Vendredi 29 novembre 2024

Terminale ➡ Contrôle n° 3

Spécialité Mathématiques

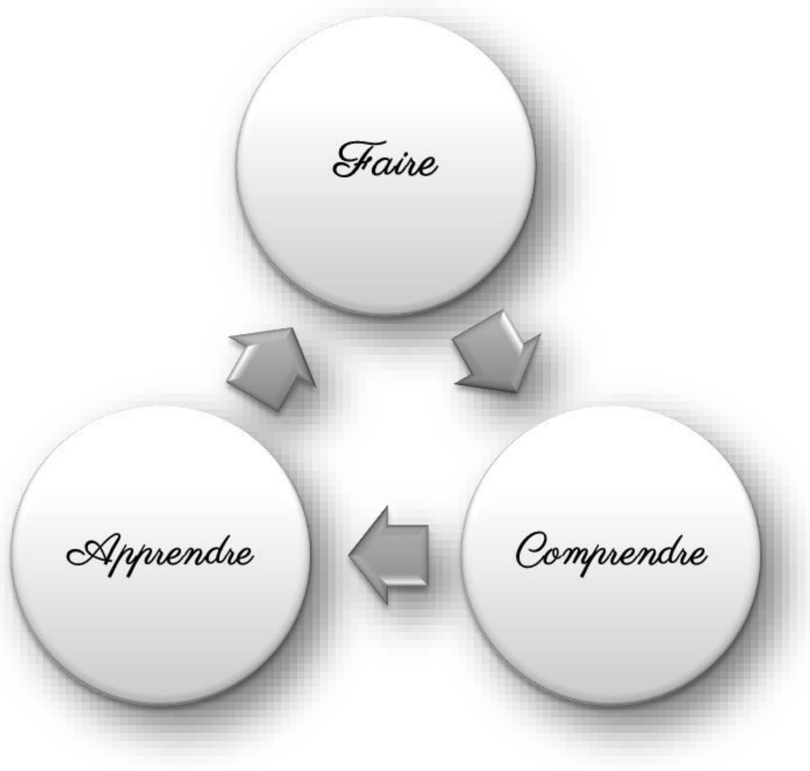


Table des matières

Terminale ➡ Contrôle n° 3

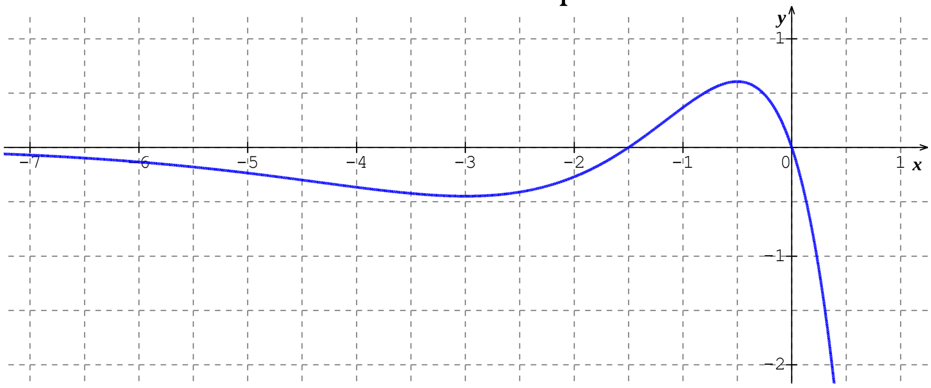
Spécialité Mathématiques - Calculatrice autorisée

Enoncé du sujet

Exercice 1. (11 points)

Partie A :

Le plan est muni d'un repère orthogonal. On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f'.



Dans cette partie, les résultats seront obtenus par lecture graphique.

Aucune justification n'est demandée.

1. Donner le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble être convexe.

Partie B :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-2x^2 + x - 1)e^x$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. a) Etudier la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b) Etudier la limite de la fonction f en $-\infty$.
   c) En déduire une interprétation graphique.
2. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de f.
3. a) Démontrer que, $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = (-2x^2 - 7x - 3)e^x$.
   b) La courbe $\mathcal{C}$ admet-elle un ou des point.s d'inflexion ? Si oui, on donnera leur.s coordonnée.s.

Exercice 2. (9 points)

On étudie la fonction $f(x) = \dfrac{3 - x^2}{x + 2}$ définie sur $]-2; +\infty[$.

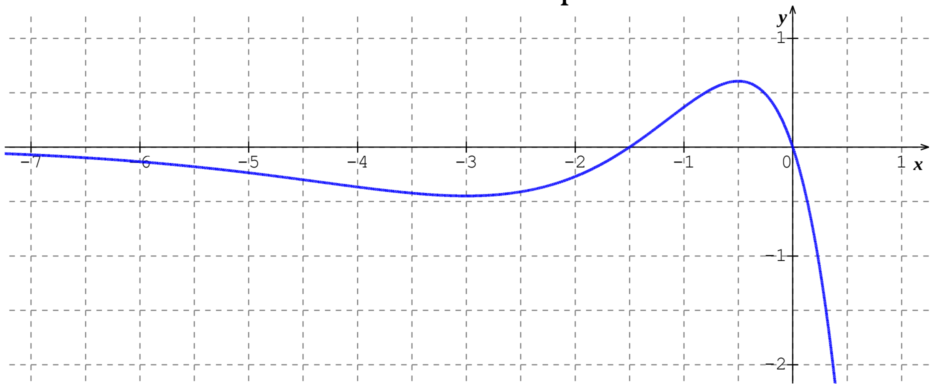
1. Etudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de f.
3. Déterminer l'équation de la tangente en 0.
4. a) Démontrer que, $\forall x \in]-2; +\infty[, f''(x) = \frac{-2}{(x+2)^3}$.
   b) En déduire que, $\forall x \in]-2; +\infty[,\ \frac{4x^2-12}{x+2} \geq 3x - 6$.
5. Soit $k \in \mathbb{R}^{+*}$, en étudiant la convexité de la fonction $h(x) = \sqrt{kx}$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, et la tangente en k, démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \sqrt{kx} \leq \frac{x+k}{2}$.

Terminale → Contrôle n° 3
Spécialité Mathématiques

Correction du sujet

Correction de l'exercice 1. (11 points)

Partie A :
Le plan est muni d'un repère orthogonal. On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f'.



Dans cette partie, les résultats seront obtenus par lecture graphique.
Aucune justification n'est demandée.

1. Donner le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble être convexe.

Partie B :
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-2x^2 + x - 1)e^x$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. a) Etudier la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b) Etudier la limite de la fonction f en $-\infty$.
   c) En déduire une interprétation graphique.
2. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de f.
3. a) Démontrer que, $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = (-2x^2 - 7x - 3)e^x$.
   b) La courbe $\mathcal{C}$ admet-elle un ou des point.s d'inflexion ? Si oui, on donnera leur.s coordonnée.s.

Exercice 1. — **A** 1

Pour déterminer **le sens de variation de la fonction f**, je dresse **le tableau de signe de la fonction dérivée f'** :

x	$-\infty$		$\frac{-3}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

J'en déduis les variations de la fonction f :

x	$-\infty$		$\frac{-3}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Exercice 1.

A $\boxed{2}$

Pour déterminer **la convexité de la fonction f**, je dresse **le tableau de variations de la fonction dérivée f'** :

x	$-\infty$		-3		$\frac{-1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		↘		↗		↘	

J'en déduis la convexité de la fonction f :

x	$-\infty$		-3		$\frac{-1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		↘		↗		↘	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$concave$		$convexe$		$concave$	

B $\boxed{1}$

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = (-2x^2 + x - 1)e^x$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} -2x^2 = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty \end{array}\right\} FI \text{ par somme}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\quad f(x) = x^2\left(-2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)e^x$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} -2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = -2 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \end{array}\right\} \text{par produit, } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = (-2x^2 + x - 1)e^x$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} -2x^2 + x - 1 = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \end{array}\right\} FI \text{ par produit}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = -2x^2e^x + xe^x - e^x$$

or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$,

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} -2x^2e^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} -e^x = 0 \end{array}\right\} \text{par somme, } \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

J'en déduis que la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$.

Exercice 1.

B $\boxed{2}$

$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \underbrace{(-2x^2 + x - 1)}_{u}\,\underbrace{e^x}_{v}$

$u = -2x^2 + x - 1 \qquad u' = -4x + 1$

$v = e^x \qquad v' = e^x$

$\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = u'v + uv' = \underbrace{(-4x+1)}_{u'}\,\underbrace{e^x}_{v} + \underbrace{(-2x^2 + x - 1)}_{u}\,\underbrace{e^x}_{v'}$

$f'(x) = (-4x + 1 - 2x^2 + x - 1)e^x$

$f'(x) = (-2x^2 - 3x)e^x$

$f'(x) = x(-2x - 3)e^x$

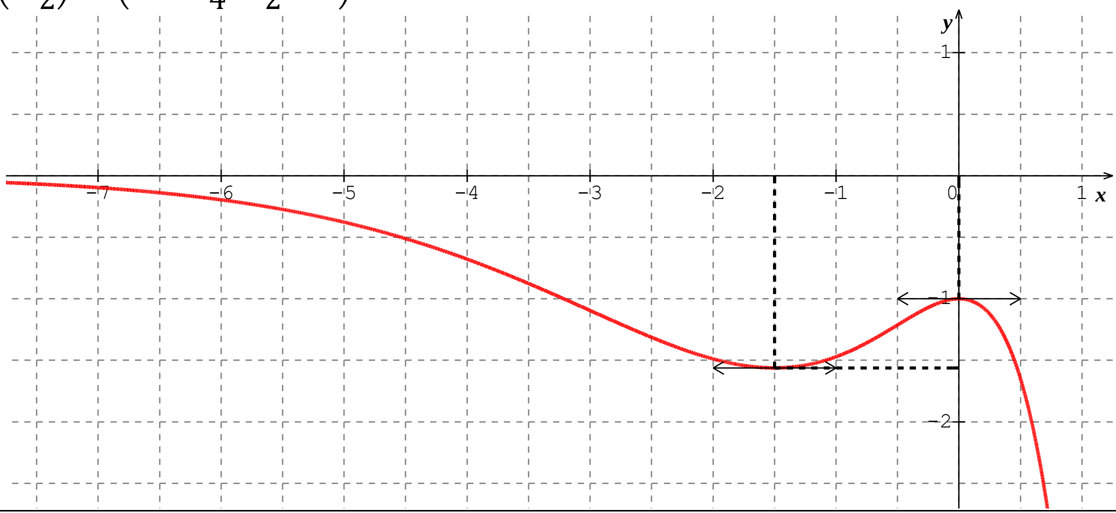
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x(-2x-3) > 0 \quad \text{car } e^x > 0$$

Le polynôme $-2x^2 - 3x = x(-2x - 3)$ a pour racines 0 et $-\frac{3}{2}$ et il est tourné vers le bas car $a = -2 < 0$, donc

x	$-\infty$		$\frac{-3}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-7e^{-3/2}$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

$f(0) = (-1)e^0 = -1$

$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-2 \times \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1\right)e^{-3/2} = -7e^{-\frac{3}{2}} \approx -1{,}56$



B $\boxed{3}$

$\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = (-2x^2 - 3x)e^x$

$f''(x) = (-4x - 3)e^x + (-2x^2 - 3x)e^x$

$f''(x) = (-4x - 3 - 2x^2 - 3x)e^x$

$f''(x) = (-2x^2 - 7x - 3)e^x$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow -2x^2 - 7x - 3 > 0 \quad \text{car } e^x > 0$$
$$\Delta = 49 - 4 \times 6 = 25 > 0$$

Le polynôme admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{7-5}{-4} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{7+5}{-4} = -3$$

De plus, il est tourné vers le bas puisque $a = -2 < 0$, donc :

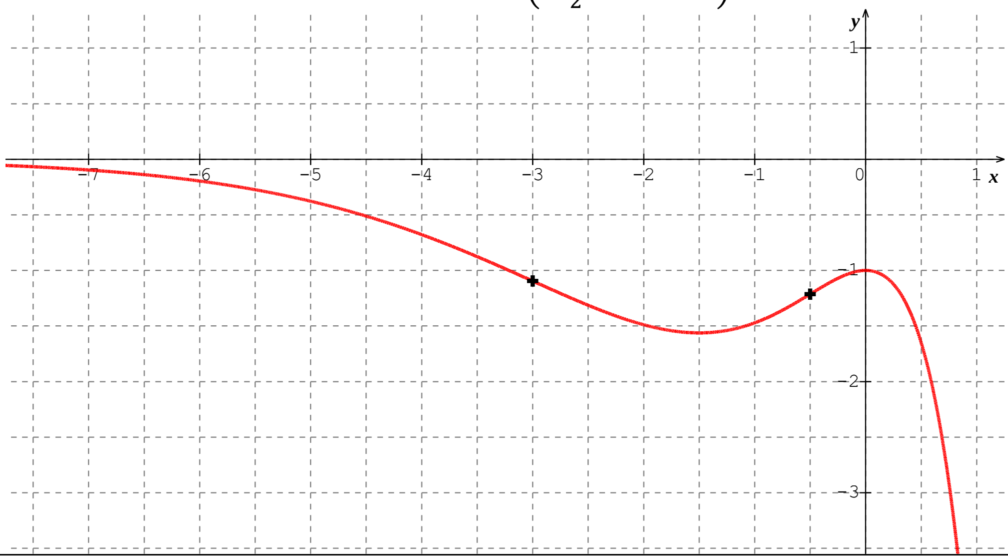
x	$-\infty$	-3		$\frac{-1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$concave$		$convexe$		$concave$

$f(-3) = (-2 \times 9 - 3 - 1)e^{-3} = -22e^{-3} \approx -1{,}1$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-2 \times \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1\right)e^{-1/2} = -2e^{-1/2} \approx -1{,}21$

La courbe de f admet alors deux points d'inflexion, de coordonnées :

$$(-3; -22e^{-3}) \text{ et } \left(-\tfrac{1}{2}; -2e^{-1/2}\right)$$



Correction de l'exercice 2. (9 points)

On étudie la fonction $f(x) = \dfrac{3 - x^2}{x + 2}$ définie sur $]-2; +\infty[$.

1 Etudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

2 Dresser, en justifiant, le tableau de variations de f.

3 Déterminer l'équation de la tangente en 0.

4 a) Démontrer que, $\forall x \in]-2; +\infty[, f''(x) = \frac{-2}{(x+2)^3}$.

b) En déduire que, $\forall x \in]-2; +\infty[$, $\frac{4x^2-12}{x+2} \geq 3x - 6$.

5 Soit $k \in \mathbb{R}^{+*}$, en étudiant la convexité de la fonction $h(x) = \sqrt{kx}$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, et la tangente en k, démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \sqrt{kx} \leq \frac{x+k}{2}$.

Exercice 2.

1

$\forall x \in]-2;+\infty[,\quad f(x) = \dfrac{3-x^2}{x+2}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^+} 3-x^2 = -1\\ \lim\limits_{x\to -2^+} x+2 = 0^+\end{array}\right\}$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} 3-x^2 = -\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty} x+2 = +\infty\end{array}\right\}$ FI par quotient

$\forall x \in]-2;+\infty[, x \neq 0\ \ f(x) = \dfrac{x\left(\frac{3}{x}-x\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \dfrac{\frac{3}{x}-x}{1+\frac{2}{x}}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3}{x}-x = -\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty} 1+\frac{2}{x} = 1\end{array}\right\}$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

2

La fonction f est dérivable sur $]-2;+\infty[$.

$\forall x \in]-2;+\infty[,\quad f(x) = \dfrac{3-x^2}{x+2} = \dfrac{u}{v}$

$u = 3-x^2 \quad u' = -2x$

$v = x+2 \quad v' = 1$

$f'(x) = \dfrac{u'v-uv'}{v^2} = \dfrac{-2x(x+2)-(3-x^2)\times 1}{(x+2)^2}$

$f'(x) = \dfrac{-x^2-4x-3}{(x+2)^2}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -x^2-4x-3 > 0$ car $(x+2)^2 > 0$

$\Delta = 16 - 4\times 3 = 4 > 0$

Le polynôme admet donc deux racines :

$x_1 = \dfrac{4-2}{-2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{4+2}{-2} = -3 \notin]-2;+\infty[$

De plus, il est tourné vers le bas puisque $a = -1 < 0$, donc :

x	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	2	$\searrow -\infty$

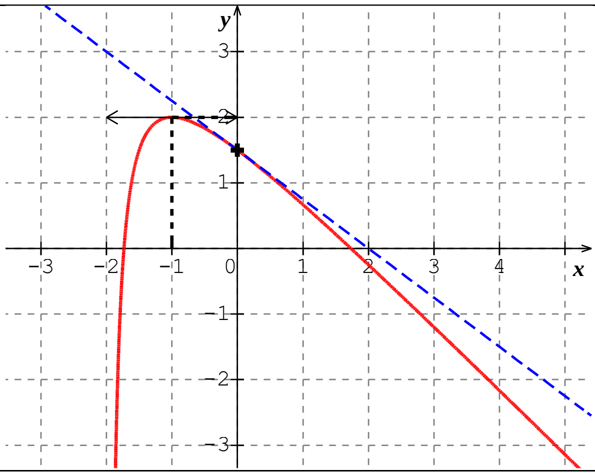
$f(-1) = \dfrac{3-1}{-1+2} = 2$

3

$f(0) = \dfrac{3}{2} \qquad f'(0) = \dfrac{-3}{2^2} = -\dfrac{3}{4}$

L'équation de la tangente en 0 est donc :

$y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$



Exercice 2.

$\boxed{4}$

La fonction f' est dérivable sur $]-2;+\infty[$.

$$\forall x \in\,]-2;+\infty[,\quad f'(x) = \frac{-x^2-4x-3}{(x+2)^2} = \frac{u}{v}$$

$$u = -x^2-4x-3 \qquad u' = -2x-4$$
$$v = (x+2)^2 \qquad v' = 2(x+2)$$

$$f''(x) = \frac{(-2x-4)(x+2)^2 - (-x^2-4x-3)\times 2(x+2)}{(x+2)^4}$$
$$f''(x) = \frac{(x+2)[(-2x-4)(x+2) - (-2x^2-8x-6)]}{(x+2)^4}$$
$$f''(x) = \frac{-2x^2-4x-4x-8+2x^2+8x+6}{(x+2)^3}$$
$$f''(x) = \frac{-2}{(x+2)^3}$$

$$\forall x \in\,]-2;+\infty[,\qquad f''(x) = \frac{-2}{(x+2)^3} < 0 \text{ car } x+2>0$$

La fonction f est donc concave sur $]-2;+\infty[$.
Par conséquent, $\forall x \in\,]-2;+\infty[$,

$$\begin{aligned} f(x) &\le -\frac{3}{4}x+\frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{3-x^2}{x+2} &\le \frac{-3x+6}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{(3-x^2)\times(-4)}{x+2} &\ge \frac{-3x+6}{4}\times(-4) \\ \Leftrightarrow \frac{-12+4x^2}{x+2} &\ge 3x-6 \end{aligned}$$

$\boxed{5}$

Soit $k \in \mathbb{R}^{+*}$, $\forall x \in\,]0;+\infty[$, $h(x) = \sqrt{kx}$

La fonction h est dérivable sur $]0;+\infty[$

$$\forall x \in\,]0;+\infty[,\qquad h'(x) = \frac{k}{2\sqrt{kx}}$$

La fonction h' est dérivable sur $]0;+\infty[$

$$\forall x \in\,]0;+\infty[,\qquad h''(x) = \frac{-k\times 2\dfrac{k}{2\sqrt{kx}}}{\left(2\sqrt{kx}\right)^2} = \frac{-k^2}{4kx\sqrt{kx}} = \frac{-k}{4x\sqrt{kx}} < 0$$

La fonction h est donc concave sur $]0;+\infty[$

$h(k) = \sqrt{k^2} = k$ car $k>0$

$h'(k) = \dfrac{k}{2\sqrt{k^2}} = \dfrac{k}{2k} = \dfrac{1}{2}$ car $k>0$

La tangente en k est donc : $y = \frac{1}{2}(x-k)+k = \frac{1}{2}x - \frac{k}{2} + k = \frac{1}{2}x + \frac{k}{2}$

J'en déduis que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $h(x) \le \frac{x}{2}+\frac{k}{2}$

$$\text{et donc } \sqrt{kx} \le \frac{x+k}{2}$$