Mardi 17 décembre 2024

Terminale ➡ Contrôle n° 4

Spécialité Mathématiques

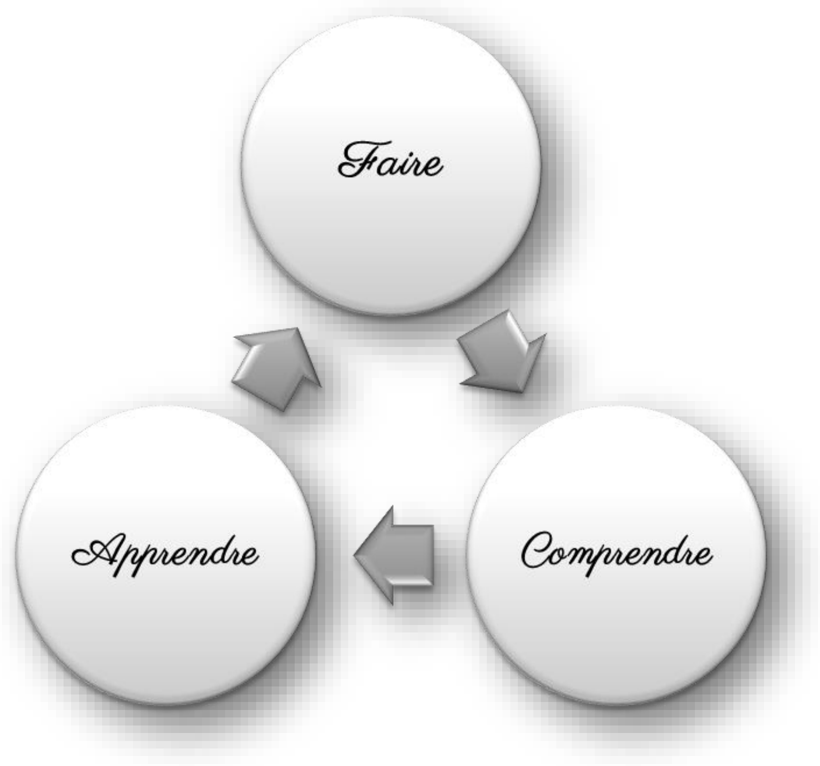


Table des matières

Terminale ➡ Contrôle n° 4

Spécialité Mathématiques - Calculatrice autorisée

Enoncé du sujet

Exercice 1. (12 points)

Partie A : Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x + x + 1$.

1. Etudier les limites de la fonction g en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Etudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ n'admet qu'une et une seule solution notée α.
4. Donner un encadrement de α à 10^{-2}.
5. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x + 1}$.

On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1. Etudier la limite de la fonction f en $-\infty$. Que peut-on en déduire ?
2. Etudier la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. a) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = \frac{g(x)e^x}{(e^x + 1)^2}$$
b) En déduire le tableau de variations de la fonction f.
4. Démontrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2}.
5. a) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*$,
$$f(x) - x = \frac{-1}{\dfrac{e^x}{x} + \dfrac{1}{x}}$$
b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x)$.
Pour information : On dit que la droite $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

Exercice 2. (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\left]-\dfrac{3}{2}; +\infty\right[$ par : $f(x) = \dfrac{2x^2 + 8}{2x + 3}$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. En déduire les asymptotes éventuelles.
2. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f.
3. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$
a) Démontrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$
b) La suite (u_n) est-elle convergente ? *On justifiera sa réponse*.
c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 3. (2 points)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\, e^{nx}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, étudier la convexité de la fonction f.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle u_n l'ordonnée du point d'inflexion de la courbe de la fonction $f(x) = x\, e^{nx}$. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Terminale ➡ Contrôle n° 4

Spécialité Mathématiques

Correction du sujet

Correction de l'exercice 1. (12 points)

Partie A : Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x + x + 1$.

1. Etudier les limites de la fonction g en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Etudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ n'admet qu'une et une seule solution notée α.
4. Donner un encadrement de α à 10^{-2}.
5. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1. PARTIE A

A 1

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty\end{array}\right\}\text{donc, par somme, } \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x+1 = -\infty\end{array}\right\}\text{donc, par somme, } \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$$

A 2

g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^x + 1 > 0$ car $e^x > 0$

La fonction g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

A 3

❶ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty < 0$

❷ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty > 0$

❸ g est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue sur $\mathbb{R}$

❹ g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$

D'après le théorème de valeurs intermédiaires, j'en déduis que l'équation $g(x) = 0$ admet une et une seule solution que l'on note α.

A 4

x	f(x)
-5	-3.993262053
-4	-2.981684361
-3	-1.950212932
-2	-0.8646647168
-1	0.3678794412
0	2
1	4.718281828

x	f(x)
-1.8	-0.6347011118
-1.7	-0.5173164759
-1.6	-0.398103482
-1.5	-0.2768698399
-1.4	-0.1534030361
-1.3	-0.02746820697
-1.2	0.1011942119
-1.1	0.2328710837

x	f(x)
-1.3	-0.02746820697
-1.29	-0.01472921691
-1.28	-0.001962699547
-1.27	0.01083162178
-1.26	0.0236540265
-1.25	0.03650479686
-1.24	0.04938421794

$$-1{,}28 < \alpha < -1{,}27$$

A 5

On a établi que :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g'(x)$			$+$		
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x + 1}$.

On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. Etudier la limite de la fonction f en $-\infty$. Que peut-on en déduire ?
2. Etudier la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. a) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = \frac{g(x)e^x}{(e^x+1)^2}$$
b) En déduire le tableau de variations de la fonction f.
4. Démontrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2}.
5. a) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*$,
$$f(x) - x = \frac{-1}{\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}}$$
b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x)$.

Pour information : On dit que la droite $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

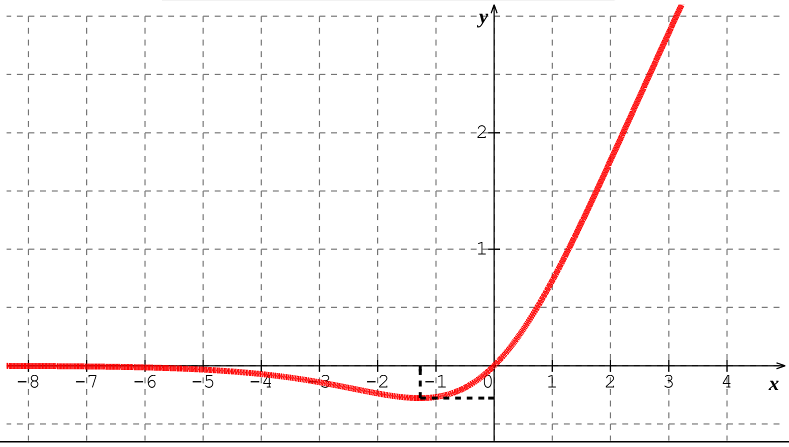
<table>
<tr>
<td rowspan="4">Exercice 1. PARTIE B</td>
<td>B 1</td>
<td>Par croissance comparée : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$
$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x + 1 = 1\end{array}\right\}$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
J'en déduis que la droite $y = 0$ est asymptote horizontale en $-\infty$.</td>
</tr>
<tr>
<td>B 2</td>
<td>$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x + 1 = +\infty\end{array}\right\}$ FI par quotient
$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x+1} = \dfrac{xe^x \times e^{-x}}{(e^x+1)\times e^{-x}}$
$f(x) = \dfrac{xe^0}{e^0 + 1 \times e^{-x}} = \dfrac{x}{1+e^{-x}}$
$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + e^{-x} = 1\end{array}\right\}$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">B 3</td>
<td>$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x+1} = \dfrac{u}{v}$
$u = xe^x \qquad u' = 1 \times e^x + xe^x = (1+x)e^x$
$v = e^x + 1 \qquad v' = e^x$
$f'(x) = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
$f'(x) = \dfrac{(1+x)e^x \times (e^x+1) - xe^x \times e^x}{(e^x+1)^2}$
$f'(x) = \dfrac{(e^x + xe^x)(e^x+1) - xe^{2x}}{(e^x+1)^2}$
$f'(x) = \dfrac{e^{2x} + e^x + xe^{2x} + xe^x - xe^{2x}}{(e^x+1)^2}$
$f'(x) = \dfrac{e^{2x} + e^x + xe^x}{(e^x+1)^2}$
$f'(x) = \dfrac{e^x(e^x + 1 + x)}{(e^x+1)^2}$
$f'(x) = \dfrac{g(x)e^x}{(e^x+1)^2}$</td>
</tr>
<tr>
<td>$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \quad \dfrac{g(x)e^x}{(e^x+1)^2} \quad > \quad 0$</td>
</tr>
</table>

B $\boxed{3}$

$$\Leftrightarrow \quad g(x) > 0 \text{ car } \frac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x > \alpha$$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$



B $\boxed{4}$

Je sais que :

$$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow e^\alpha + \alpha + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow e^\alpha = -\alpha - 1$$

J'en déduis que :

$$f(\alpha) = \frac{\alpha e^\alpha}{e^\alpha + 1}$$
$$f(\alpha) = \frac{\alpha(-\alpha - 1)}{-\alpha - 1 + 1}$$
$$f(\alpha) = \frac{\alpha(-\alpha - 1)}{-\alpha}$$
$$f(\alpha) = \frac{-\alpha - 1}{-1}$$
$$f(\alpha) = \alpha + 1$$

B $\boxed{4}$

$$-1{,}28 < \alpha < -1{,}27$$
$$\Leftrightarrow -0{,}28 < \alpha + 1 < -0{,}27$$
$$\Leftrightarrow -0{,}28 < f(\alpha) < -0{,}27$$

B $\boxed{5}$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) - x = \frac{xe^x}{e^x+1} - x$$
$$= \frac{xe^x}{e^x+1} - \frac{x(e^x+1)}{e^x+1}$$
$$= \frac{xe^x - x(e^x+1)}{e^x+1}$$
$$= \frac{xe^x - xe^x - x}{e^x+1}$$
$$= \frac{-x}{e^x+1}$$
$$= \frac{-x \div x}{(e^x+1) \div x}$$
$$f(x) - x = \frac{-1}{\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}}$$

Par croissance comparée : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

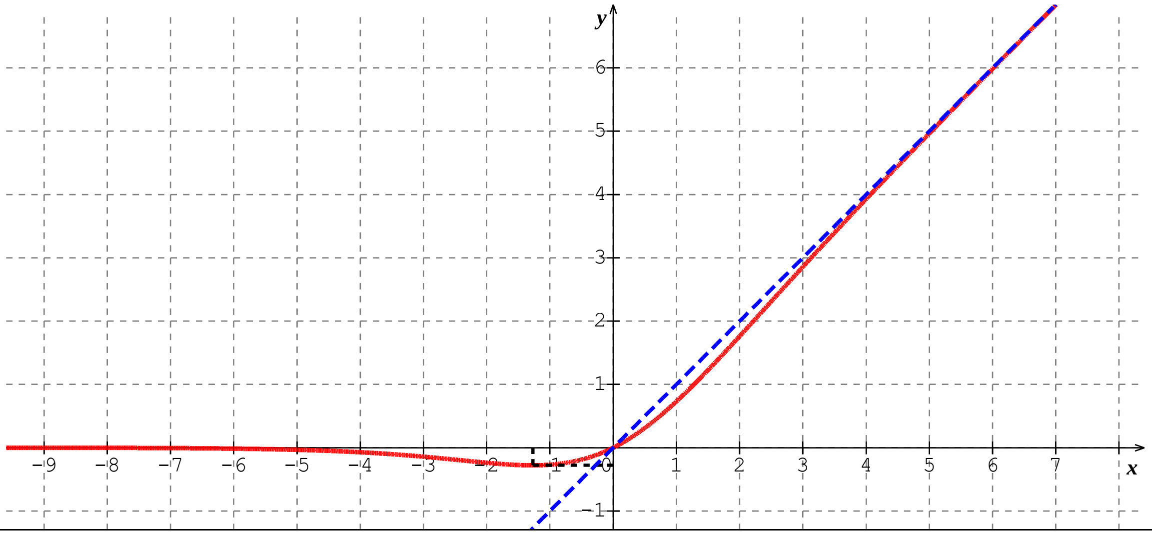
$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \end{array}\right\} \text{donc, par somme, } \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} + \frac{1}{x} = +\infty$$

Par quotient, j'en déduis alors que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\dfrac{e^x}{x} + \dfrac{1}{x}} = 0$$

Et donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = 0$

Pour information : On dit que la droite $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.



Correction de l'exercice 2. (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{3}{2}; +\infty\right[$ par : $f(x) = \dfrac{2x^2+8}{2x+3}$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. En déduire les asymptotes éventuelles.
2. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f.
3. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

   a) Démontrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$

   b) La suite (u_n) est-elle convergente ? *On justifiera sa réponse.*

   c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 2.

1

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to -3/2^+} 2x^2+8 = 12{,}5\\ \lim\limits_{x\to -3/2^+} 2x+3 = 0^+\end{array}\right\}\text{donc, par quotient, } \lim\limits_{x\to -3/2^+} 2x+3 = +\infty$$

J'en déduis que la droite $x = -\frac{3}{2}$ est asymptote verticale.

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to +\infty} 2x^2+8 = +\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty} 2x+3 = +\infty\end{array}\right\}\text{FI par quotient}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\quad f(x) = \frac{2x^2+8}{2x+3} = \frac{x^2\left(2+\frac{8}{x^2}\right)}{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}$$

$$f(x) = \frac{x\left(2+\frac{8}{x^2}\right)}{2+\frac{3}{x}} = \frac{2x+\frac{8}{x}}{2+\frac{3}{x}}$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to +\infty} 2x+\frac{8}{x} = +\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty} 2+\frac{3}{x} = 2\end{array}\right\}\text{donc, par quotient, } \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

2

f est dérivable sur $\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[$.

$$\forall x \in \left]-\frac{3}{2};+\infty\right[, f(x) = \frac{2x^2+8}{2x+3} = \frac{u}{v}$$

$$u = 2x^2+8 \quad u' = 4x$$
$$v = 2x+3 \quad v' = 2$$

$$f'(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x(2x+3)-2(2x^2+8)}{(2x+3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{8x^2+12x-4x^2-16}{(2x+3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x^2+12x-16}{(2x+3)^2}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2+12x-16}{(2x+3)^2} > 0$$
$$\Leftrightarrow 4x^2+12x-16 > 0 \quad \text{car } (2x+3)^2 > 0$$
$$\Delta = 12^2 - 4\times 4\times(-16) = 400 > 0$$

Il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-12-\sqrt{400}}{8} = -4 \notin \left]-\frac{3}{2};+\infty\right[\quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-12+\sqrt{400}}{8} = 1 \in \left]-\frac{3}{2};+\infty\right[$$

De plus, $a = 4 > 0$, j'en déduis que la parabole est tournée vers le haut, donc :

x	$\frac{-3}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(1) = \frac{2+8}{2+3} = \frac{10}{5} = 2$$

3

Soit $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$
Démontrons que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Initialisation : **Je vérifie que la propriété est vraie au rang $n = 0$:**
$u_0 = 4$

$$u_1 = f(u_0) = f(4) = \frac{2 \times 4^2 + 8}{2 \times 4 + 3} = \frac{40}{11} \approx 3{,}6$$

donc, $1 \leq u_1 \leq u_0 \leq 4$
La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : **Soit $n \in \mathbb{N}$, je suppose la propriété vraie au rang n et je démontre qu'elle aussi vraie au rang $n + 1$.**
Je suppose que $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$ où $n \in \mathbb{N}$ fixé

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ et } u_{n+2} = f(u_{n+1})$$

de plus, la fonction f est croissante sur $[1; +\infty[$ et donc sur $[1; 4]$
J'en déduis que $f(1) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(4)$

$$\Longrightarrow \frac{2 \times 1^2 + 8}{2 \times 1 + 3} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq \frac{40}{11}$$

$$\Longrightarrow 2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq \frac{40}{11}$$

$$\Longrightarrow 1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 4$$

La propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : **J'en déduis, par le principe de récurrence, que la propriété est vraie pour tous les rangs $n \in \mathbb{N}$** donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n$ donc la suite (u_n) est minorée par 1.
J'en déduis que la suite (u_n) est convergente.

La fonction f étant continue sur $\left]-\frac{3}{2}\,; +\infty\right[$, la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation $f(x) = x$

Soit $x \in \left]-\dfrac{3}{2}\,; +\infty\right[$, tel que $\dfrac{2x^2 + 8}{2x + 3} = x$

$$\Longleftrightarrow 2x^2 + 8 = x(2x + 3)$$

$$\Longleftrightarrow 2x^2 + 8 = 2x^2 + 3x$$

$$\Longleftrightarrow 8 = 3x$$

$$\Longleftrightarrow x = \frac{8}{3}$$

J'en déduis que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{8}{3}$

```
from math import *
def f(x):
    return (2*x**2+8)/(2*x+3)
u=4
for i in range(21):
    print(u)
    u=f(u)
```

```
4
3.6363636363636362
3.353177795655671
3.140993792340296
2.987688116800561
2.8803873947655054
2.8072018375859398
2.7582599109412724
2.7259955895317463
2.7049370289127843
2.6912850900194165
2.682474514208895
2.676805197819091
2.673164186086828
2.670828721030664
2.6693318766470724
2.668373014390747
2.667758980671288
2.6673658506907563
2.6671141866723542
2.6669530967721355
```

Correction de l'exercice 3. (2 points)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\,e^{nx}$.

1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, étudier la convexité de la fonction f.

2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle u_n l'ordonnée du point d'inflexion de la courbe de la fonction $f(x) = x\,e^{nx}$. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 3.

1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f'(x) = 1 \times\ e^{nx} + x\,e^{nx} \times n$

$f'(x) = (1 + nx\,)e^{nx}$

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f''(x) = n \times e^{nx} + (1 + nx\,)e^{nx} \times n$

$f''(x) = [n + n(1 + nx\,)]e^{nx}$

$f''(x) = (n + n + n^2x)e^{nx}$

$f''(x) = (2n + n^2x)e^{nx}$

$f''(x) = ne^{nx}(2 + nx)$

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 \iff & \quad ne^{nx}(2+nx) > 0 \\ \iff & \quad 2 + nx > 0 \quad \text{car } ne^{nx} > 0 \\ \iff & \quad nx > -2 \\ \iff & \quad x > -\frac{2}{n} \quad \text{car } n > 0 \end{aligned}$$

J'en déduis la convexité de la courbe de f :

x	$-\infty$	$\frac{-2}{n}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$concave$		$convexe$

2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la courbe de f admet un point d'inflexion d'abscisse $-\frac{2}{n}$.

J'en déduis que

$u_n = f\left(-\frac{2}{n}\right) = -\frac{2}{n} \times\ e^{n \times -\frac{2}{n}}$

$u_n = \frac{-2e^{-2}}{n} = \frac{-2}{ne^2}$

J'en déduis que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{-2}{ne^2} = 0$