

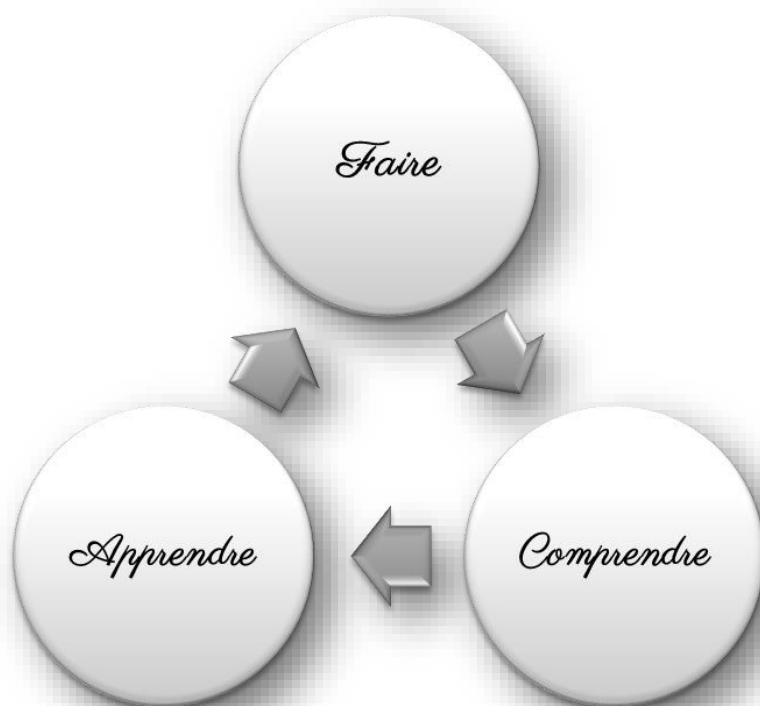


Table des matières

Enoncé du sujet A	2
Exercice 1. (4 points)	2
Exercice 2. (6 points)	2
Exercice 3. (6 points)	2
Exercice 4. (4 points)	2
Enoncé du sujet B	3
Exercice 1. (4 points)	3
Exercice 2. (6 points)	3
Exercice 3. (6 points)	3
Exercice 4. (4 points)	3
Correction du sujet A	4
Correction de l'exercice 1. (4 points)	4
Correction de l'exercice 2. (6 points)	5
Correction de l'exercice 3. (6 points)	6
Correction de l'exercice 4. (4 points)	8
Enoncé du sujet B	10
Correction de l'exercice 1. (4 points)	10
Correction de l'exercice 2. (6 points)	11
Correction de l'exercice 3. (6 points)	12
Correction de l'exercice 4. (4 points)	14

Énoncé du sujet A

Exercice 1. (4 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = \sqrt{6 + \frac{1}{3}(u_n)^2}$$

- 1. Démontrer, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3\sqrt{1 - \frac{1}{3^n}}$.
- 2. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 2. (6 points)

- 1. On étudie la fonction $f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2 + 1}$ définie sur $\mathbb{R}$.
 Démontrer que la fonction f est monotone sur $\mathbb{R}$.
- 2. Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = (1 - 2\sqrt{x})^6$.
 - a) Démontrer que la fonction g admet un extremum que l'on précisera.
 - b) Déterminer l'équation de la tangente en 1.

Exercice 3. (6 points)

On étudie la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 2v_n + 4n - 5$ et $v_0 = 0$.

- 1. a) Démontrer, par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N} : v_n \leq -4n$.
 b) En déduire la limite de la suite (v_n) .
- 2. a) Conjecturer une expression de v_n en fonction de n .

```
def v(n):
    v=0
    for i in range(n):
        v=2*v+4*i-5
    return v

def w(n):
    return 1-4*n-v(n)

for n in range(10):
    print(n, "|", v(n), "|", w(n))
```

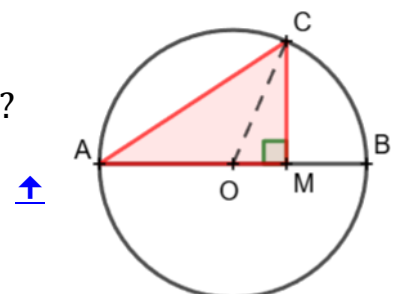
0		0		1
1		-5		2
2		-11		4
3		-19		8
4		-31		16
5		-51		32
6		-87		64
7		-155		128
8		-287		256
9		-547		512

b) Démontrez votre conjecture.

Exercice 4. (4 points)

On considère un cercle de centre O , de diamètre $[AB]$ et de rayon 6 cm. Le point M est un point mobile sur le segment $[OB]$. On trace la perpendiculaire à (AB) qui passe par le point M , l'un des points d'intersection avec le cercle est le point C . Pour tout $x \in [0; 6]$, posons $OM = x$ et notons $f(x)$ l'aire du triangle AMC .

- 1. Démontrer que $f(x) = \frac{(6+x)\sqrt{36-x^2}}{2}, \forall x \in [0; 6]$.
- 2. Existe-t-il une position de M qui donne une aire maximale ?
 Si oui, combien vaut cette aire maximale ?



Énoncé du sujet B

Exercice 1. (4 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = \sqrt{2 + \frac{1}{2}(u_n)^2}$$

- 1. Démontrer, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2\sqrt{1 - \frac{1}{2^n}}$.
- 2. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 2. (6 points)

- 1. On étudie la fonction $f(x) = \frac{e^{-x}}{1+x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.
 Démontrer que la fonction f est monotone sur $\mathbb{R}$.
- 2. Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = (1 - 2\sqrt{x})^4$.
 - a) Démontrer que la fonction g admet un extremum que l'on précisera.
 - b) Déterminer l'équation de la tangente en 1.

Exercice 3. (6 points)

On étudie la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 2v_n + 6n - 7$ et $v_0 = 0$.

- 1. a) Démontrer, par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N} : v_n \leq -6n$.
 b) En déduire la limite de la suite (v_n) .
- 2. a) Conjecturer une expression de v_n en fonction de n .

```
def v(n):
    v=0
    for i in range(n):
        v=2*v+6*i-7
    return v

def w(n):
    return 1-6*n-v(n)

for n in range(10):
    print(n, "|", v(n), "|", w(n))
```

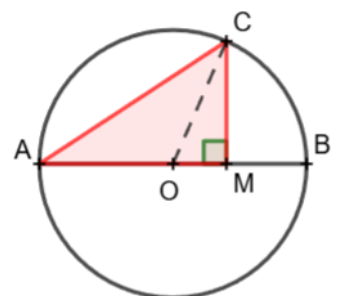
0		0		1
1		-7		2
2		-15		4
3		-25		8
4		-39		16
5		-61		32
6		-99		64
7		-169		128
8		-303		256
9		-565		512

b) Démontrez votre conjecture.

Exercice 4. (4 points)

On considère un cercle de centre O , de diamètre $[AB]$ et de rayon 4 cm. Le point M est un point mobile sur le segment $[OB]$. On trace la perpendiculaire à (AB) qui passe par le point M , l'un des points d'intersection avec le cercle est le point C . Pour tout $x \in [0; 4]$, posons $OM = x$ et notons $f(x)$ l'aire du triangle AMC .

- 1. Démontrer que $f(x) = \frac{(4+x)\sqrt{16-x^2}}{2}, \forall x \in [0; 4]$.
- 2. Existe-t-il une position de M qui donne une aire maximale ?
 Si oui, combien vaut cette aire maximale ?



Correction de l'exercice 1. (4 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = \sqrt{6 + \frac{1}{3}(u_n)^2}$$

► 1. Démontrer, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3\sqrt{1 - \frac{1}{3^n}}$.

► 2. En déduire la limite de la suite (u_n) .



Exercice 1.	1.	Initialisation : Je vérifie que la propriété est vraie au rang $n = 0$: $3\sqrt{1 - \frac{1}{3^0}} = 3\sqrt{1 - 1} = 0 = u_0$ La propriété est vraie au rang 0. Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, je suppose la propriété vraie au rang n et je démontre qu'elle aussi vraie au rang $n + 1$. Je suppose que $u_n = 3\sqrt{1 - \frac{1}{3^n}}$ où $n \in \mathbb{N}$ fixé $u_{n+1} = \sqrt{6 + \frac{1}{3}(u_n)^2}$ $u_{n+1} = \sqrt{6 + \frac{1}{3}\left(3\sqrt{1 - \frac{1}{3^n}}\right)^2}$ $u_{n+1} = \sqrt{6 + \frac{1}{3} \times 9\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)}$ $u_{n+1} = \sqrt{6 + \frac{9}{3} - \frac{9}{3} \times \frac{1}{3^n}}$ $u_{n+1} = \sqrt{6 + 3 - 9 \times \frac{1}{3^{n+1}}}$ $u_{n+1} = \sqrt{9 - 9 \times \frac{1}{3^{n+1}}} = \sqrt{9\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)}$ $u_{n+1} = \sqrt{9} \times \sqrt{1 - \frac{1}{3^{n+1}}} = 3\sqrt{1 - \frac{1}{3^{n+1}}}$ La propriété est vraie au rang $n + 1$. Conclusion : J'en déduis, par le principe de récurrence, que la propriété est vraie pour tous les rangs $n \in \mathbb{N}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 3\sqrt{1 - \frac{1}{3^n}}$
--------------------	-----------	--

2.	$(3^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $3 > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$ Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^n} = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$
----	---



Correction de l'exercice 2. (6 points)

- 1. On étudie la fonction $f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2 + 1}$ définie sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que la fonction f est monotone sur $\mathbb{R}$.
- 2. Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = (1 - 2\sqrt{x})^6$.
a) Démontrer que la fonction g admet un extremum que l'on précisera.
b) Déterminer l'équation de la tangente en 1.



Exercice 2.	1.	La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2 + 1} = \frac{u}{v}$ $u = e^{-x} \quad u' = -e^{-x}$ $v = x^2 + 1 \quad v' = 2x$ $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{-e^{-x}(x^2 + 1) - e^{-x} \times 2x}{(x^2 + 1)^2}$ $f'(x) = \frac{-e^{-x}(x^2 + 1 + 2x)}{(x^2 + 1)^2}$ Méthode n°1 : $f'(x) = \frac{-e^{-x}(x + 1)^2}{(x^2 + 1)^2}$ or $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$ et $\frac{(x+1)^2}{(x^2+1)^2} \geq 0$ J'en déduis que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \leq 0$ Méthode n°2 : $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 + 2x > 0$ $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 1 = 4 - 4 = 0$ Le polynôme $x^2 + 1 + 2x$ n'admet qu'une seule racine $\frac{-2}{2} = -1$. Le polynôme est du signe de $a = 1 > 0$ J'en déduis que $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 + 2x \geq 0$ or $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$ et $(x^2 + 1)^2 > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \leq 0$ La fonction f est donc décroissante sur $\mathbb{R}$.
	2.	$\forall x \in [0; +\infty[\quad g(x) = (1 - 2\sqrt{x})^6 = u^6$ La fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$ $\forall x \in]0; +\infty[\quad u = 1 - 2\sqrt{x} \quad \text{donc} \quad u' = -2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-1}{\sqrt{x}}$ $g'(x) = 6u^5 \times u' = 6(1 - 2\sqrt{x})^5 \times \frac{-1}{\sqrt{x}} = \frac{-6(1 - 2\sqrt{x})^5}{\sqrt{x}}$ $g'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{x} < 0 \quad \text{car} \quad \sqrt{x} > 0 \quad \text{et} \quad -6 < 0$ $\Leftrightarrow -2\sqrt{x} < -1$ $\Leftrightarrow \sqrt{x} > \frac{-1}{-2}$ $\Leftrightarrow \sqrt{x} > \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow x > \frac{1}{4}$

Exercice 2.

x	0	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$		↙ 0 ↗	

$$g\left(\frac{1}{4}\right) = \left(1 - 2\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^6 = 0$$

La fonction g admet un minimum qui vaut 0 en $1/4$.

Equation de la tangente en a : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

$$g(1) = (1 - 2\sqrt{1})^6 = 1$$

$$g'(1) = \frac{-6(1 - 2\sqrt{1})^5}{\sqrt{1}} = 6$$

$$y = 6(x - 1) + 1 = 6x - 6 + 1$$

$$y = 6x - 5$$

The figure shows a Cartesian coordinate system with a grid. The x-axis is labeled from 0 to 1, and the y-axis is labeled from -1 to 4. A blue curve, representing the function $g(x) = (1 - 2\sqrt{x})^6$, starts at the origin (0,0), dips slightly below the x-axis, and then rises to pass through the point (1,1). A red line, representing the tangent line $y = 6x - 5$, passes through the point (1,1) and has a positive slope. Dashed lines indicate the coordinates of the point (1,1) and the x-intercept of the tangent line at (5/6, 0).



Correction de l'exercice 3. (6 points)

On étudie la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 2v_n + 4n - 5$ et $v_0 = 0$.

- 1. a) Démontrer, par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N} : v_n \leq -4n$.
b) En déduire la limite de la suite (v_n) .
- 2. a) Conjecturer une expression de v_n en fonction de n .

def v(n) :	0	0	1
v=0	1	-5	2
for i in range(n) :	2	-11	4
v=2*v+4*i-5	3	-19	8
return v	4	-31	16
	5	-51	32
def w(n) :	6	-87	64
return 1-4*n-v(n)	7	-155	128
	8	-287	256
for n in range(10) :	9	-547	512
print(n, " ", v(n) , " ", w(n))			

- b) Démontrez votre conjecture.



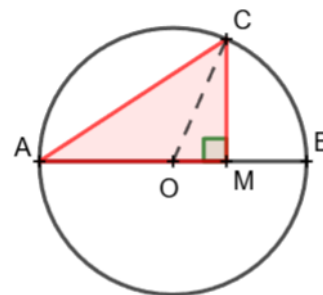
Exercice 3.	1a.	Initialisation : Je vérifie que la propriété est vraie au rang $n = 0$: $\left. \begin{array}{l} v_0 = 0 \\ -4 \times 0 = 0 \end{array} \right\} \text{donc } v_0 \leq -4 \times 0$ La propriété est vraie au rang 0. Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, je suppose la propriété vraie au rang n et je démontre qu'elle aussi vraie au rang $n + 1$. Je suppose que $v_n \leq -4n$ où $n \in \mathbb{N}$ fixé $v_n \leq -4n$ $2v_n \leq -8n$ $2v_n + 4n - 5 \leq -8n + 4n - 5$ $v_{n+1} \leq -4n - 5$ or $-4n - 5 - [-4(n + 1)] = -4n - 5 + 4n + 4 = -1 \leq 0$ donc $-4n - 5 \leq -4(n + 1)$ $v_{n+1} \leq -4(n + 1)$ La propriété est vraie au rang $n + 1$. Conclusion : J'en déduis, par le principe de récurrence, que la propriété est vraie pour tous les rangs $n \in \mathbb{N}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq -4n$
	1b.	$\lim_{n \rightarrow +\infty} -4n = -\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq -4n$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ par comparaison.
	2a.	J'observe que la 2^e fonction Python, définit la suite (w_n) par $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = 1 - 4n - v_n$ J'observe aussi, lorsque l'on affiche les termes que la suite (w_n) est géométrique de raison 2. Je conjecture alors que $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = 2^n$ et $v_n = 1 - 4n - 2^n$.
	2b.	Méthode n°1 : Je démontre par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 1 - 4n - 2^n$ Initialisation : Je vérifie que la propriété est vraie au rang $n = 0$: $1 - 4 \times 0 - 2^0 = 1 - 1 = 0 = v_0$ La propriété est vraie au rang 0. Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, je suppose la propriété vraie au rang n et je démontre qu'elle aussi vraie au rang $n + 1$. Je suppose que $v_n = 1 - 4n - 2^n$ où $n \in \mathbb{N}$ fixé $v_{n+1} = 2v_n + 4n - 5$ $v_{n+1} = 2(1 - 4n - 2^n) + 4n - 5$ $v_{n+1} = 2 - 8n - 2^{n+1} + 4n - 5$ $v_{n+1} = -3 - 4n - 2^{n+1}$ $v_{n+1} = 1 - 4n - 4 - 2^{n+1}$ $v_{n+1} = 1 - 4(n + 1) - 2^{n+1}$

Exercice 3.	2b.	La propriété est vraie au rang $n + 1$. Conclusion : J'en déduis, par le principe de récurrence, que la propriété est vraie pour tous les rangs $n \in \mathbb{N}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 1 - 4n - 2^n$
		Méthode n°2 : Je démontre que la suite (w_n) est géométrique $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = 1 - 4n - v_n$ Soit $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = 1 - 4(n+1) - v_{n+1}$ $w_{n+1} = 1 - 4n - 4 - (2v_n + 4n - 5)$ $w_{n+1} = -4n - 3 - 2v_n - 4n + 5$ $w_{n+1} = 2 - 8n - 2v_n$ $w_{n+1} = 2(1 - 4n - v_n)$ $w_{n+1} = 2w_n$ La suite (w_n) est donc géométrique de raison 2 et $w_0 = 1 - 0 - v_0 = 1$ J'en déduis que $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = 2^n = 1 - 4n - v_n$ donc, $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 1 - 4n - 2^n$



Correction de l'exercice 4. (4 points)

On considère un cercle de centre O , de diamètre $[AB]$ et de rayon 6 cm. Le point M est un point mobile sur le segment $[OB]$. On trace la perpendiculaire à (AB) qui passe par le point M , l'un des points d'intersection avec le cercle est le point C . Pour tout $x \in [0; 6]$, posons $OM = x$ et notons $f(x)$ l'aire du triangle AMC .



► 1. Démontrer que $f(x) = \frac{(6+x)\sqrt{36-x^2}}{2}$, $\forall x \in [0; 6]$.

► 2. Existe-t-il une position de M qui donne une aire maximale ? Si oui, combien vaut cette aire maximale ?



Exercice 4.	1.	Soit $x \in [0; 6]$, $OM = x$ donc $AM = 6 + x$ Le triangle AMC est rectangle en M son aire vaut donc $\frac{AM \times MC}{2}$. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle OMC rectangle en M : $OC^2 = OM^2 + MC^2$ $\Leftrightarrow 36 = x^2 + MC^2$ J'en déduis que : $f(x) = \frac{AM \times MC}{2} = \frac{(6+x)\sqrt{36-x^2}}{2}$

La fonction f est dérivable sur $[0; 6]$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{(6+x)\sqrt{36-x^2}}{2} = \frac{u \times v}{2}$$

$$u = 6+x \quad u' = 1$$

$$v = \sqrt{36-x^2} \quad v' = \frac{-2x}{2\sqrt{36-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{36-x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{u'v + uv'}{2} = \frac{1 \times \sqrt{36-x^2} + (6+x) \times \frac{-x}{\sqrt{36-x^2}}}{2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{36-x^2} + \frac{-x(6+x)}{\sqrt{36-x^2}} \right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{36-x^2}^2}{\sqrt{36-x^2}} + \frac{-x(6+x)}{\sqrt{36-x^2}} \right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{36-x^2-x(6+x)}{\sqrt{36-x^2}} \right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{36-x^2-6x-x^2}{\sqrt{36-x^2}} \right)$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2-6x+36}{2\sqrt{36-x^2}}$$

2. $f'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x^2-6x+36 > 0$ car $2\sqrt{36-x^2} > 0$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times (-2) \times 36 = 324 > 0$$

Le polynôme admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{6-\sqrt{324}}{-4} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{6+\sqrt{324}}{-4} = \underbrace{-6}_{\text{exclu}} < 0$$

De plus, la parabole est tournée vers le bas car $a = -2 < 0$

x	0	3	6
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	18	$\frac{27\sqrt{3}}{2}$	0

$$f(0) = \frac{(6+0)\sqrt{36-0^2}}{2} = 18$$

$$f(6) = \frac{(6+6)\sqrt{36-6^2}}{2} = 0$$

$$f(3) = \frac{(6+3)\sqrt{36-3^2}}{2} = \frac{9\sqrt{27}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{2}$$

L'aire du triangle AMC est maximale lorsque M est au milieu du segment $[OB]$ et elle

vaut $\frac{27\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$.

Terminale $\Rightarrow$ Contrôle n° 2
Spécialité Mathématiques - Calculatrice autorisée
Enoncé du sujet B

Correction de l'exercice 1. (4 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = \sqrt{2 + \frac{1}{2}(u_n)^2}$$

- 1. Démontrer, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2\sqrt{1 - \frac{1}{2^n}}$.
 ► 2. En déduire la limite de la suite (u_n) .



Exercice 1.	1.	Initialisation : Je vérifie que la propriété est vraie au rang $n = 0$: $2\sqrt{1 - \frac{1}{2^0}} = 2\sqrt{1 - 1} = 0 = u_0$ La propriété est vraie au rang 0. Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, je suppose la propriété vraie au rang n et je démontre qu'elle aussi vraie au rang $n + 1$. Je suppose que $u_n = 2\sqrt{1 - \frac{1}{2^n}}$ où $n \in \mathbb{N}$ fixé $u_{n+1} = \sqrt{2 + \frac{1}{2}(u_n)^2}$ $u_{n+1} = \sqrt{2 + \frac{1}{2}\left(2\sqrt{1 - \frac{1}{2^n}}\right)^2}$ $u_{n+1} = \sqrt{2 + \frac{1}{2} \times 4 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}$ $u_{n+1} = \sqrt{2 + \frac{4}{2} - \frac{4}{2} \times \frac{1}{2^n}}$ $u_{n+1} = \sqrt{2 + 2 - 4 \times \frac{1}{2^{n+1}}}$ $u_{n+1} = \sqrt{4 - 4 \times \frac{1}{2^{n+1}}} = \sqrt{4 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)}$ $u_{n+1} = \sqrt{4} \times \sqrt{1 - \frac{1}{2^{n+1}}} = 2\sqrt{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}$ La propriété est vraie au rang $n + 1$. Conclusion : J'en déduis, par le principe de récurrence, que la propriété est vraie pour tous les rangs $n \in \mathbb{N}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2\sqrt{1 - \frac{1}{2^n}}$
--------------------	-----------	--

2.	$(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $2 > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$
----	---



Correction de l'exercice 2. (6 points)

- 1. On étudie la fonction $f(x) = \frac{e^{-x}}{1+x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que la fonction f est monotone sur $\mathbb{R}$.
- 2. Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = (1 - 2\sqrt{x})^4$.
a) Démontrer que la fonction g admet un extremum que l'on précisera.
b) Déterminer l'équation de la tangente en 1.



Exercice 2.	1.	La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{e^{-x}}{1+x^2} = \frac{u}{v}$ $u = e^{-x} \quad u' = -e^{-x}$ $v = 1+x^2 \quad v' = 2x$ $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{-e^{-x}(x^2+1) - e^{-x} \times 2x}{(1+x^2)^2}$ $f'(x) = \frac{-e^{-x}(x^2+1+2x)}{(1+x^2)^2}$ Méthode n°1 : $f'(x) = \frac{-e^{-x}(x+1)^2}{(1+x^2)^2}$ or $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$ et $\frac{(x+1)^2}{(1+x^2)^2} \geq 0$ J'en déduis que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \leq 0$ Méthode n°2 : $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 + 2x > 0$ $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 1 = 4 - 4 = 0$ Le polynôme $x^2 + 1 + 2x$ n'admet qu'une seule racine $\frac{-2}{2} = -1$. Le polynôme est du signe de $a = 1 > 0$ J'en déduis que $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 + 2x \geq 0$ or $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$ et $(1+x^2)^2 > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \leq 0$ La fonction f est donc décroissante sur $\mathbb{R}$.
	2a.	$\forall x \in [0; +\infty[\quad g(x) = (1 - 2\sqrt{x})^4 = u^4$ La fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$ $\forall x \in]0; +\infty[\quad u = 1 - 2\sqrt{x} \quad \text{donc} \quad u' = -2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-1}{\sqrt{x}}$ $g'(x) = 4u^3 \times u' = 4(1 - 2\sqrt{x})^3 \times \frac{-1}{\sqrt{x}} = \frac{-4(1 - 2\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}$ $g'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{x} < 0 \quad \text{car} \quad \sqrt{x} > 0 \quad \text{et} \quad -4 < 0$ $\Leftrightarrow -2\sqrt{x} < -1$ $\Leftrightarrow \sqrt{x} > \frac{-1}{-2}$ $\Leftrightarrow \sqrt{x} > \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow x > \frac{1}{4}$

Exercice 2.

x	0	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$		↙ 0 ↘	

$$g\left(\frac{1}{4}\right) = \left(1 - 2\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^6 = 0$$

La fonction g admet un minimum qui vaut 0 en $1/4$.

2b.

Equation de la tangente en a : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

$$g(1) = (1 - 2\sqrt{1})^4 = 1$$

$$g'(1) = \frac{-4(1 - 2\sqrt{1})^5}{\sqrt{1}} = 4$$

$$y = 4(x - 1) + 1 = 4x - 4 + 1$$

$$y = 4x - 3$$

The figure shows a Cartesian coordinate system with a grid. The x-axis is labeled 'x' and has tick marks at 0 and 1. The y-axis is labeled 'y' and has tick marks at -1, -2, and -3. A blue curve, representing the function $g(x) = (1 - 2\sqrt{x})^4$, starts at the origin (0,0), dips slightly below the x-axis, and then rises to pass through the point (1,1). A red line, representing the tangent line $y = 4x - 3$, passes through the point (1,1) and has a positive slope. Dashed lines connect the point (1,1) to the x-axis at 1 and the y-axis at 1. The grid lines are spaced at intervals of 0.5 units.



Correction de l'exercice 3. (6 points)

On étudie la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 2v_n + 6n - 7$ et $v_0 = 0$.

- 1. a) Démontrer, par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N} : v_n \leq -6n$.
b) En déduire la limite de la suite (v_n) .
- 2. a) Conjecturer une expression de v_n en fonction de n .

def v(n) :	0		0		1
v=0	1		-7		2
for i in range(n):	2		-15		4
v=2*v+6*i-7	3		-25		8
return v	4		-39		16
	5		-61		32
def w(n) :	6		-99		64
return 1-6*n-v(n)	7		-169		128
	8		-303		256
for n in range(10):	9		-565		512
print(n, " ", v(n), " ", w(n))					

- b) Démontrez votre conjecture.



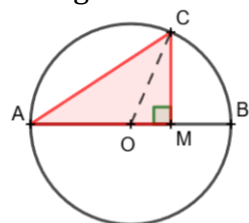
Exercice 3.	1a.	Initialisation : Je vérifie que la propriété est vraie au rang $n = 0$: $\left. \begin{array}{l} v_0 = 0 \\ -6 \times 0 = 0 \end{array} \right\} \text{donc } v_0 \leq -6 \times 0$ La propriété est vraie au rang 0. Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, je suppose la propriété vraie au rang n et je démontre qu'elle aussi vraie au rang $n + 1$. Je suppose que $v_n \leq -6n$ où $n \in \mathbb{N}$ fixé $v_n \leq -6n$ $2v_n \leq -12n$ $2v_n + 6n - 7 \leq -12n + 6n - 7$ $v_{n+1} \leq -6n - 7$ or $-6n - 7 - [-6(n + 1)] = -6n - 7 + 6n + 6 = -1 \leq 0$ donc $-6n - 7 \leq -6(n + 1)$ $v_{n+1} \leq -6(n + 1)$ La propriété est vraie au rang $n + 1$. Conclusion : J'en déduis, par le principe de récurrence, que la propriété est vraie pour tous les rangs $n \in \mathbb{N}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq -6n$
	1b.	$\lim_{n \rightarrow +\infty} -6n = -\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq -6n$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ par comparaison.
	2a.	J'observe que la 2^e fonction Python, définit la suite (w_n) par $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = 1 - 6n - v_n$ J'observe aussi, lorsque l'on affiche les termes que la suite (w_n) est géométrique de raison 2. Je conjecture alors que $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = 2^n$ et $v_n = 1 - 6n - 2^n$.
	2b.	Méthode n°1 : Je démontre par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 1 - 6n - 2^n$ Initialisation : Je vérifie que la propriété est vraie au rang $n = 0$: $1 - 6 \times 0 - 2^0 = 1 - 1 = 0 = v_0$ La propriété est vraie au rang 0. Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, je suppose la propriété vraie au rang n et je démontre qu'elle aussi vraie au rang $n + 1$. Je suppose que $v_n = 1 - 6n - 2^n$ où $n \in \mathbb{N}$ fixé $v_{n+1} = 2v_n + 6n - 7$ $v_{n+1} = 2(1 - 6n - 2^n) + 6n - 7$ $v_{n+1} = 2 - 12n - 2^{n+1} + 6n - 7$ $v_{n+1} = -5 - 6n - 2^{n+1}$ $v_{n+1} = 1 - 6n - 6 - 2^{n+1}$ $v_{n+1} = 1 - 6(n + 1) - 2^{n+1}$

Exercice 3.	2b.	La propriété est vraie au rang $n + 1$. Conclusion : J'en déduis, par le principe de récurrence, que la propriété est vraie pour tous les rangs $n \in \mathbb{N}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 1 - 6n - 2^n$
		Méthode n°2 : Je démontre que la suite (w_n) est géométrique $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = 1 - 6n - v_n$ Soit $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = 1 - 6(n+1) - v_{n+1}$ $w_{n+1} = 1 - 6n - 6 - (2v_n + 6n - 7)$ $w_{n+1} = -6n - 5 - 2v_n - 6n + 7$ $w_{n+1} = 2 - 12n - 2v_n$ $w_{n+1} = 2(1 - 6n - v_n)$ $w_{n+1} = 2w_n$ La suite (w_n) est donc géométrique de raison 2 et $w_0 = 1 - 0 - v_0 = 1$ J'en déduis que $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = 2^n = 1 - 6n - v_n$ donc, $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 1 - 6n - 2^n$



Correction de l'exercice 4. (4 points)

On considère un cercle de centre O , de diamètre $[AB]$ et de rayon 4 cm. Le point M est un point mobile sur le segment $[OB]$. On trace la perpendiculaire à (AB) qui passe par le point M , l'un des points d'intersection avec le cercle est le point C . Pour tout $x \in [0; 4]$, posons $OM = x$ et notons $f(x)$ l'aire du triangle AMC .



► 1. Démontrer que $f(x) = \frac{(4+x)\sqrt{16-x^2}}{2}, \forall x \in [0; 4]$.

► 2. Existe-t-il une position de M qui donne une aire maximale ? Si oui, combien vaut cette aire maximale ?



Exercice 4.	1.	Soit $x \in [0; 4]$, $OM = x$ donc $AM = 4 + x$ Le triangle AMC est rectangle en M son aire vaut donc $\frac{AM \times MC}{2}$. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle OMC rectangle en M : $OC^2 = OM^2 + MC^2$ $\Leftrightarrow 16 = x^2 + MC^2$ J'en déduis que : $f(x) = \frac{AM \times MC}{2} = \frac{(4+x)\sqrt{16-x^2}}{2}$

Exercice 4.

La fonction f est dérivable sur $[0; 4]$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{(4+x)\sqrt{16-x^2}}{2} = \frac{u \times v}{2}$$

$$u = 4+x \quad u' = 1$$

$$v = \sqrt{16-x^2} \quad v' = \frac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{16-x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{u'v + uv'}{2} = \frac{1 \times \sqrt{16-x^2} + (4+x) \times \frac{-x}{\sqrt{16-x^2}}}{2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{16-x^2} + \frac{-x(4+x)}{\sqrt{16-x^2}} \right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{16-x^2}^2}{\sqrt{16-x^2}} + \frac{-x(4+x)}{\sqrt{16-x^2}} \right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{16-x^2-x(4+x)}{\sqrt{16-x^2}} \right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{16-x^2-4x-x^2}{\sqrt{16-x^2}} \right)$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2-4x+16}{2\sqrt{16-x^2}}$$

2. $f'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x^2 - 4x + 16 > 0$ car $2\sqrt{16-x^2} > 0$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times (-2) \times 16 = 144 > 0$$

Le polynôme admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{4 - \sqrt{144}}{-4} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{4 + \sqrt{144}}{-4} = \underbrace{-4}_{\text{exclu}} < 0$$

De plus, la parabole est tournée vers le bas car $a = -2 < 0$

x	0	2	4
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	8	$6\sqrt{3}$	0

$$f(0) = \frac{(4+0)\sqrt{16-0^2}}{2} = 8$$

$$f(4) = \frac{(4+4)\sqrt{16-4^2}}{2} = 0$$

$$f(2) = \frac{(4+2)\sqrt{16-2^2}}{2} = \frac{6\sqrt{12}}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

L'aire du triangle AMC est maximale lorsque M est au milieu du segment $[OB]$ et elle vaut $6\sqrt{3} \text{ cm}^2$.