Mardi 5 mars 2024
Terminale ➡ Contrôle n° 6
Spécialité Mathématiques

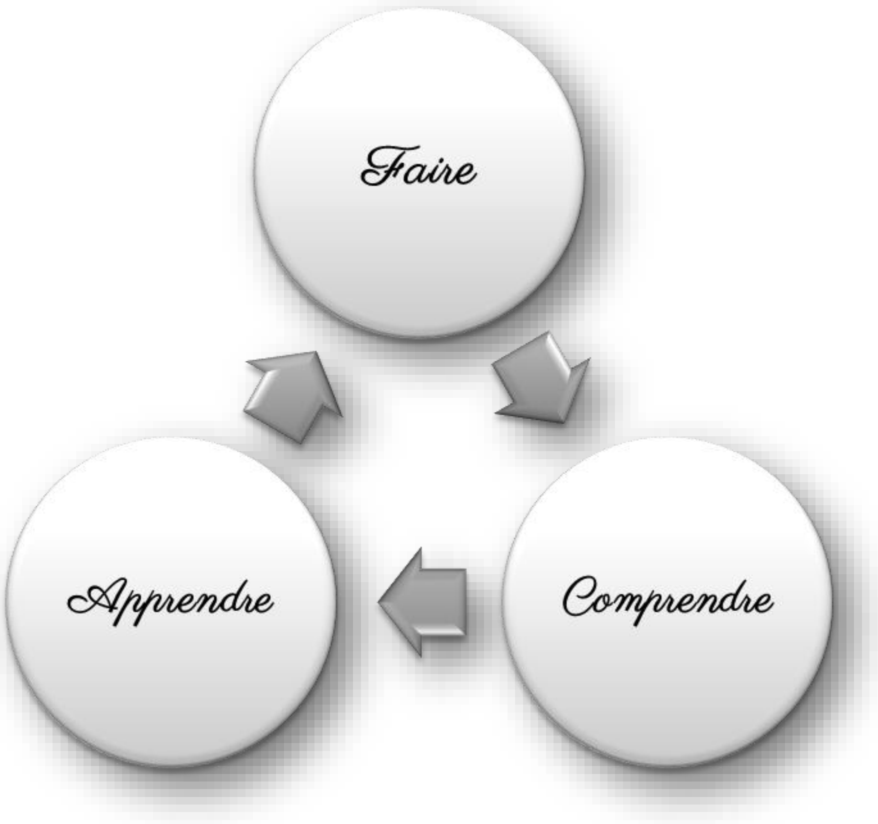


Table des matières

Terminale → Contrôle n° 6

Spécialité Mathématiques

Enoncé du sujet A

Exercice 1. (7 points)

▶ 1. $\forall x \in]0;+\infty[$, écrire en fonction de $\ln(x)$ les expressions : $A = \ln\left(x^5\sqrt{e}\right)$ $\quad B = \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}^7}\right)$

▶ 2. Résoudre l'inéquation $2\ln(x) \leq \ln(5-x) + \ln(x+12)$.

▶ 3. Résoudre l'équation $\ln(x+2) = -1$.

▶ 4. Dans un organisme mort, on sait que le carbone 14 diminue de 0,12 % chaque dizaine d'années. Combien d'années seront nécessaires pour que le carbone 14 ait diminué de moitié ?

Exercice 2. (6 points)

Cet exercice est un QCM, chaque question n'a qu'une seule bonne réponse.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k}\right)$, on considère les droites :

- (d) passant par les points $A(1;1;-2)$ et $B(-1;3;2)$
- (d') de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -4+3t \\ y = 6-3t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 8-6t \end{cases}$

▶ 1. Lequel des points ci-dessous appartient à la droite (d') ?

$\boldsymbol{a)\ M_1(-1;3;-2)}$	$\boldsymbol{b)\ M_2(-7;9;2)}$	$\boldsymbol{c)\ M_3(-6;8;12)}$	$\boldsymbol{d)\ M_4(-3;5;10)}$

▶ 2. Lequel des points ci-dessous est aligné avec A et B ?

$\boldsymbol{a)\ N_1(-7;9;15)}$	$\boldsymbol{b)\ N_2(4;-2;-8)}$	$\boldsymbol{c)\ N_3(13;-11;12)}$	$\boldsymbol{d)\ N_4(0;2;1)}$

▶ 3. Laquelle est une représentation paramétrique de la droite (d) ?

$\boldsymbol{a)} \begin{cases} x = 1-t \\ y = 1+3t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -2+2t \end{cases}$	$\boldsymbol{b)} \begin{cases} x = -1+2t \\ y = 3+2t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 2+4t \end{cases}$	$\boldsymbol{c)} \begin{cases} x = -5-2t \\ y = 7+2t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 8+4t \end{cases}$	$\boldsymbol{d)} \begin{cases} x = t \\ y = 2-t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -2t \end{cases}$

▶ 4. Lequel est un vecteur directeur de la droite (d') ?

$\boldsymbol{a)\ \overrightarrow{u_1}} \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$	$\boldsymbol{b)\ \overrightarrow{u_2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\boldsymbol{c)\ \overrightarrow{u_3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\boldsymbol{d)\ \overrightarrow{u_4}} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

▶ 5. Laquelle de ces droites est parallèle à la droite (d) ?

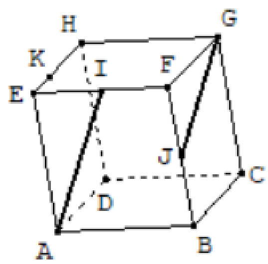
$\boldsymbol{a)} \begin{cases} x = -1+t \\ y = 3+t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 2-2t \end{cases}$	$\boldsymbol{b)} \begin{cases} x = -4t \\ y = 6t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 8t \end{cases}$	$\boldsymbol{c)} \begin{cases} x = 2-2t \\ y = 2 \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -4+4t \end{cases}$	$\boldsymbol{d)} \begin{cases} x = 5t \\ y = -5t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -10t \end{cases}$

▶ 6. Quelle est la position relative des droites (d) et (d') ?

***a)* sécantes**	***b)* strictement parallèles**	***c)* non coplanaires**	***d)* confondues**

Exercice 3. (7 points)

Sur la figure ci-contre, $ABCDEFGH$ est un cube de côté 1. Le point I est le milieu de $[EF]$, le point J celui de $[BF]$ et le point K vérifie $\overrightarrow{EK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$



▶ 1. Les droites (AI) et (GJ) sont-elles parallèles ?

▶ 2. On considère le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$.

a. Le point D appartient-il au plan (IJK) ? Justifier votre réponse.

b. Déterminer une équation paramétrique de la droite (d) parallèle à (IK) passant par D.

c. Les droites (d) et (BC) sont-elles sécantes ? Si oui, déterminer les coordonnées du point d'intersection.

▶ 3. On considère la sphère S de centre A et de rayon 1. La droite (ID) est-elle tangente à la sphère S ?

Terminale → Contrôle n° 6

Spécialité Mathématiques

Enoncé du sujet B

Exercice 1. (7 points)

▶1. $\forall x \in]0;+\infty[$, écrire en fonction de $\ln(x)$ les expressions : $A = \ln\left(\sqrt{e}\ \ x^6\right)$ $\quad B = \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^5}}\right)$

▶2. Résoudre l'inéquation $2\ln(x) \leq \ln(10-x) + \ln(x+3)$.

▶3. Résoudre l'équation $\ln(x+1) = -1$.

▶4. Dans un organisme mort, on sait que le carbone 14 diminue de 1,2 % chaque centaine d'années. Combien d'années seront nécessaires pour que le carbone 14 ait diminué de moitié ?

Exercice 2. (6 points)

Cet exercice est un QCM, chaque question n'a qu'une seule bonne réponse.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère les droites :

- (d) passant par les points $A(1;1;-2)$ et $B(-1;3;2)$
- (d') de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -4+3t \\ y = 6-3t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 8-6t \end{cases}$

▶1. Lequel des points ci-dessous appartient à la droite (d') ?

$\boldsymbol{a)\ M_1(-3;5;10)}$	$\boldsymbol{b)\ M_2(-6;8;12)}$	$\boldsymbol{c)\ M_3(-7;9;2)}$	$\boldsymbol{d)\ M_4(-1;3;-2)}$

▶2. Lequel des points ci-dessous est aligné avec A et B ?

$\boldsymbol{a)\ N_1(0;2;1)}$	$\boldsymbol{b)\ N_2(-7;9;15)}$	$\boldsymbol{c)\ N_3(4;-2;-8)}$	$\boldsymbol{d)\ N_4(13;-11;12)}$

▶3. Laquelle est une représentation paramétrique de la droite (d) ?

$\boldsymbol{a)} \begin{cases} x = 1-t \\ y = 1+3t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -2+2t \end{cases}$	$\boldsymbol{b)} \begin{cases} x = t \\ y = 2-t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -2t \end{cases}$	$\boldsymbol{c)} \begin{cases} x = -1+2t \\ y = 3+2t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 2+4t \end{cases}$	$\boldsymbol{d)} \begin{cases} x = -5-2t \\ y = 7+2t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 8+4t \end{cases}$

▶4. Lequel est un vecteur directeur de la droite (d') ?

$\boldsymbol{a)\ \vec{u_1}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\boldsymbol{b)\ \vec{u_2}} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\boldsymbol{c)\ \vec{u_3}} \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$	$\boldsymbol{d)\ \vec{u_4}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

▶5. Laquelle de ces droites est parallèle à la droite (d) ?

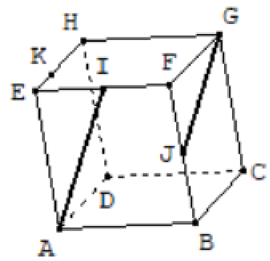
$\boldsymbol{a)} \begin{cases} x = -1+t \\ y = 3+t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 2-2t \end{cases}$	$\boldsymbol{b)} \begin{cases} x = 2-2t \\ y = 2 \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -4+4t \end{cases}$	$\boldsymbol{c)} \begin{cases} x = -4t \\ y = 6t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 8t \end{cases}$	$\boldsymbol{d)} \begin{cases} x = 5t \\ y = -5t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -10t \end{cases}$

▶6. Quelle est la position relative des droites (d) et (d') ?

***a)* strictement parallèles**	***b)* sécantes**	***c)* confondues**	***d)* non coplanaires**

Exercice 3. (7 points)

Sur la figure ci-contre, $ABCDEFGH$ est un cube de côté 1. Le point I est le milieu de $[EF]$, le point J celui de $[BF]$ et le point K vérifie $\overrightarrow{EK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$



▶1. Les droites (AI) et (GJ) sont-elles parallèles ?

▶2. On considère le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.

a. Le point D appartient-il au plan (IJK) ? Justifier votre réponse.

b. Déterminer une équation paramétrique de la droite (d) parallèle à (IK) passant par D.

c. Les droites (d) et (BC) sont-elles sécantes ? Si oui, déterminer les coordonnées du point d'intersection.

▶3. On considère la sphère S de centre A et de rayon 1. La droite (ID) est-elle tangente à la sphère S ?

↑

Terminale ➡ Contrôle n° 5

Spécialité Mathématiques

Correction du sujet A

Correction de l'exercice 1. (7 points)

▶ 1. $\forall x \in]0;+\infty[$, écrire en fonction de $\ln(x)$ les expressions : $A = \ln\left(x^5\sqrt{e}\right)$ $\quad B = \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}^7}\right)$

▶ 2. Résoudre l'inéquation $2\ln(x) \leq \ln(5-x) + \ln(x+12)$.

▶ 3. Résoudre l'équation $\ln(x+2) = -1$.

▶ 4. Dans un organisme mort, on sait que le carbone 14 diminue de 0,12 % chaque dizaine d'années. Combien d'années seront nécessaires pour que le carbone 14 ait diminué de moitié ?

Exercice 1.

1.

$\forall x \in]0;+\infty[$, $A = \ln\left(x^5\sqrt{e}\right) = \ln(x^5) + \ln\left(\sqrt{e}\right) = 5\ \ln(x) + \dfrac{1}{2}\ln(e) = 5\ \ln(x) + \dfrac{1}{2}$

$B = \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}^7}\right) = -\ln\left(\sqrt{x}^7\right) = -7\ \ln\left(\sqrt{x}\right) = -\dfrac{7}{2}\ \ln(x)$

2.

$$2\ln(x) \leq \ln(5-x) + \ln(x+12)$$

$x > 0$	$5 - x > 0$ $\Leftrightarrow x < 5$	$x + 12 > 0$ $\Leftrightarrow x > -12$

L'ensemble de définition est donc $\mathcal{D} =]0;5[$

$$2\ln(x) \leq \ln(5-x) + \ln(x+12)$$
$$\Longrightarrow \ln(x^2) \leq \ln\big((5-x)(x+12)\big)$$
$$\Longrightarrow x^2 \leq 5x + 60 - x^2 - 12x$$
$$\Longrightarrow 2x^2 + 7x - 60 \leq 0$$
$$\Delta = 49 - 4 \times 2 \times (-60) = 529 > 0$$
$$x_1 = \frac{-7-\sqrt{529}}{4} = -\frac{15}{2} \quad \text{et} \quad x_1 = \frac{-7+\sqrt{529}}{4} = 4$$

De plus $a = 2 > 0$, donc

x	$-\infty$		$\frac{-15}{2}$		4		$+\infty$
$2x^2+7x-60$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que :

x	$-\infty$	$\frac{-15}{2}$	0		4		5	$+\infty$
$f(x)$	//////	0	//////	$-$	0	$+$	//////	

L'ensemble des solutions est $]0;4]$.

3.

$$\ln(x+2) = -1$$

L'ensemble de définition est donc $\mathcal{D} =]-2;+\infty[$

$$\Leftrightarrow x + 2 = e^{-1}$$
$$\Leftrightarrow x = e^{-1} - 2$$

or $e^{-1} - 2 \in]-2;+\infty[$

L'ensemble des solutions est $\{e^{-1} - 2\}$

	4.	La quantité de carbone 14 contenue dans un organisme mort suit une progression géométrique de raison 0,9988. $$\text{Résolvons } 0{,}9988^n \leq \frac{1}{2}$$ $$\Leftrightarrow \ln(0{,}9988^n) \leq \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$ $$\Leftrightarrow n\ \ln(0{,}9988) \leq -\ln(2)$$ $$\Leftrightarrow n\ \geq \frac{-\ln(2)}{\ln(0{,}9988)}\ \text{ car }\ \ln(0{,}9988) < 0$$ $$\Rightarrow n\ \geq 578$$ Le carbone 14 aura diminué de moitié au bout de 5780 années.

Correction de l'exercice 2. (6 points)

Cet exercice est un QCM, chaque question n'a qu'une seule bonne réponse.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$, on considère les droites :

- (d) passant par les points $A(1; 1; -2)$ et $B(-1; 3; 2)$
- (d') de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = 6 - 3t \\ z = 8 - 6t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

▶1. Lequel des points ci-dessous appartient à la droite (d') ?

$\boldsymbol{a)}\ \boldsymbol{M_1(-1; 3; -2)}$	$\boldsymbol{b)}\ \boldsymbol{M_2(-7; 9; 2)}$	$\boldsymbol{c)}\ \boldsymbol{M_3(-6; 8; 12)}$	$\boldsymbol{d)}\ \boldsymbol{M_4(-3; 5; 10)}$

▶2. Lequel des points ci-dessous est aligné avec A et B ?

$\boldsymbol{a)}\ \boldsymbol{N_1(-7; 9; 15)}$	$\boldsymbol{b)}\ \boldsymbol{N_2(4; -2; -8)}$	$\boldsymbol{c)}\ \boldsymbol{N_3(13; -11; 12)}$	$\boldsymbol{d)}\ \boldsymbol{N_4(0; 2; 1)}$

▶3. Laquelle est une représentation paramétrique de la droite (d) ?

$\boldsymbol{a)} \begin{cases} \boldsymbol{x = 1 - t} \\ \boldsymbol{y = 1 + 3t} \\ \boldsymbol{z = -2 + 2t} \end{cases} \boldsymbol{t \in \mathbb{R}}$	$\boldsymbol{b)} \begin{cases} \boldsymbol{x = -1 + 2t} \\ \boldsymbol{y = 3 + 2t} \\ \boldsymbol{z = 2 + 4t} \end{cases} \boldsymbol{t \in \mathbb{R}}$	$\boldsymbol{c)} \begin{cases} \boldsymbol{x = -5 - 2t} \\ \boldsymbol{y = 7 + 2t} \\ \boldsymbol{z = 8 + 4t} \end{cases} \boldsymbol{t \in \mathbb{R}}$	$\boldsymbol{d)} \begin{cases} \boldsymbol{x = t} \\ \boldsymbol{y = 2 - t} \\ \boldsymbol{z = -2t} \end{cases} \boldsymbol{t \in \mathbb{R}}$

▶4. Lequel est un vecteur directeur de la droite (d') ?

$\boldsymbol{a)}\ \overrightarrow{\boldsymbol{u_1}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{-4} \\ \boldsymbol{6} \\ \boldsymbol{8} \end{pmatrix}$	$\boldsymbol{b)}\ \overrightarrow{\boldsymbol{u_2}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{2} \end{pmatrix}$	$\boldsymbol{c)}\ \overrightarrow{\boldsymbol{u_3}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{2} \end{pmatrix}$	$\boldsymbol{d)}\ \overrightarrow{\boldsymbol{u_4}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{-2} \\ \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{4} \end{pmatrix}$

▶5. Laquelle de ces droites est parallèle à la droite (d) ?

$\boldsymbol{a)} \begin{cases} \boldsymbol{x = -1 + t} \\ \boldsymbol{y = 3 + t} \\ \boldsymbol{z = 2 - 2t} \end{cases} \boldsymbol{t \in \mathbb{R}}$	$\boldsymbol{b)} \begin{cases} \boldsymbol{x = -4t} \\ \boldsymbol{y = 6t} \\ \boldsymbol{z = 8t} \end{cases} \boldsymbol{t \in \mathbb{R}}$	$\boldsymbol{c)} \begin{cases} \boldsymbol{x = 2 - 2t} \\ \boldsymbol{y = 2} \\ \boldsymbol{z = -4 + 4t} \end{cases} \boldsymbol{t \in \mathbb{R}}$	$\boldsymbol{d)} \begin{cases} \boldsymbol{x = 5t} \\ \boldsymbol{y = -5t} \\ \boldsymbol{z = -10t} \end{cases} \boldsymbol{t \in \mathbb{R}}$

▶6. Quelle est la position relative des droites (d) et (d') ?

***a)* sécantes**	***b)* strictement parallèles**	***c)* non coplanaires**	***d)* confondues**

Exercice 2.	**1.**	$$(d') \begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = 6 - 3t \\ z = 8 - 6t \end{cases} t \in \mathbb{R}$$ a) Pour $t = 1$, $\begin{cases} x = -4 + 3 \\ y = 6 - 3 \\ z = 8 - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$ donc $\boldsymbol{M_1(-1; 3; -2) \notin (d')}$ b) Pour $t = -1$, $\begin{cases} x = -4 - 3 \\ y = 6 + 3 \\ z = 8 + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = 9 \\ z = 14 \end{cases}$ donc $\boldsymbol{M_2(-7; 9; 2) \notin (d')}$

c)Pour $t = -\frac{2}{3}$, $\begin{cases} x = -4 + 3 \times \frac{-2}{3} \\ y = 6 - 3 \times \frac{-2}{3} \\ z = 8 - 6 \times \frac{-2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 - 2 = -6 \\ y = 6 + 2 = 8 \\ z = 8 + 4 = 12 \end{cases}$ **donc $M_3(-6; 8; 12) \in (d')$**

d) Pour $t = \frac{1}{3}$, $\begin{cases} x = -4 + 3 \times \frac{1}{3} \\ y = 6 - 3 \times \frac{1}{3} \\ z = 8 - 6 \times \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 + 1 = -3 \\ y = 6 - 1 = 5 \\ z = 8 - 2 = 6 \end{cases}$ donc $\boldsymbol{M_4(-3; 5; 10) \notin (d')}$

Réponse C

2.

$A(1; 1; -2)$ et $B(-1; 3; 2)$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$a)$ $N_1(-7; 9; 15)$ donc $\overrightarrow{AN_1}\begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 17 \end{pmatrix}$ or $\frac{-8}{-2} = \frac{8}{2} \neq \frac{17}{4}$ **donc $N_1(-7; 9; 15) \notin (AB)$**

$b)$ $N_2(4; -2; -8)$ donc $\overrightarrow{AN_2}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ or $\frac{3}{-2} = \frac{-3}{2} = \frac{-6}{4}$ **donc $N_2(4; -2; -8) \in (AB)$**

$c)$ $N_3(13; -11; 12)$ $\overrightarrow{AN_3}\begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ 14 \end{pmatrix}$ or $\frac{12}{-2} = \frac{-12}{2} \neq \frac{14}{4}$ **donc $N_3(13; -11; 12) \notin (AB)$**

$d)$ $N_4(0; 2; 1)$ donc $\overrightarrow{AN_4}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ or $\frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \neq \frac{3}{4}$ **donc $N_4(0; 2; 1) \notin (AB)$**

Réponse B

3.

La droite (d) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}$, je cherche donc une droite dont le vecteur directeur est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$. Cet argument élimine les réponses a) et b) :

$a)\ \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 3t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$

$b)\ \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 + 2t \\ z = 2 + 4t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}$

Pour départager les deux derniers, on peut utiliser le point $A(1; 1; -2)$

$c)$ Pour $t = -3$, $\begin{cases} x = -5 - 2 \times (-3) = 1 \\ y = 7 + 2 \times (-3) = 1 \\ z = 8 + 4 \times (-3) = -4 \end{cases}$ donc cette droite ne passe pas par A

$d)$ Pour $t = 1$, $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - 1 = 1 \\ z = -2 \times 1 = -2 \end{cases}$ donc **cette équation représente $(\boldsymbol{d})$**

Réponse D

4.

$(d')\ \begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = 6 - 3t \\ z = 8 - 6t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}$

$a)\ \overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}-4\\6\\8\end{pmatrix}$ or $\dfrac{-4}{3} = \dfrac{6}{-3} \neq \dfrac{8}{-6}$ donc $\overrightarrow{u_1} \nparallel \vec{v}\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}$

$b)\ \overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ or $\dfrac{-1}{3} = \dfrac{1}{-3} = \dfrac{2}{-6}$ donc $\overrightarrow{u_2} \parallel \vec{v}\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}$

$c)\ \overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$ or $\dfrac{-1}{3} \neq \dfrac{3}{-3} \neq \dfrac{2}{-6}$ donc $\overrightarrow{u_3} \nparallel \vec{v}\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}$

$d)\ \overrightarrow{u_4}\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix}$ or $\dfrac{-2}{3} \neq \dfrac{3}{-3} \neq \dfrac{4}{-6}$ donc $\overrightarrow{u_4} \nparallel \vec{v}\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}$

Réponse B

<table>
<tr>
<td></td>
<td>5.</td>
<td>

La droite (d) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}$

$a)\ \begin{cases}x=-1+t\\y=3+t\\z=2-2t\end{cases}\ t\in\mathbb{R}$ de vecteur directeur $\overrightarrow{w_1}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\nparallel\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}$

$b)\ \begin{cases}x=-4t\\y=6t\\z=8t\end{cases}\ t\in\mathbb{R}$ de vecteur directeur $\overrightarrow{w_2}\begin{pmatrix}-4\\6\\8\end{pmatrix}\nparallel\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}$

$c)\ \begin{cases}x=2-2t\\y=2\\z=-4+4t\end{cases}\ t\in\mathbb{R}$ de vecteur directeur $\overrightarrow{w_3}\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}\nparallel\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}$

$d)\ \begin{cases}x=5t\\y=-5t\\z=-10t\end{cases}\ t\in\mathbb{R}$ de vecteur directeur $\boldsymbol{\overrightarrow{w_4}\begin{pmatrix}5\\-5\\-10\end{pmatrix}\parallel\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}}$

Réponse D

</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>6.</td>
<td>

Les droites (d) et (d') de vecteurs directeurs respectifs :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}\parallel\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}\text{ donc }\ (d)\text{ et }(d')\text{ sont parallèles}$$

De plus, $A(1;1;-2)$ et $(d')\ \begin{cases}x=-4+3t\\y=6-3t\\z=8-6t\end{cases}\ t\in\mathbb{R}$

Pour $t=\dfrac{5}{3}\ \begin{cases}x=-4+3\times\dfrac{5}{3}=-4+5=1\\y=6-3\times\dfrac{5}{3}=6-5=1\\z=8-6\times\dfrac{5}{3}=8-10=-2\end{cases}$ donc $A(1;1;-2)\in(d')$

Les droites (d) et (d') sont donc confondues.

Réponse D

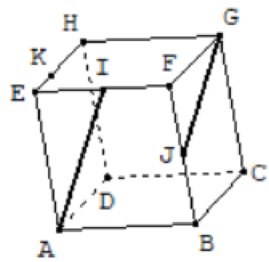
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">

Les réponses du QCM sont C B D B D D

</td>
</tr>
</table>

Correction de l'exercice 3. (7 points)

Sur la figure ci-contre, $ABCDEFGH$ est un cube de côté 1. Le point I est le milieu de $[EF]$, le point J celui de $[BF]$ et le point K vérifie $\overrightarrow{EK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$



▶ 1. Les droites (AI) et (GJ) sont-elles parallèles ?

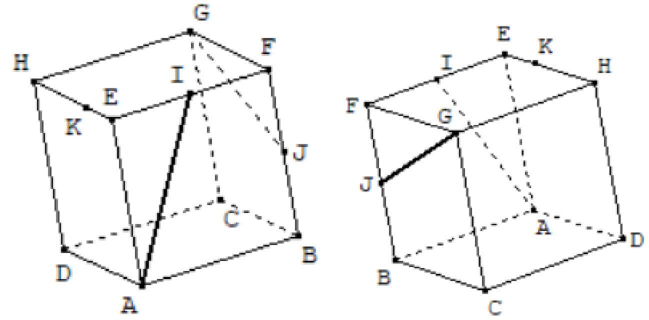
▶ 2. On considère le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$.

a. Le point D appartient-il au plan (IJK) ? Justifier votre réponse.

b. Déterminer une équation paramétrique de la droite (d) parallèle à (IK) passant par D.

c. Les droites (d) et (BC) sont-elles sécantes ? Si oui, déterminer les coordonnées du point d'intersection.

▶3. On considère la sphère S de centre A et de rayon 1. La droite (ID) est-elle tangente à la sphère S ?

Exercice 3.	**1.**	Les droites (AI) et (GJ) ne sont pas parallèles car elles ne sont pas coplanaires. La droite (AI) est dans le plan de face $(ABFE)$ et la droite (GJ) est dans le plan droit $(BCGF)$. Voici, ci-dessous, d'autres vues du cube : 
	2a.	$D(0;1;0)\quad I\left(\frac{1}{2};0;1\right)\quad J\left(1;0;\frac{1}{2}\right)\quad K\left(0;\frac{1}{3};1\right)$ $\overrightarrow{DI}\begin{pmatrix}1/2\\-1\\1\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix}1\\-1\\1/2\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{DK}\begin{pmatrix}0\\-2/3\\1\end{pmatrix}$ Résolvons $x\overrightarrow{DI}+y\overrightarrow{DJ}+z\overrightarrow{DK}=\vec{0}$ $\begin{cases}\frac{1}{2}x+y=0\\-x-y-\frac{2}{3}z=0\\x+\frac{1}{2}y+z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y=0 \quad (L_1)\\3x+3y+2z=0 \quad (L_2)\\2x+y+2z=0 \quad (L_3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+3y+2z=0 \quad (L_2)\\x+2y=0 \quad (L_1)\\x+2y=0 \quad (L_2-L_3)\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2y\\-6y+3y+2z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2y\\z=\frac{3}{2}y\end{cases}$ Par exemple, $(-4;2;3)$ est solution donc $-4\overrightarrow{DI}+2\overrightarrow{DJ}+3\overrightarrow{DK}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{DI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DJ}+\frac{3}{4}\overrightarrow{DK}$ J'en déduis que les point I,J,K et D sont coplanaires donc $D\in(IJK)$.
	2b.	$D(0;1;0)\quad I\left(\frac{1}{2};0;1\right)\quad K\left(0;\frac{1}{3};1\right)\quad \overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix}$ La droite (d) admet pour équation paramétrique : $\begin{cases}x=0-\frac{1}{2}t\\y=1+\frac{1}{3}t\\z=0+0t\end{cases}\ t\in\mathbb{R}$ soit, par exemple, $\begin{cases}x=-\frac{1}{2}t\\y=1+\frac{1}{3}t\\z=0\end{cases}\ t\in\mathbb{R}$

	2c.	Les droites (d) et (BC) sont sécantes car elles ne sont pas parallèles et elles sont dans le même plan $(ABCD)$ c'est-à-dire la face du dessous. Soit $M(x;y;z)$ le point d'intersection $$M(x;y;z) \in (BC) \text{ donc } x = 1 \text{ et } z = 0$$ $$M(1;y;0)$$ De plus, $M(1;y;0) \in (d)$ donc $$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}t = 1 \\ y = 1 + \frac{1}{3}t \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ t = -2 \\ y = 1 + \frac{1}{3}t \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{3} \\ z = 0 \end{cases}$$ $$\text{donc } M\left(1;\frac{1}{3};0\right)$$
	3.	$$D(0;1;0) \quad I\left(\frac{1}{2};0;1\right) \quad \overrightarrow{ID}\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$ Une équation paramétrique de la droite (ID) est donc $\begin{cases} x = -\frac{1}{2}t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ Soit $N(x;y;z) \in (ID) \cap S$ $$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases} \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$ $$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$ $$\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}t\right)^2 + (1+t)^2 + (-t)^2 = 1$$ $$\Leftrightarrow \frac{1}{4}t^2 + 1 + 2t + t^2 + t^2 = 1$$ $$\Leftrightarrow \frac{9}{4}t^2 + 2t = 0$$ $$\Leftrightarrow t\left(\frac{9}{4}t + 2\right) = 0$$ $$\Leftrightarrow t = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{9}{4}t + 2 = 0$$ $$\Leftrightarrow t = 0 \quad \text{ou} \quad t = \frac{-8}{9}$$ J'en déduis que la droite (ID) et la sphère S ne sont pas tangentes car elels ont deux points d'intersection : Pour $t = 0$ $\begin{cases} x = -\frac{1}{2}t = 0 \\ y = 1 + t = 1 \\ z = -t = 0 \end{cases}$ c'est le point $D(0;1;0)$ Pour $t = \frac{-8}{9}$ $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \times \frac{-8}{9} = \frac{4}{9} \\ y = 1 + \frac{-8}{9} = \frac{1}{9} \\ z = -\frac{-8}{9} = \frac{8}{9} \end{cases}$ Le point $\left(\frac{4}{9};\frac{1}{9};\frac{8}{9}\right)$ qui est très proche du point I

Terminale ⇨ Contrôle n° 5

Spécialité Mathématiques

Correction du sujet B

Correction de l'exercice 1. (7 points)

▶ 1. $\forall x \in]0;+\infty[$, écrire en fonction de $\ln(x)$ les expressions : $A = \ln\left(\sqrt{e}\ \ x^6\right)$ $\quad B = \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}^5}\right)$

▶ 2. Résoudre l'inéquation $2\ln(x) \leq \ln(10-x) + \ln(x+3)$.

▶ 3. Résoudre l'équation $\ln(x+1) = -1$.

▶ 4. Dans un organisme mort, on sait que le carbone 14 diminue de 1,2 % chaque centaine d'années. Combien d'années seront nécessaires pour que le carbone 14 ait diminué de moitié ?

Exercice 1.

1.

$\forall x \in]0;+\infty[$, $A = \ln\left(\sqrt{e}\ \ x^6\right) = \ln\left(\sqrt{e}\right) + \ln(x^6) = \dfrac{1}{2}\ln(e) + 6\ \ln(x) = \dfrac{1}{2} + 6\ \ln(x)$

$B = \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}^5}\right) = -\ln\left(\sqrt{x}^5\right) = -5\ \ln\left(\sqrt{x}\right) = -\dfrac{5}{2}\ \ln(x)$

2.

$$2\ln(x) \leq \ln(10-x) + \ln(x+3)$$

$x > 0$ | $10 - x > 0 \iff x < 10$ | $x + 3 > 0 \iff x > -3$

L'ensemble de définition est donc $\mathcal{D} =]0;10[$

$$2\ln(x) \leq \ln(10-x) + \ln(x+3)$$
$$\Longrightarrow \ln(x^2) \leq \ln\big((10-x)(x+3)\big)$$
$$\Longrightarrow x^2 \leq 10x + 30 - x^2 - 3x$$
$$\Longrightarrow 2x^2 - 7x - 30 \leq 0$$
$$\Delta = 49 - 4 \times 2 \times (-30) = 289 > 0$$
$$x_1 = \frac{7-\sqrt{289}}{4} = -\frac{5}{2} \quad \text{et} \quad x_1 = \frac{7+\sqrt{289}}{4} = 6$$

De plus $a = 2 > 0$, donc

x	$-\infty$		$\frac{-5}{2}$		6		$+\infty$
$2x^2-7x-30$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que :

x	$-\infty$	$\frac{-5}{2}$	0		6		10	$+\infty$
$f(x)$	//////	0	//////	$-$	0	$+$	//////	//////

L'ensemble des solutions est $]0;6]$.

3.

$$\ln(x+1) = -1$$

L'ensemble de définition est donc $\mathcal{D} =]-1;+\infty[$

$$\iff x + 1 = e^{-1}$$
$$\iff x = e^{-1} - 1$$

or $e^{-1} - 1 \in]-1;+\infty[$

L'ensemble des solutions est $\{e^{-1} - 1\}$

	4.	La quantité de carbone 14 contenue dans un organisme mort suit une progression géométrique de raison 0,988. $\text{Résolvons } 0{,}988^n \leq \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow \ln(0{,}988^n) \leq \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ $\Leftrightarrow n \ln(0{,}988) \leq -\ln(2)$ $\Leftrightarrow n \geq \frac{-\ln(2)}{\ln(0{,}988)} \text{ car } \ln(0{,}988) < 0$ $\Rightarrow n \geq 58$ Le carbone 14 aura diminué de moitié au bout de 5800 années.

Correction de l'exercice 2. (6 points)

Cet exercice est un QCM, chaque question n'a qu'une seule bonne réponse.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$, on considère les droites :

- (d) passant par les points $A(1; 1; -2)$ et $B(-1; 3; 2)$
- (d') de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = 6 - 3t \\ z = 8 - 6t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

▶ 1. Lequel des points ci-dessous appartient à la droite (d') ?

a) $\boldsymbol{M_1(-3; 5; 10)}$	***b***) $\boldsymbol{M_2(-6; 8; 12)}$	***c***) $\boldsymbol{M_3(-7; 9; 2)}$	***d***) $\boldsymbol{M_4(-1; 3; -2)}$

▶ 2. Lequel des points ci-dessous est aligné avec A et B ?

a) $\boldsymbol{N_1(0; 2; 1)}$	***b***) $\boldsymbol{N_2(-7; 9; 15)}$	***c***) $\boldsymbol{N_3(4; -2; -8)}$	***d***) $\boldsymbol{N_4(13; -11; 12)}$

▶ 3. Laquelle est une représentation paramétrique de la droite (d) ?

a) $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 3t \\ z = -2 + 2t \end{cases} \; t \in \mathbb{R}$	***b***) $\begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = -2t \end{cases} \; t \in \mathbb{R}$	***c***) $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 + 2t \\ z = 2 + 4t \end{cases} \; t \in \mathbb{R}$	***d***) $\begin{cases} x = -5 - 2t \\ y = 7 + 2t \\ z = 8 + 4t \end{cases} \; t \in \mathbb{R}$

▶ 4. Lequel est un vecteur directeur de la droite (d') ?

a) $\vec{u_1}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$	***b***) $\vec{u_2}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	***c***) $\vec{u_3}\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$	***d***) $\vec{u_4}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

▶ 5. Laquelle de ces droites est parallèle à la droite (d) ?

a) $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 + t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \; t \in \mathbb{R}$	***b***) $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 2 \\ z = -4 + 4t \end{cases} \; t \in \mathbb{R}$	***c***) $\begin{cases} x = -4t \\ y = 6t \\ z = 8t \end{cases} \; t \in \mathbb{R}$	***d***) $\begin{cases} x = 5t \\ y = -5t \\ z = -10t \end{cases} \; t \in \mathbb{R}$

▶ 6. Quelle est la position relative des droites (d) et (d') ?

a) **strictement parallèles**	***b***) **sécantes**	***c***) **confondues**	***d***) **non coplanaires**

Exercice 2.

1.

$$(d')\begin{cases} x = -4+3t \\ y = 6-3t \\ z = 8-6t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

a) Pour $t = \frac{1}{3}$, $\begin{cases} x = -4+3\times\frac{1}{3} \\ y = 6-3\times\frac{1}{3} \\ z = 8-6\times\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4+1 = -3 \\ y = 6-1 = 5 \\ z = 8-2 = 6 \end{cases}$ donc $\boldsymbol{M_1(-3;5;10) \notin (d')}$

b) $t = -\frac{2}{3}$, $\begin{cases} x = -4+3\times\frac{-2}{3} \\ y = 6-3\times\frac{-2}{3} \\ z = 8-6\times\frac{-2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4-2 = -6 \\ y = 6+2 = 8 \\ z = 8+4 = 12 \end{cases}$ **donc $\boldsymbol{M_2(-6;8;12) \in (d')}$**

c) Pour $t = -1$, $\begin{cases} x = -4-3 \\ y = 6+3 \\ z = 8+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = 9 \\ z = 14 \end{cases}$ donc $\boldsymbol{M_3(-7;9;2) \notin (d')}$

d) Pour $t = 1$, $\begin{cases} x = -4+3 \\ y = 6-3 \\ z = 8-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$ donc $\boldsymbol{M_4(-1;3;-2) \notin (d')}$

Réponse B

2.

$A(1;1;-2)$ et $B(-1;3;2)$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$a)$ $N_1(0;2;1)$ donc $\overrightarrow{AN_4}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ or $\frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \neq \frac{3}{4}$ **donc $\boldsymbol{N_1(0;2;1) \notin (AB)}$**

$b)$ $N_2(-7;9;15)$ donc $\overrightarrow{AN_1}\begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 17 \end{pmatrix}$ or $\frac{-8}{-2} = \frac{8}{2} \neq \frac{17}{4}$ **donc $\boldsymbol{N_2(-7;9;15) \notin (AB)}$**

$c)$ $N_3(4;-2;-8)$ donc $\overrightarrow{AN_2}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ or $\frac{3}{-2} = \frac{-3}{2} = \frac{-6}{4}$ **donc $\boldsymbol{N_3(4;-2;-8) \in (AB)}$**

$d)$ $N_4(13;-11;12)$ $\overrightarrow{AN_3}\begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ 14 \end{pmatrix}$ or $\frac{12}{-2} = \frac{-12}{2} \neq \frac{14}{4}$ **donc $\boldsymbol{N_4(13;-11;12) \notin (AB)}$**

Réponse C

	3.	La droite (d) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}$, je cherche donc une droite dont le vecteur directeur est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$. Cet argument élimine les réponses a) et c) : $a)\ \begin{cases}x=1-t\\y=1+3t\\z=-2+2t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$ $c)\ \begin{cases}x=-1+2t\\y=3+2t\\z=2+4t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}$ Pour départager les deux derniers, on peut utiliser le point $A(1;1;-2)$ $d)$ Pour $t=-3$, $\begin{cases}x=-5-2\times(-3)=1\\y=7+2\times(-3)=1\\z=8+4\times(-3)=-4\end{cases}$ donc cette droite ne passe pas par A $\boldsymbol{b)}$ **Pour** $\boldsymbol{t=1}$**,** $\boldsymbol{\begin{cases}x=1\\y=2-1=1\\z=-2\times1=-2\end{cases}}$ **donc cette équation représente** $\boldsymbol{(d)}$ **Réponse B**
	4.	$(d')\ \begin{cases}x=-4+3t\\y=6-3t\\z=8-6t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}$ $a)\ \overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$ or $\frac{-1}{3}\neq\frac{3}{-3}\neq\frac{2}{-6}$ donc $\overrightarrow{u_1}\nparallel\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}$ $b)\ \overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix}$ or $\frac{-2}{3}\neq\frac{3}{-3}\neq\frac{4}{-6}$ donc $\overrightarrow{u_2}\nparallel\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}$ $c)\ \overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}-4\\6\\8\end{pmatrix}$ or $\frac{-4}{3}=\frac{6}{-3}\neq\frac{8}{-6}$ donc $\overrightarrow{u_3}\nparallel\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}$ $\boldsymbol{d)\ \overrightarrow{u_4}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}}$ **or** $\boldsymbol{\frac{-1}{3}=\frac{1}{-3}=\frac{2}{-6}}$ **donc** $\boldsymbol{\overrightarrow{u_4}\parallel\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}}$ **Réponse D**

<table>
<tr>
<td></td>
<td>5.</td>
<td>

La droite (d) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}$

$a)$ $\begin{cases}x=-1+t\\y=3+t\\z=2-2t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ de vecteur directeur $\overrightarrow{w_1}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\nparallel\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}$

$b)$ $\begin{cases}x=2-2t\\y=2\\z=-4+4t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ de vecteur directeur $\overrightarrow{w_2}\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}\nparallel\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}$

$c)$ $\begin{cases}x=-4t\\y=6t\\z=8t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ de vecteur directeur $\overrightarrow{w_3}\begin{pmatrix}-4\\6\\8\end{pmatrix}\nparallel\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}$

$d)$ $\begin{cases}x=5t\\y=-5t\\z=-10t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ de vecteur directeur $\overrightarrow{w_4}\begin{pmatrix}5\\-5\\-10\end{pmatrix}\parallel\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}$

Réponse D

</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>6.</td>
<td>

Les droites (d) et (d') de vecteurs directeurs respectifs :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}\parallel\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}\text{ donc }(d)\text{ et }(d')\text{ sont parallèles}$$

De plus, $A(1;1;-2)$ et (d') $\begin{cases}x=-4+3t\\y=6-3t\\z=8-6t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

Pour $t=\frac{5}{3}$ $\begin{cases}x=-4+3\times\frac{5}{3}=-4+5=1\\y=6-3\times\frac{5}{3}=6-5=1\\z=8-6\times\frac{5}{3}=8-10=-2\end{cases}$ donc $A(1;1;-2)\in(d')$

Les droites (d) et (d') sont donc confondues.

Réponse C

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">

Les réponses du QCM sont B C B D D C

</td>
</tr>
</table>

Correction de l'exercice 3. (7 points)

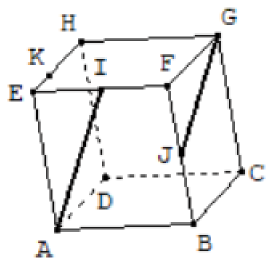
Sur la figure ci-contre, $ABCDEFGH$ est un cube de côté 1. Le point I est le milieu de $[EF]$, le point J celui de $[BF]$ et le point K vérifie $\overrightarrow{EK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$

► 1. Les droites (AI) et (GJ) sont-elles parallèles ?

► 2. On considère le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$.

a. Le point D appartient-il au plan (IJK) ? Justifier votre réponse.

b. Déterminer une équation paramétrique de la droite (d) parallèle à (IK) passant par D.



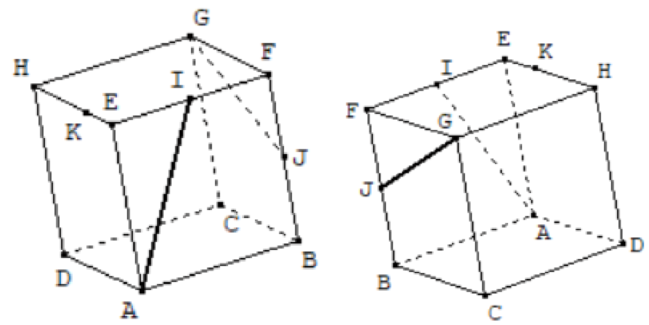
c. Les droites (d) et (BC) sont-elles sécantes ? Si oui, déterminer les coordonnées du point d'intersection.

►3. On considère la sphère S de centre A et de rayon 1. La droite (ID) est-elle tangente à la sphère S ?

<table>
<tr>
<td rowspan="3">Exercice 3.</td>
<td>1.</td>
<td>

Les droites (AI) et (GJ) ne sont pas parallèles car elles ne sont pas coplanaires.

La droite (AI) est dans le plan de face $(ABFE)$ et la droite (GJ) est dans le plan droit $(BCGF)$. Voici, ci-dessous, d'autres vues du cube :



</td>
</tr>
<tr>
<td>2a.</td>
<td>

$$D(0;1;0) \quad I\left(\frac{1}{2};0;1\right) \quad J\left(1;0;\frac{1}{2}\right) \quad K\left(0;\frac{1}{3};1\right)$$

$$\overrightarrow{DI}\begin{pmatrix}1/2\\-1\\1\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix}1\\-1\\1/2\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{DK}\begin{pmatrix}0\\-2/3\\1\end{pmatrix}$$

Résolvons $x\overrightarrow{DI} + y\overrightarrow{DJ} + z\overrightarrow{DK} = \vec{0}$

$$\begin{cases}\frac{1}{2}x + y = 0\\ -x - y - \frac{2}{3}z = 0\\ x + \frac{1}{2}y + z = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x + 2y = 0 \quad (L_1)\\ 3x + 3y + 2z = 0 \quad (L_2)\\ 2x + y + 2z = 0 \quad (L_3)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x + 3y + 2z = 0 \quad (L_2)\\ x + 2y = 0 \quad (L_1)\\ x + 2y = 0 \quad (L_2 - L_3)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x = -2y\\ -6y + 3y + 2z = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = -2y\\ z = \frac{3}{2}y\end{cases}$$

Par exemple, $(-4;2;3)$ est solution donc

$$-4\overrightarrow{DI} + 2\overrightarrow{DJ} + 3\overrightarrow{DK} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{DI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DJ} + \frac{3}{4}\overrightarrow{DK}$$

J'en déduis que les point I, J, K et D sont coplanaires donc $D \in (IJK)$.

</td>
</tr>
<tr>
<td>2b.</td>
<td>

$$D(0;1;0) \quad I\left(\frac{1}{2};0;1\right) \quad K\left(0;\frac{1}{3};1\right) \quad \overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}\\ 0\end{pmatrix}$$

La droite (d) admet pour équation paramétrique :

$$\begin{cases}x = 0 - \frac{1}{2}t\\ y = 1 + \frac{1}{3}t\\ z = 0 + 0t\end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \text{ soit, par exemple, } \begin{cases}x = -\frac{1}{2}t\\ y = 1 + \frac{1}{3}t\\ z = 0\end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>2c.</td>
<td>
Les droites (d) et (BC) sont sécantes car elles ne sont pas parallèles et elles sont dans le même plan $(ABCD)$ c'est-à-dire la face du dessous.

Soit $M(x;y;z)$ le point d'intersection
$$M(x;y;z) \in (BC) \text{ donc } x = 1 \text{ et } z = 0$$
$$M(1;y;0)$$
De plus, $M(1;y;0) \in (d)$ donc
$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}t = 1 \\ y = 1 + \frac{1}{3}t \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ t = -2 \\ y = 1 + \frac{1}{3}t \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{3} \\ z = 0 \end{cases}$$
$$\text{donc } M\left(1;\frac{1}{3};0\right)$$
</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>3.</td>
<td>
$$D(0;1;0) \quad I\left(\frac{1}{2};0;1\right) \quad \overrightarrow{ID}\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
Une équation paramétrique de la droite (ID) est donc $\begin{cases} x = -\frac{1}{2}t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Soit $N(x;y;z) \in (ID) \cap S$
$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases} \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$
$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ \Leftrightarrow & \left(-\frac{1}{2}t\right)^2 + (1+t)^2 + (-t)^2 = 1 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{4}t^2 + 1 + 2t + t^2 + t^2 = 1 \\ \Leftrightarrow & \frac{9}{4}t^2 + 2t = 0 \\ \Leftrightarrow & t\left(\frac{9}{4}t + 2\right) = 0 \\ \Leftrightarrow & t = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{9}{4}t + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow & t = 0 \quad \text{ou} \quad t = \frac{-8}{9} \end{aligned}$$
J'en déduis que la droite (ID) et la sphère S ne sont pas tangentes car elels ont deux points d'intersection :
Pour $t = 0$ $\begin{cases} x = -\frac{1}{2}t = 0 \\ y = 1 + t = 1 \\ z = -t = 0 \end{cases}$ c'est le point $D(0;1;0)$
Pour $t = \frac{-8}{9}$ $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \times \frac{-8}{9} = \frac{4}{9} \\ y = 1 + \frac{-8}{9} = \frac{1}{9} \\ z = -\frac{-8}{9} = \frac{8}{9} \end{cases}$ Le point $\left(\frac{4}{9};\frac{1}{9};\frac{8}{9}\right)$ qui est très proche du point I
</td>
</tr>
</table>