Jeudi 14 décembre 2023
Terminale ➡ Contrôle n° 4
Spécialité Mathématiques

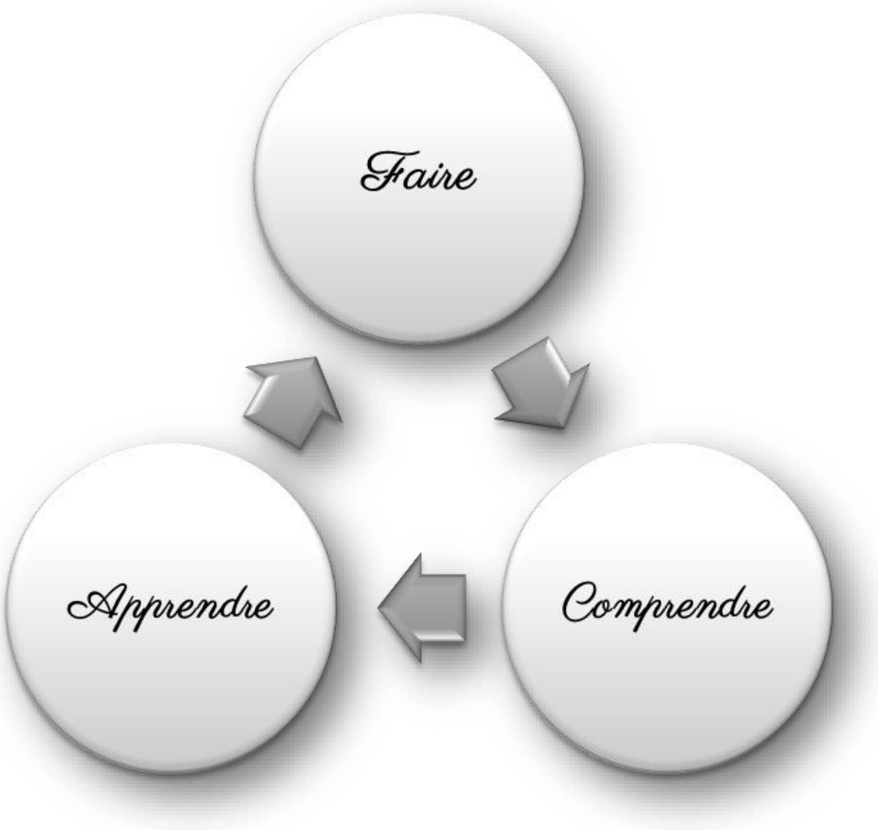


Table des matières

Terminale ➡ Contrôle n° 4
Spécialité Mathématiques
Enoncé du sujet

Exercice 1. (10 points)

Soit la fonction $f(x) = 3 - \dfrac{4}{x+2}$ définie sur $]-2; +\infty[$.

▶ 1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. En déduire les éventuelles asymptotes horizontales ou verticales.

▶ 2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $]-2; +\infty[$ et dresser son tableau de variations.

▶ 3. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

▶ 4. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

a) A l'aide de programme ci-dessous, que peut-on conjecturer concernant la suite (u_n) ?

`def f(x):`
`    return 3-4/(x+2)`
 	
`u=4`
`for i in range(8):`
`    u=f(u)`
`    print(u)`
	2.3333333333333335
	2.076923076923077
	2.018867924528301 7
	2.004694835680751
	2.0011723329425557
	2.0002929973630237
	2.000073243975683
	2.0000183106586342

b) Démontrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$

c) La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

⬆

Exercice 2. (10 points)

Partie A Étude d'une fonction auxiliaire g

Soit la fonction $g(x) = 2e^x + 2x - 7$ définie sur $\mathbb{R}$.

▶ 1. Étudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

▶ 2. Étudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.

▶ 3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α. Donner un encadrement de α à 0,01 près.

▶ 4. Étudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B Étude d'une fonction

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x - 5)(1 - e^{-x})$.

▶ 1. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

▶ 2a) Calculer $f'(x)$. Démontrer que $f'(x)$ et $g(x)$ sont de même signe.

b) Dresser le tableau de variations de f.

▶ 3a) Démontrer l'égalité : $f(\alpha) = \dfrac{(2\alpha - 5)^2}{2\alpha - 7}$

b) En étudiant le sens de variations de la fonction $h(x) = \dfrac{(2x-5)^2}{2x-7}$ sur l'intervalle $\left]-\infty; \dfrac{5}{2}\right]$ et l'encadrement de α, déterminer un encadrement de $f(\alpha)$.

⬆

Terminale ➡ Contrôle n° 4

Spécialité Mathématiques

Correction du sujet

Correction de l'exercice 1. (10 points)

Soit la fonction $f(x) = 3 - \dfrac{4}{x+2}$ définie sur $]-2;+\infty[$.

▶1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. En déduire les éventuelles asymptotes horizontales ou verticales.

▶2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $]-2;+\infty[$ et dresser son tableau de variations.

▶3. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

▶4. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

a) A l'aide de programme ci-dessous, que peut-on conjecturer concernant la suite (u_n) ?

`def f(x):`
`    return 3-4/(x+2)`
 	
`u=4`
`for i in range(8):`
`    u=f(u)`
`    print(u)`
	2.3333333333333335
	2.076923076923077
	2.018867924528301 7
	2.004694835680751
	2.0011723329425557
	2.0002929973630237
	2.000073243975683
	2.0000183106586342

b) Démontrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$

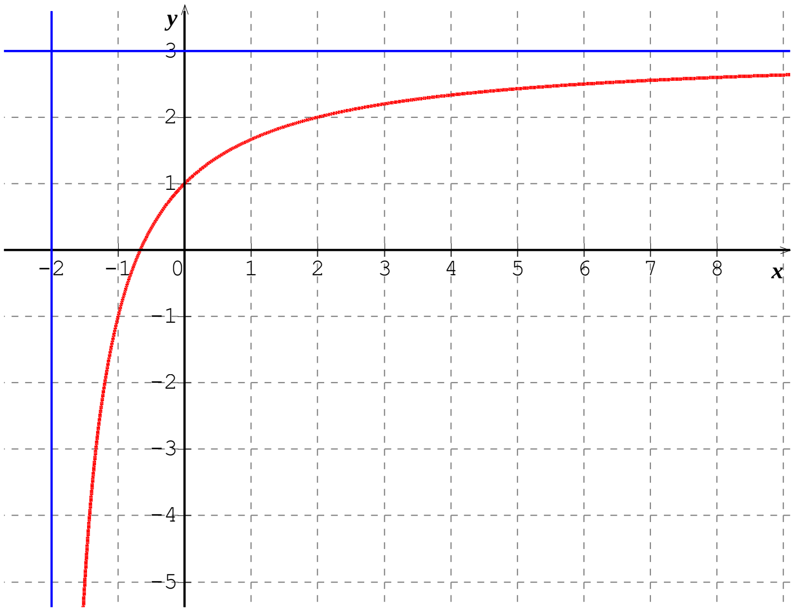
c) La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

Exercice 1.	**1.**	$\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to+\infty} 4 = 4 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x+2 = +\infty\end{matrix}\right\}$ par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x+2} = 0$ et donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$ $y = 3$ est une asymptote horizontale en $+\infty$. $\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to-2} 4 = 4 \\ \lim\limits_{x\to-2^+} x+2 = 0^+\end{matrix}\right\}$ par quotient, $\lim\limits_{x\to-2^+} \dfrac{4}{x+2} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = -\infty$ $x = -2$ est une asymptote verticale.
	2.	La fonction f est dérivable sur $]-2;+\infty[$, $\forall x \in]-2;+\infty[\quad f(x) = 3 - \dfrac{4}{x+2}$ $\forall x \in]-2;+\infty[\quad f'(x) = 0 - 4 \times \dfrac{-1}{(x+2)^2}$

2.

$$f'(x) = \frac{4}{(x+2)^2} > 0$$

x	-2 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ 3



3.

Soit $x \in]-2;+\infty[$

$$f(x) = x$$

$$\Leftrightarrow 3 - \frac{4}{x+2} = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x+2)-4}{x+2} = x$$

$$\Leftrightarrow 3x + 6 - 4 = x(x+2)$$

$$\Leftrightarrow 3x + 2 = x^2 + 2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 > 0$$

Il y a donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+3}{2} = 2$$

4a)

Je conjecture que la suite (u_n) est décroissante et convergente vers 2.

	4b)	Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$ **Initialisation, pour $n = 0$:** $$u_0 = 4 \text{ et } u_1 = f(u_0) = f(4) = 3 - \frac{4}{4+2} = \frac{9-2}{3} = \frac{7}{3}$$ $$\text{donc } 0 \leq u_1 \leq u_0 \leq 4$$ **Hérédité,** je suppose que, pour n un entier fixé : $$0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$$ La fonction f est croissante sur $[0; 4]$ donc $$f(0) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(4)$$ $$1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq \frac{7}{3}$$ $$\text{et donc } 0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 4$$ J'en déduis que, $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$
	4c)	J'en déduis que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. Elle est donc convergente et sa limite ℓ appartient à l'intervalle $[0; 4]$. De plus, la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$ Par conséquent, la suite (u_n) converge vers $\ell = 2$.

↑

Correction de l'exercice 2. (10 points)

Partie A Étude d'une fonction auxiliaire g

Soit la fonction $g(x) = 2e^x + 2x - 7$ définie sur $\mathbb{R}$.

▶ 1. Étudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

▶ 2. Étudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.

▶ 3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α. Donner un encadrement de α à 0,01 près.

▶ 4. Étudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B Étude d'une fonction

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x - 5)(1 - e^{-x})$.

▶ 1. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

▶ 2a) Calculer $f'(x)$. Démontrer que $f'(x)$ et $g(x)$ sont de même signe.

b) Dresser le tableau de variations de f.

▶ 3a) Démontrer l'égalité : $f(\alpha) = \dfrac{(2\alpha - 5)^2}{2\alpha - 7}$

b) En étudiant le sens de variations de la fonction $h(x) = \dfrac{(2x-5)^2}{2x-7}$ sur l'intervalle $\left]-\infty; \dfrac{5}{2}\right]$ et l'encadrement de α, déterminer un encadrement de $f(\alpha)$.

↑

Exercice 2.

A1.

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x = 0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} 2x-7=-\infty\end{array}\right\}\text{par somme, } \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} 2e^x = +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2x-7=+\infty\end{array}\right\}\text{par somme, } \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

A2.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$,

$\forall x \in \mathbb{R},\ \ g(x) = 2e^x + 2x - 7$

$g'(x) = 2e^x + 2$ donc $\forall x \in \mathbb{R}\ \ g'(x) > 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

A3.

Puisque la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est aussi continue sur $\mathbb{R}$.
$g(0) = 2e^0 + 0 - 7 = \mathbf{-5 < 0}$
$g(1) = 2e^1 + 2 - 7 = \mathbf{3e - 5 \approx 0,4 > 0}$

$$\textbf{donc } \boldsymbol{g(0) > 0 > g(1)}$$

Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0\,;1]$.
De plus, la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, la solution est donc unique notée α.
Avec la calculatrice, on obtient que $0{,}94 < \alpha < 0{,}95$.

x	f(x)
0.9	-0.2807938
0.91	-0.2113549
0.92	-0.1414192
0.93	-0.07098164
0.94	-3.716334E-5
0.95	0.07141932
0.96	0.1433929

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
APP SUR ◆ POUR △Tbl

X	Y1		
0.91	-0.211		
0.92	-0.141		
0.93	-0.071		
0.94	-4E-5		
0.95	0.0714		
0.96	0.1434		
0.97	0.2159		
0.98	0.2889		
0.99	0.3625		
1	0.4366		
1.01	0.5112		

X=0.94

A4.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

B1.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} 2x-5=-\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1-e^{-x}=-\infty\end{array}\right\}\text{par produit, } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-5=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1-e^{-x}=1\end{array}\right\}\text{par produit, } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

B2a)

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$,

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)=\underbrace{(2x-5)}_{u}\underbrace{(1-e^{-x})}_{v}$

$f'(x)=2(1-e^{-x})+(2x-5)\big(-(-e^{-x})\big)$

$f'(x)=2-2e^{-x}+(2x-5)e^{-x}$

$f'(x)=2-2e^{-x}+2xe^{-x}-5e^{-x}$

$f'(x)=2-7e^{-x}+2xe^{-x}$

$f'(x)=e^{-x}(2e^{x}-7+2x)$

$f'(x)=e^{-x}\times g(x)$

donc $\forall x \in \mathbb{R}\ f'(x)>0 \Leftrightarrow g(x)>0$ car $e^{-x}>0$

Par conséquent, $f'(x)$ et $g(x)$ sont de même signe.

B2b)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

B3a)

$$f(\alpha)=(2\alpha-5)(1-e^{-\alpha})$$

or α est définie par $g(\alpha)=0=2e^{\alpha}+2\alpha-7$

$$\Leftrightarrow 2\alpha-7=-2e^{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\alpha-7}{e^{\alpha}}=-2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e^{\alpha}}=e^{-\alpha}=\frac{-2}{2\alpha-7}$$

donc $f(\alpha)=(2\alpha-5)\left(1-\dfrac{-2}{2\alpha-7}\right)$

$$f(\alpha)=(2\alpha-5)\times\frac{2\alpha-7+2}{2\alpha-7}$$

$$f(\alpha)=(2\alpha-5)\times\frac{2\alpha-5}{2\alpha-7}$$

$$f(\alpha)=\frac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$$

B3b)

La fonction h est dérivable sur $\left]-\infty;\frac{5}{2}\right]$,

$$\forall x \in \left]-\infty;\frac{5}{2}\right], \quad h(x) = \frac{(2x-5)^2}{2x-7} = \frac{u}{v}$$

$$h'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{2\times(2x-5)\times 2(2x-7) - (2x-5)^2\times 2}{(2x-7)^2}$$

$$h'(x) = \frac{4(4x^2 - 14x - 10x + 35) - 2(4x^2 - 20x + 25)}{(2x-7)^2}$$

$$h'(x) = \frac{4(4x^2 - 24x + 35) - 8x^2 + 40x - 50}{(2x-7)^2}$$

$$h'(x) = \frac{16x^2 - 96x + 140 - 8x^2 + 40x - 50}{(2x-7)^2}$$

$$h'(x) = \frac{8x^2 - 56x + 90}{(2x-7)^2}$$

$$h(x) > 0 \Leftrightarrow 8x^2 - 56x + 90 > 0 \text{ car } (2x-7)^2 > 0$$

$$\Delta = 56^2 - 4\times 8\times 90 = 256 > 0$$

$$x_1 = \frac{56-\sqrt{256}}{16} = 2{,}5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{56+\sqrt{256}}{16} = 4{,}5 \text{ de plus } a = 8 > 0$$

x	$-\infty$ $\qquad$ $\frac{5}{2}$
$h'(x)$	$+$
$h(x)$	$\nearrow$

On sait que $0{,}94 < \alpha < 0{,}95$

La fonction h étant croissante sur $\left]-\infty;\frac{5}{2}\right]$:

$$h(0{,}94) < h(\alpha) < h(0{,}95)$$

$$h(0{,}94) = \frac{(2\times 0{,}94 - 5)^2}{2\times 0{,}94 - 7} = -1{,}90125$$

$$h(0{,}95) = \frac{(2\times 0{,}95 - 5)^2}{2\times 0{,}95 - 7} \approx -1{,}88431$$

$$-1{,}9013 < h(\alpha) = f(\alpha) < -1{,}884$$