# Terminale Spécialité Mathématiques
## Devoir à rédiger n° $\boxed{4}$
## Révisions pour le BAC Blanc

## Table des matières

# Devoir à rédiger n° $\boxed{4}$
# Révisions pour le BAC Blanc
# Enoncé du sujet

## Exercice 1.

La dyschromatopsie, appelée aussi daltonisme dans sa forme héréditaire, est une anomalie de la vision affectant la perception des couleurs.
Selon l'INSEE, la population française au 1er janvier 2024 est composé de 49% d'hommes. D'autre part, en France, on estime que 8% des hommes sont daltoniens. Les femmes ne sont, quant à elles, quasiment pas touchées par ce trouble de la vision : seulement 0,4% des femmes sont daltoniennes.

**Partie A :**
On interroge une personne au hasard dans la population française. On note $H$ l'évènement : « la personne est un homme » et $D$ l'évènement : « la personne est daltonienne ».
▶ 1. Traduire la situation décrite dans l'énoncé, à l'aide d'un arbre de probabilité.
▶ 2. Déterminer la probabilité que la personne interrogée soit daltonienne.
▶ 3. La personne interrogée est daltonienne. Déterminer la probabilité que ce soit un homme.

**Partie B :**
Un groupe est constitué de 100 lycéens. On note $X$ la variable aléatoire qui donne le nombre de daltoniens parmi ces lycéens. On admet que, dans la population, la probabilité qu'une personne soit daltonienne est égale à 0,041.
▶ 1. Déterminer la loi de $X$.
▶ 2. Déterminer les valeurs exactes de $P(X = 0)$ et $P(X = 1)$.
▶ 3. En déduire la probabilité qu'il y ait au moins deux daltoniens parmi les 100 lycéens.

**Partie C :**
A partir de combien d'hommes dans un groupe, la probabilité qu'il y ait au moins un daltonien est supérieure à 0,95 ?

## Exercice 2.

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve. Cette population est estimée à 12 000 individus en 2017. Les contraintes du milieu naturel font que la population ne peut pas dépasser les 60 000 individus.

**Partie A : un premier modèle**
Dans une première approche, le biologiste estime que la population croît de 5 % par an. L'évolution annuelle de la population est ainsi modélisée par une suite $(v_n)$ où $v_n$ représente le nombre d'individus, exprimé en milliers, en $2017 + n$ où $n$ est un entier naturel. On a donc $v_0 = 12$.
▶ 1. Déterminer la nature de la suite $(v_n)$ et donner l'expression de $v_n$ en fonction de l'entier naturel $n$.
▶ 2. Ce modèle répond-il aux contraintes du milieu naturel ?

**Partie B : un second modèle**

Le biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population par une suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 12$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = -\frac{1{,}1}{605}u_n^2 + 1{,}1 \times u_n$.

▶1. On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\frac{1{,}1}{605}x^2 + 1{,}1x$.
a. Justifier que la fonction $g$ est croissante sur $[0,60]$.
b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = x$.

▶2. On remarquera que, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = g(u_n)$.
a. Calculer une valeur arrondie à $10^{-3}$ de $u_1$. Interpréter.
b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 55$.
c. En déduire la convergence de la suite $(u_n)$.
d. Déterminer la limite de la suite $(u_n)$ et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

▶3. Le biologiste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les 50 000 individus avec ce second modèle. Pour cela, il utilise l'algorithme suivant. Recopier et compléter cet algorithme, sur sa copie, afin qu'il affiche le plus petit entier $r$ tel que $u_r \geq 50$.

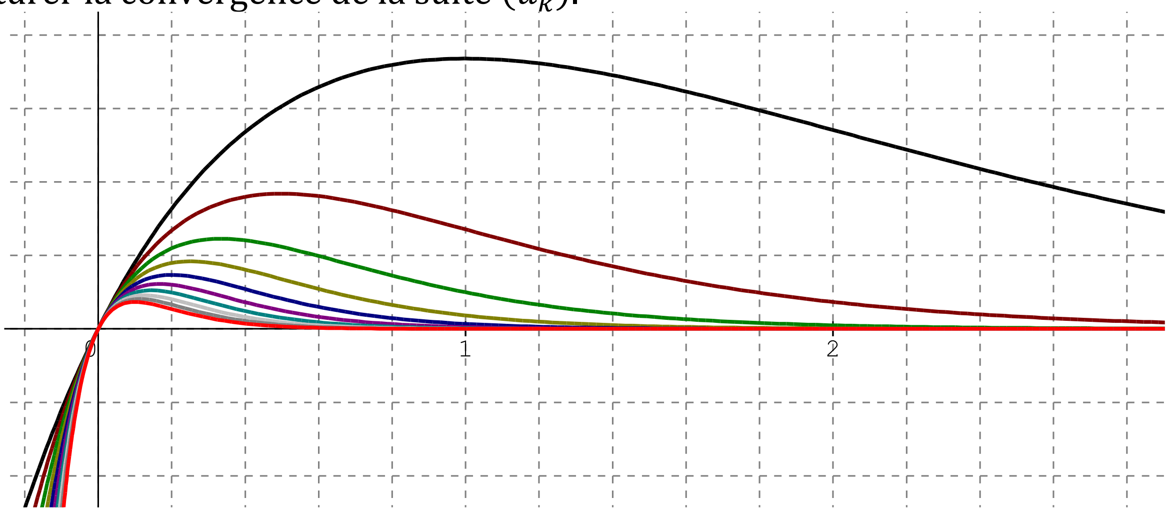
```
n=0
u=12
while   ...     :
      u=...
      n=...
print(...)
```

## Exercice 3.

Soit $k$ un réel strictement positif. On considère les fonctions $f_k$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = x\,e^{-k\,x}.$$

▶1. On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction $f_k$ dans un plan muni d'un repère orthogonal. On a représenté ci-dessous quelques courbes $\mathcal{C}_k$ pour différentes valeurs de $k$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $u_k$ l'ordonnée du maximum de la fonction $f_k$. Conjecturer la convergence de la suite $(u_k)$.




▶2.

a) Pour tout réel $k$ strictement positif, on admet que la fonction $f_k$ est dérivable. Démontrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_k(x) = (1 - kx)\,e^{-k\,x}$.
b) Démontrer que, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f_k$ admet un maximum sur $\mathbb{R}$.
c) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, on note $u_k$ l'ordonnée du maximum de la fonction $f_k$. Démontrer la conjecture émise à la question 1.

# Devoir à rédiger n° 3
# Révisions pour le BAC Blanc
# Correction du sujet

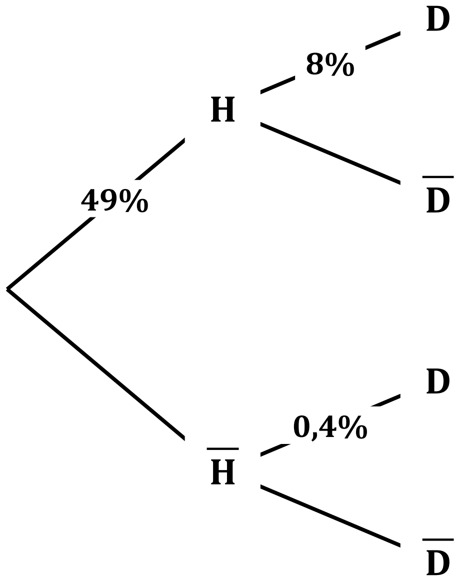
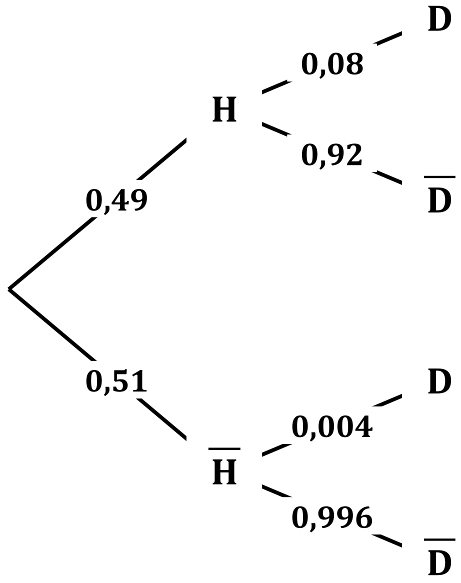
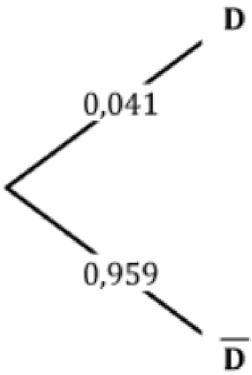
## Correction de l'exercice 1.

La dyschromatopsie, appelée aussi daltonisme dans sa forme héréditaire, est une anomalie de la vision affectant la perception des couleurs.
Selon l'INSEE, la population française au 1er janvier 2024 est composé de 49% d'hommes. D'autre part, en France, on estime que 8% des hommes sont daltoniens. Les femmes ne sont, quant à elles, quasiment pas touchées par ce trouble de la vision : seulement 0,4% des femmes sont daltoniennes.

**Partie A :**
On interroge une personne au hasard dans la population française. On note $H$ l'évènement : « la personne est un homme » et $D$ l'évènement : « la personne est daltonienne ».
▶ 1. Traduire la situation décrite dans l'énoncé, à l'aide d'un arbre de probabilité.
▶ 2. Déterminer la probabilité que la personne interrogée soit daltonienne.
▶ 3. La personne interrogée est daltonienne. Déterminer la probabilité que ce soit un homme.

**Partie B :**
Un groupe est constitué de 100 lycéens. On note $X$ la variable aléatoire qui donne le nombre de daltoniens parmi ces lycéens. On admet que, dans la population, la probabilité qu'une personne soit daltonienne est égale à 0,041.
▶ 1. Déterminer la loi de $X$.
▶ 2. Déterminer les valeurs exactes de $P(X = 0)$ et $P(X = 1)$.
▶ 3. En déduire la probabilité qu'il y ait au moins deux daltoniens parmi les 100 lycéens.

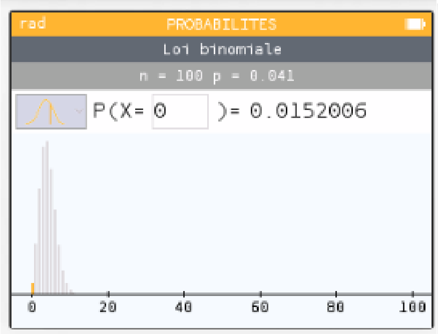
**Partie C :**
A partir de combien d'hommes dans un groupe, la probabilité qu'il y ait au moins un daltonien est supérieure à 0,95 ?

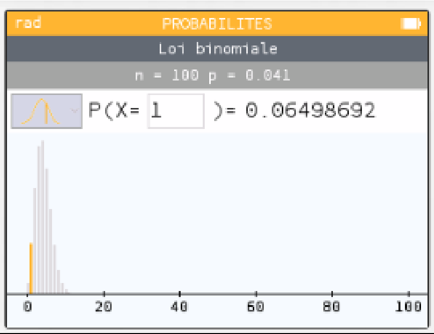
| | | |
|---|---|---|
| **Exercice 1.** | **A1.** | $P(H) = 49\% = 0{,}49$<br>$P_H(D) = 8\% = 0{,}08$<br>$P_{\overline{H}}(D) = 0{,}4\% = 0{,}004$<br> |
| | **A2.** | $P(D) = P(H \cap D) + P(\overline{H} \cap D)$<br>$P(D) = P(H) \times P_H(D) + P(\overline{H}) \times P_{\overline{H}}(D)$<br>$P(D) = 0{,}49 \times 0{,}08 + 0{,}51 \times 0{,}004$<br>$P(D) = 0{,}04124$ soit $4{,}124\%$<br>La probabilité que la personne interrogée au hasard soit daltonienne vaut 0,04124. |
| | **A3.** | $P_D(H) = \dfrac{P(H \cap D)}{P(D)}$<br>$P_D(H) = \dfrac{0{,}49 \times 0{,}08}{0{,}04124} \approx 0{,}9505$ soit $95{,}1\%$ |
| | **B1.** | Pour chaque lycéen, la probabilité d'être daltonien est 0,041.<br><br>On répète alors 100 fois, de façon identique et indépendante, l'alternative où la probabilité d'être daltonien est $0{,}041$. $X$ compte le nombre de daltoniens parmi les 100 lycéens suit alors une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}041$. |

<table>
<tr><td></td><td>B2.</td><td>

$P(X=0)=\binom{100}{0}\times 0{,}041^{0}\times 0{,}959^{100}=0{,}959^{100}\approx 0{,}0152\ \text{ soit }\ 1,52\%$

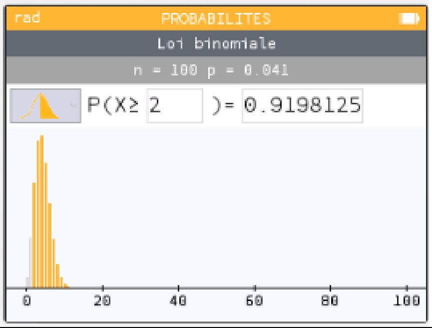
$P(X=1)=\binom{100}{1}\times 0{,}041^{1}\times 0{,}959^{99}\approx 0{,}065\ \text{ soit }\ 6{,}5\%$



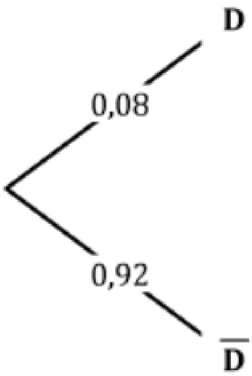

</td></tr>
<tr><td></td><td>B3.</td><td>

$P(X\geq 2)=1-P(X=0)-P(X=1)\approx 0{,}9198\ \text{ soit }\ 92\%$




</td></tr>
<tr><td></td><td>C.</td><td>

Pour chaque homme, la probabilité d'être daltonien est 0,08.




Soit $n\in\mathbb{N}$, on répète alors $n$ fois, de façon identique et indépendante, l'alternative où la probabilité d'être daltonien est 0,08. Soit $Y_n$ le nombre de daltoniens parmi les $n$ hommes, $Y_n$ suit alors une loi binomiale de paramètres $n$ et $p=0{,}08$.

$P(Y_n\geq 1)=1-P(Y_n=0)=1-0{,}92^{n}$

$$\begin{aligned} & P(Y_n\geq 1)\geq 0{,}95 \\ \Leftrightarrow\ & 1-0{,}92^{n}\geq 0{,}95 \\ \Leftrightarrow\ & -0{,}92^{n}\geq -0{,}05 \\ \Leftrightarrow\ & 0{,}92^{n}\leq 0{,}05 \\ \Leftrightarrow\ & \ln(0{,}92^{n})\leq \ln(0{,}05) \\ \Leftrightarrow\ & n\times\ln(0{,}92)\leq \ln(0{,}05) \\ \Leftrightarrow\ & n\geq \frac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}92)} \\ \Leftrightarrow\ & n\geq 35{,}9 \end{aligned}$$

A partir de 36 hommes dans un groupe, la probabilité qu'il y ait au moins un daltonien sera supérieure à 0,95.

</td></tr>
</table>

## Correction de l'exercice 2.

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve. Cette population est estimée à 12 000 individus en 2017. Les contraintes du milieu naturel font que la population ne peut pas dépasser les 60 000 individus.

**Partie A : un premier modèle**

Dans une première approche, le biologiste estime que la population croît de 5 % par an. L'évolution annuelle de la population est ainsi modélisée par une suite $(v_n)$ où $v_n$ représente le nombre d'individus, exprimé en milliers, en $2017 + n$ où $n$ est un entier naturel. On a donc $v_0 = 12$.

▶ 1. Déterminer la nature de la suite $(v_n)$ et donner l'expression de $v_n$ en fonction de l'entier naturel $n$.

▶ 2. Ce modèle répond-il aux contraintes du milieu naturel ?

**Partie B : un second modèle**

Le biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population par une suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 12$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = -\frac{1,1}{605}u_n^2 + 1,1 \times u_n$.

▶ 1. On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\frac{1,1}{605}x^2 + 1,1x$.

a. Justifier que la fonction $g$ est croissante sur $[0,60]$.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = x$.

▶ 2. On remarquera que, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = g(u_n)$.

a. Calculer une valeur arrondie à $10^{-3}$ de $u_1$. Interpréter.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 55$.

c. En déduire la convergence de la suite $(u_n)$.

d. Déterminer la limite de la suite $(u_n)$ et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

▶ 3. Le biologiste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les 50 000 individus avec ce second modèle. Pour cela, il utilise l'algorithme suivant.

Recopier et compléter cet algorithme, sur sa copie, afin qu'il affiche le plus petit entier $r$ tel que $u_r \geq 50$.

```
n=0
u=12
while  ...    :
     u=...
     n=...
print(...)
```

| | | |
|---|---|---|
| **Exercice 2.** | **A1.** | +5% revient à multiplier par 1,05 donc, $$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 1,05\ v_n$$ La suite $(v_n)$ est donc géométrique de raison 1,05 et de 1er terme $v_0 = 12$. J'en déduis que, $$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 12 \times 1,05^n$$ |
| | **A2.** | $\lim\limits_{n\to+\infty} 1,05^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ Selon ce modèle, la population dépassera les 60 000 individus donc il ne répond pas aux contraintes du milieu. |

**B1a.**

$g$ est dérivable sur $[0{,}60]$ et $\forall x \in [0{,}60]$,

$$g'(x) = -\frac{2{,}2}{605}x + 1{,}1$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{2{,}2}{605}x + 1{,}1 > 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2{,}2}{605}x > -1{,}1$$

$$\Leftrightarrow x < -1{,}1 \times \frac{605}{-2{,}2}$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{605}{2}$$

$$\Leftrightarrow x < 302{,}5$$

On en déduit que la fonction $g$ est croissante sur $[0{,}60]$.

**B1b.**

$$g(x) = x$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1{,}1}{605}x^2 + 1{,}1x = x$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1{,}1}{605}x^2 + 0{,}1x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(-\frac{1{,}1}{605}x + 0{,}1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad -\frac{1{,}1}{605}x + 0{,}1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad -\frac{1{,}1}{605}x = -0{,}1$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -0{,}1 \times \frac{605}{-1{,}1}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 55$$

Les solutions sont 0 et 55.

**B2a.**

$u_1 = g(u_0) \approx 12{,}938$

| n | $u_n$ |
|---|---|
| 0 | 12 |
| 1 | 12.93818182 |
| 2 | 13.92764264 |
| 3 | 14.96771739 |
| 4 | 16.0571572 |
| 5 | 17.19408692 |
| 6 | 18.37597448 |

Cela signifie, qu'en 2018, la population est estimée à 12,938 milliers d'individus.

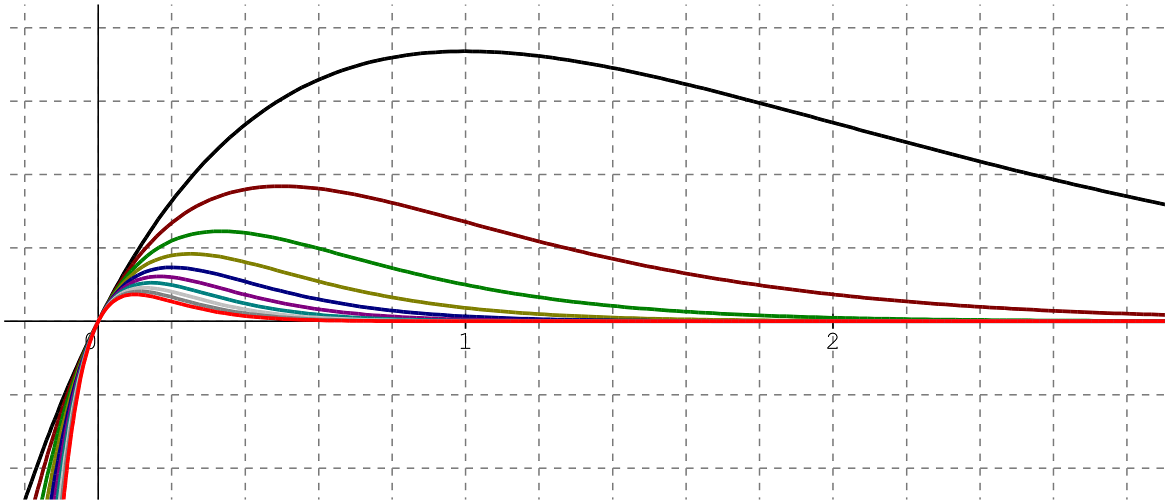
<table>
<tr><td></td><td>B2b.</td><td colspan="2">Démontrons par récurrence que, $\mathcal{P}(n) : 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 55$ est vraie pour tout entier naturel $n$.<br><br>Initialisation pour $n = 0$ :<br>$u_0 = 12$<br>$u_1 \approx 12{,}938$<br>$0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 55$<br><br>donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.<br><br>Hérédité :<br>On suppose que $\mathcal{P}(n) : 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 55$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$ fixé<br><br>$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 55$<br>or la fonction $g$ est croissante sur $[0{,}60]$<br>donc $g(0) \leq g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \leq g(55)$<br>et donc $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 55$<br><br>donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie<br><br>Par conséquent : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$<br>donc $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 55$</td></tr>
<tr><td></td><td>B2c.</td><td colspan="2">Par conséquent, la suite $(u_n)$ est croissante car $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1}$<br>et la suite $(u_n)$ est majorée car $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 55$.<br>On en déduit que la suite $(u_n)$ est convergente.</td></tr>
<tr><td></td><td>B2d.</td><td colspan="2">$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n)$<br>La fonction $g$ étant continue sur $[0{,}60]$ et la suite $(u_n)$ convergente, on en déduit que la limite de la suite $(u_n)$ est solution de $g(x) = x$.<br>Par conséquent, la limite est 0 ou 55.<br>Or, $u_0 = 12$ et la suite est croissante donc la limite est 55.<br>Selon ce modèle, la population augmentera au fur et à mesure et tendra vers 55 000 individus.</td></tr>
<tr><td></td><td>3.</td><td><pre>n=0
u=12
while u<50:
    u=(-1.1/605)*u**2+1.1*u
    n=n+1
print(n)</pre></td><td>Réponse du programme :<br>36</td></tr>
</table>

## Correction de l'exercice 3.

Soit $k$ un réel strictement positif. On considère les fonctions $f_k$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = x\, e^{-k\,x}.$$

▶1. On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction $f_k$ dans un plan muni d'un repère orthogonal. On a représenté ci-dessous quelques courbes $\mathcal{C}_k$ pour différentes valeurs de $k$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $u_k$ l'ordonnée du maximum de la fonction $f_k$. Conjecturer la convergence de la suite $(u_k)$.

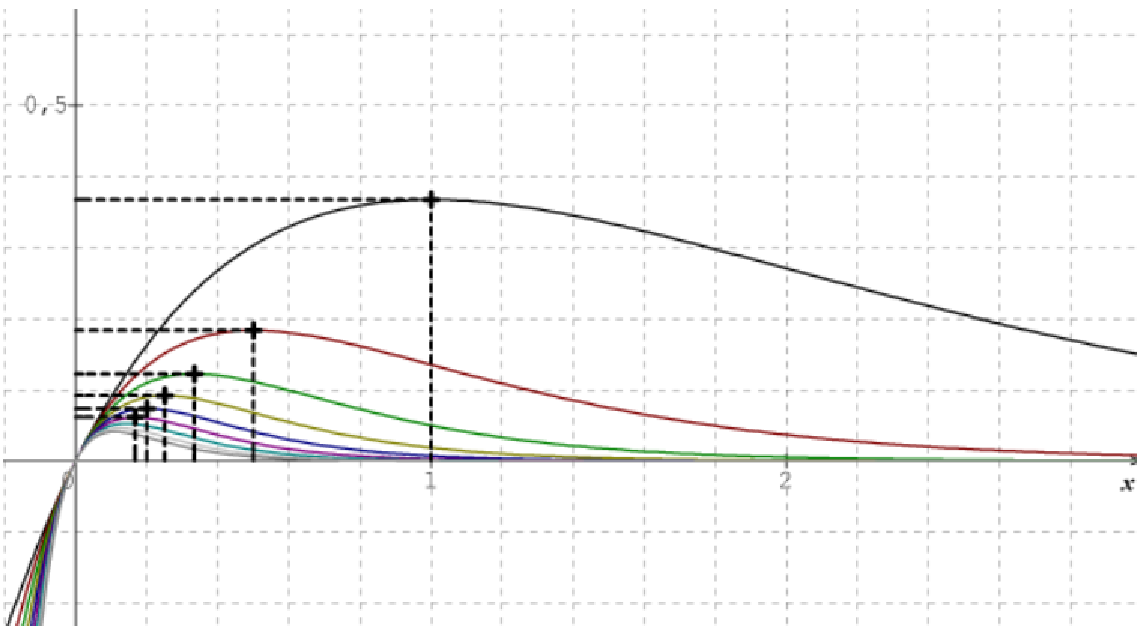



▶ 2.

a) Pour tout réel $k$ strictement positif, on admet que la fonction $f_k$ est dérivable. Démontrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_k(x) = (1 - kx)\, e^{-k\,x}$.

b) Démontrer que, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f_k$ admet un maximum sur $\mathbb{R}$.

c) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, on note $u_k$ l'ordonnée du maximum de la fonction $f_k$. Démontrer la conjecture émise à la question 1.

<table>
<tr><td rowspan="2">Exercice 3.</td><td>1.</td><td>

D'après le graphique, je conjecture que la suite $(u_k)$ est converge vers 0.</td></tr>
<tr><td>2a.</td><td>$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ f_k(x) = x\, e^{-k\,x} = u\, v$

$$u = x \qquad u' = 1$$
$$v = e^{-k\,x} \qquad v' = -ke^{-k\,x}$$

$$f'_k(x) = u'v + uv'$$
$$f'_k(x) = 1 \times\ e^{-k\,x} + x\ \times (-ke^{-k\,x})$$
$$f'_k(x) =\ e^{-k\,x} - kx\, e^{-k\,x}$$
$$f'_k(x) = (1 - kx)\, e^{-k\,x}$$</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>2b.</td>
<td>
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f'_k(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - kx > 0 \text{ car } e^{-k\,x} > 0$$
$$\Leftrightarrow -kx > -1$$
$$\Leftrightarrow x < \frac{-1}{-k}$$
$$\Leftrightarrow x < \frac{1}{k}$$
<table>
<tr><td>$x$</td><td>$-\infty$   $\frac{1}{k}$   $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'_k(x)$</td><td>$+$   $0$   $-$</td></tr>
<tr><td>$f_k(x)$</td><td>$\nearrow$ $\frac{1}{ke}$ $\searrow$</td></tr>
</table>
$$f_k\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k}\, e^{-k\times\frac{1}{k}} = \frac{1}{k}\, e^{-1} = \frac{1}{k} \times \frac{1}{e} = \frac{1}{ke}$$
$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f_k$ admet donc un maximum sur $\mathbb{R}$.
</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>2c.</td>
<td>
$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad u_k = \frac{1}{ke}$<br>
$\lim\limits_{k\to+\infty} ke = +\infty$ car $k > 0$
$$\text{donc } \lim_{k\to+\infty} u_k = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{ke} = 0$$
</td>
</tr>
</table>