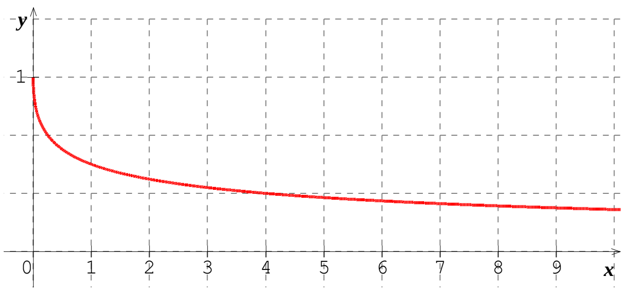
$$h'(x)=\frac{x-1-2x+2\sqrt{x}}{2(x-1)^2\sqrt{x}}$$

$$h'(x)=\frac{-1-x+2\sqrt{x}}{2(x-1)^2\sqrt{x}}$$

$$h'(x)=\frac{-\left(1-2\sqrt{x}+x\right)}{2(x-1)^2\sqrt{x}}$$

$$h'(x)=\frac{-\left(1-\sqrt{x}\right)^2}{2(x-1)^2\sqrt{x}}<0$$

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	
$h(x)$	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}\ \|\|\ \frac{1}{2}$	$\searrow$	0



Terminale ➡ Contrôle n° 3

Spécialité Mathématiques

Correction du sujet B

Correction de l'exercice 1. (8 points)

Soit la fonction $f(x) = (3-x)\sqrt{x^2-x+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

▶ 1. a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

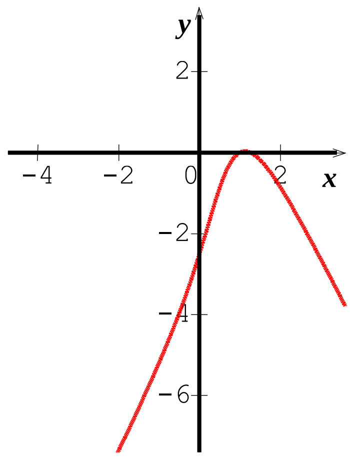
b) Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$.

▶ 2. a) Démontrer que, pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{(x-1)(5-4x)}{2\sqrt{x^2-x+1}}$$

b) Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f.

▶ 3. On donne, ci-contre, la courbe de la fonction dérivée f'.



Vrai ou Faux ?

La fonction f admet un point d'inflexion. On justifiera sa réponse.

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Exercice 1.</td>
<td>1a)</td>
<td>$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} 3-x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x+1}=+\infty\end{array}\right\}$ par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$</td>
</tr>
<tr>
<td>1b)</td>
<td>$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} -x+1=-\infty\end{array}\right\}$ par somme, il y a FI,
$\forall x\in\mathbb{R}^*, f(x)=(3-x)\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}$
$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=1\end{array}\right\}$ par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x+1}=+\infty$
donc
$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 3-x=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x+1}=+\infty\end{array}\right\}$ par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$</td>
</tr>
</table>

2a)

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \underbrace{(3-x)}_{u}\underbrace{\sqrt{x^2-x+1}}_{v}$$

$$u = 3 - x \qquad u' = -1$$

$$v = \sqrt{x^2-x+1} \qquad v' = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$f'(x) = -1 \times \sqrt{x^2-x+1} + (3-x) \times \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$f'(x) = \frac{-1 \times \sqrt{x^2-x+1} \times 2\sqrt{x^2-x+1}}{2\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{(3-x)(2x-1)}{2\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$f'(x) = \frac{-2(x^2-x+1)+(3-x)(2x-1)}{2\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2+2x-2+6x-3-2x^2+x}{2\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$f'(x) = \frac{-4x^2+9x-5}{2\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$f'(x) = \frac{(x-1)(5-4x)}{2\sqrt{x^2-x+1}}$$

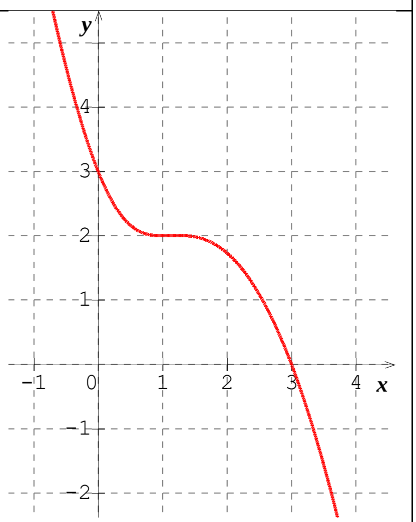
2b)

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (x-1)(5-4x) > 0$$

car $2\sqrt{x^2-x+1} > 0$

Les racines sont 1 et 5/4, la parabole est tournée vers le bas car $a = -4 < 0$

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\frac{7\sqrt{21}}{16}$	$\searrow$	$-\infty$



$$f(1) = 2 \qquad f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{7\sqrt{21}}{16}$$

3.

D'après le graphique de la fonction f', elle est d'abord croissante puis décroissante. Ce qui signifie que la fonction f sera d'abord convexe puis concave. La fonction f aura bien un point d'inflexion.

Correction de l'exercice 2. (10 points)

Soit la fonction $g(x) = (x+3)e^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

▶ 1. a) Déterminer la limite de g en $-\infty$.

b) Déterminer, en justifiant, la limite de g en $+\infty$.

c) En déduire l'existence d'une asymptote. On précisera son équation.

▶ 2. a) Etudier, en justifiant, les variations de la fonction g.

b) La fonction g admet-elle un extremum ? Donner sa valeur exacte.

c) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0.

▶ 3. La courbe de la fonction g admet-elle un point d'inflexion ? On justifiera sa réponse.

<table>
<tr>
<td rowspan="4">Exercice 2.</td>
<td>1a)</td>
<td>$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to-\infty} x+3=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty\end{array}\right\}$ par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$</td>
</tr>
<tr>
<td>1b)</td>
<td>$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} x+3=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0\end{array}\right\}$ par produit, il y a FI,

$\forall x\in\mathbb{R}, g(x)=(x+3)e^{-x}=xe^{-x}+3e^{-x}=\dfrac{x}{e^x}+\dfrac{3}{e^x}$

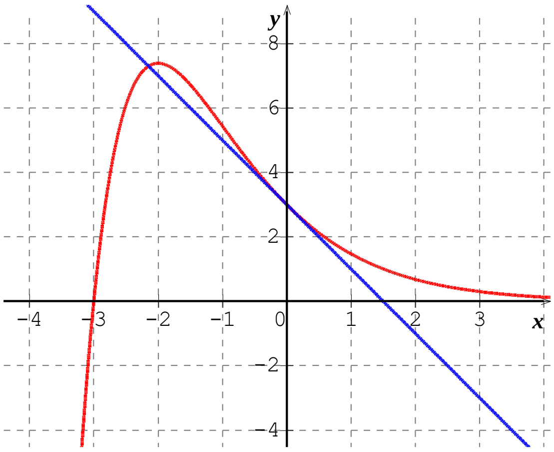
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$
$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{e^x}=0\end{array}\right\}$ par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$</td>
</tr>
<tr>
<td>1c)</td>
<td>La droite $y=0$ est donc asymptote horizontale en $+\infty$.</td>
</tr>
<tr>
<td>2a)</td>
<td>La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, $\forall x\in\mathbb{R}$
$g(x)=\underbrace{(x+3)}_{u}\,\underbrace{e^{-x}}_{v}$

$u=x+3 \qquad u'=1$
$v=e^{-x} \qquad v'=-e^{-x}$

$g'(x)=1\times e^{-x}+(x+3)\times(-e^{-x})$
$g'(x)=[1-(x+3)]\times e^{-x}$
$g'(x)=(1-x-3)\times e^{-x}$
$g'(x)=(-x-2)\times e^{-x}$

$g'(x)>0 \Leftrightarrow -x-2>0$ car $e^{-x}>0$
$\Leftrightarrow -x>2$
$\Leftrightarrow x<-2$

$$\begin{array}{|c|ccccc|}\hline x & -\infty & & -2 & & +\infty\\ \hline g'(x) & & + & 0 & - & \\ \hline g(x) & -\infty & \nearrow & e^2 & \searrow & 0\\ \hline\end{array}$$</td>
</tr>
</table>

	2b)	La fonction g admet un maximum pour $x = -2$ et il vaut : $$g(-2) = (-2+3)e^{-(-2)} = 1 \times e^2 = e^2$$
	2c)	La tangente en $x = 0$: $g'(0) = (-0-2) \times e^{-0} = -2$ $g(0) = (0+3)e^{-0} = 3$ $y = -2(x-0) + 3 = -2x + 3$ 
	3.	La fonction g' est dérivable sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $g'(x) = (-x-2) \times e^{-x}$ $g''(x) = (-1) \times e^{-x} + (-x-2) \times (-e^{-x})$ $g''(x) = [-1 - (-x-2)] \times e^{-x}$ $g''(x) = (-1 + x + 2) \times e^{-x}$ $g''(x) = (x+1)\, e^{-x}$ $g''(x) > 0 \Leftrightarrow x + 1 > 0$ car $e^{-x} > 0$ $\Leftrightarrow x > -1$ La courbe de g est convexe sur $]-1\,;+\infty[$ et concave sur $]-\infty\,;-1[$, elle admet donc un point d'inflexion en $x = -1$.

Correction de l'exercice 3. (2 points)

Soit la fonction $h(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ définie sur $[0; 1[\cup]1; +\infty[$.

▶ 1. Déterminer les limites de la fonction h aux bornes de son ensemble de définition.

▶ 2. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction h.

<table>
<tr>
<td rowspan="4">Exercice 3.</td>
<td>1.</td>
<td colspan="2">(Pas de limite en 0 car l'intervalle est fermé en 0)
$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to1}\sqrt{x}-1=0\\ \lim\limits_{x\to1}x-1=0\end{array}\right\}$ par quotient, il y a FI,
$\forall x\in[0;1[\cup]1;+\infty[,\quad h(x)=\dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td colspan="2">$h(x)=\dfrac{\sqrt{x}^2-1^2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\dfrac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$
$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to1}1=1\\ \lim\limits_{x\to1}\sqrt{x}+1=2\end{array}\right\}$ par quotient, $\lim\limits_{x\to1^+}h(x)=\lim\limits_{x\to1^-}h(x)=\dfrac{1}{2}$
$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty}1=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}+1=+\infty\end{array}\right\}$ par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0$</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">2.</td>
<td colspan="2">La fonction h est dérivable sur $[0;1[\cup]1;+\infty[$, $\forall x\in[0;1[\cup]1;+\infty[$</td>
</tr>
<tr>
<td>Méthode n°1 :
$h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{u}$
$u=\sqrt{x}+1\quad u'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$h'(x)=\dfrac{-u'}{u^2}$
$h'(x)=\dfrac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$
$h'(x)=-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\times\dfrac{1}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$
$h'(x)=\dfrac{-1}{2\left(\sqrt{x}+1\right)^2\sqrt{x}}<0$</td>
<td>Méthode n°2 :
$h(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\dfrac{u}{v}$
$u=\sqrt{x}-1\quad u'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$v=x-1\quad v'=1$
$h'(x)=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
$h'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)-(\sqrt{x}-1)\times1}{(x-1)^2}$
$h'(x)=\dfrac{x-1-2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}}\times\dfrac{1}{(x-1)^2}$
$h'(x)=\dfrac{x-1-2x+2\sqrt{x}}{2(x-1)^2\sqrt{x}}$
$h'(x)=\dfrac{-1-x+2\sqrt{x}}{2(x-1)^2\sqrt{x}}$
$h'(x)=\dfrac{-(1-2\sqrt{x}+x)}{2(x-1)^2\sqrt{x}}$
$h'(x)=\dfrac{-\left(1-\sqrt{x}\right)^2}{2(x-1)^2\sqrt{x}}<0$</td>
</tr>
</table>

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
$h(x)$	1	$\searrow$	$\frac{1}{2} \Vert \frac{1}{2}$	$\searrow$	0