Jeudi 28 mars 2024

Terminale → Contrôle n° 7 → Bac Blanc

Spécialité Mathématiques

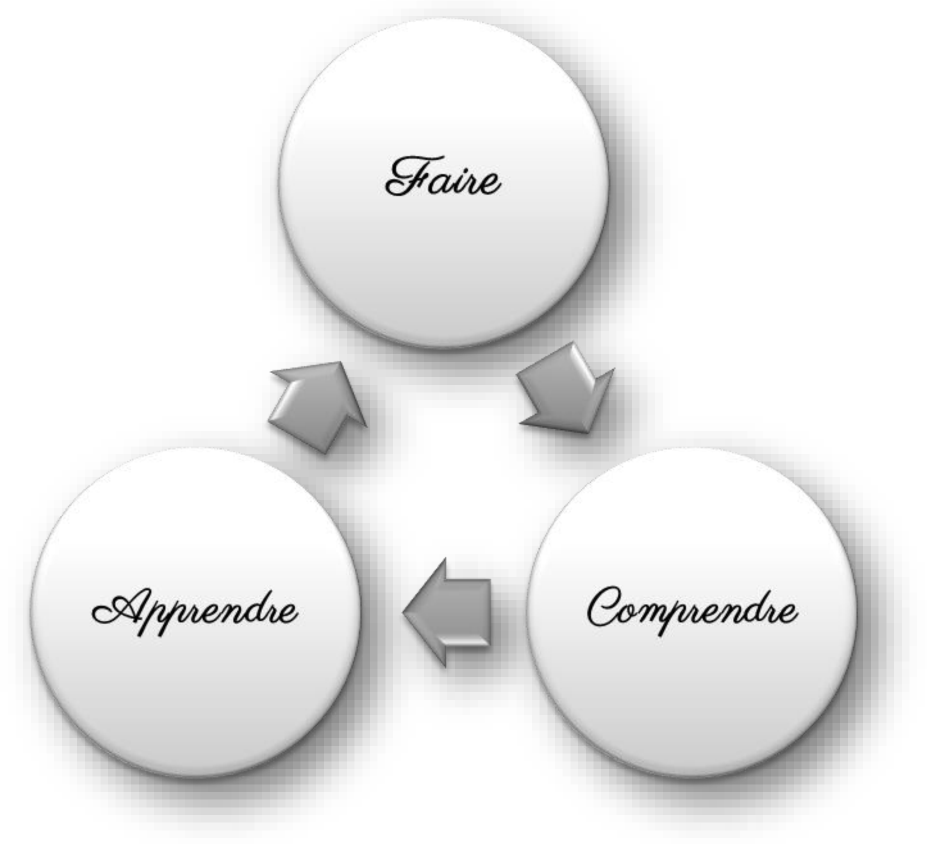


Table des matières

Enoncé du sujet

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

BACCALAURÉAT BLANC
Jeudi 28 mars 2024

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé. L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet cous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.

Exercice 1. (5 points)

PARTIE A : Étude d'une fonction auxiliaire g

Soit g la fonction définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, telle que pour tout $x > 0$,

$$g(x) = 4x - 2x\ln(x) - 4.$$

On note g' la fonction dérivée de g sur $]0;+\infty[$. On admet que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = -4$.

1) Calculer $g(1)$ et $g(e)$.

2) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ en justifiant votre démarche.

3) **a.** Montrer que, pour tout $x > 0$, $g'(x) = 2 - 2\ln(x)$.

b. En déduire le tableau de variations de g sur $]0;+\infty[$.

4) **a.** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions distinctes sur $]0;+\infty[$: 1 et α avec α appartenant à l'intervalle $[e\,;+\infty[$.

b. En justifiant, donner l'arrondi de α à 10^{-2} près.

5) En déduire le tableau de signes de g sur $]0;+\infty[$.

PARTIE B : Étude de la fonction f

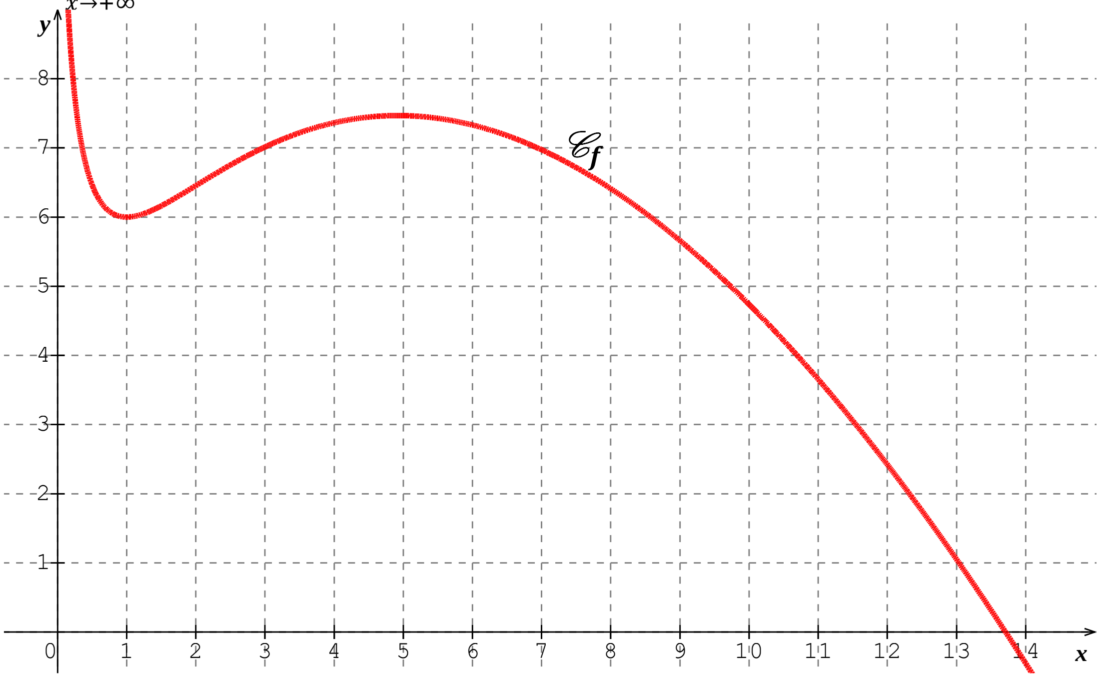
Soit f la fonction, définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, telle que pour tout $x > 0$,

$$f(x) = 6x - 2x\ln(x) - 4\ln(x).$$

On note f' la fonction dérivée de f sur $]0;+\infty[$.

La représentation graphique$\mathbf{C}_f$ de cette fonction f est donnée dans le repère ci-dessous.

On admet que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.



1) Déterminer la limite de f en 0 en justifiant votre démarche. Interpréter graphiquement le résultat.

2) **a.** Justifier que pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x}.$$

b. En déduire le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$. *On ne calculera pas $f(\alpha)$.*

3) On admet que, sur $]0;+\infty[$, f est deux fois dérivable et que pour tout $x > 0$,

$$f''(x) = \frac{4-2x}{x^2}$$

a. Étudier la convexité de f sur $]0;+\infty[$.

b. La courbe de la fonction f admet-elle un ou des points d'inflexion sur $]0;+\infty[$? Si oui, en préciser les coordonnées.

Exercice 2. (5 points)

Des biologistes étudient l'évolution d'une population d'oiseaux dans un parc national.
Au début de l'étude la population est de 100 000 oiseaux.
Pour préserver l'équilibre du milieu naturel, le nombre d'oiseaux ne doit pas dépasser 300 000.

Partie A : Étude d'un premier modèle en laboratoire

L'observation de l'évolution de ces populations d'oiseaux en captivité, en l'absence de tout prédateur, montre que le nombre moyen d'oiseaux augmente de 40% chaque année.
En tenant compte de cette observation, les biologistes modélisent l'évolution de la population d'oiseaux à l'aide de la suite (U_n) où, pour tout entier naturel n, U_n modélise le nombre d'oiseaux exprimé en millions, au bout de n années.
On a donc $U_0 = 0{,}1$.

1) Justifier que pour tout entier naturel n, $U_n = 0{,}1 \times 1{,}4^n$.
2) Déterminer le sens de variations de cette suite (U_n).
3) En résolvant une inéquation, déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel $U_n > 0{,}3$.
4) Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel serait-il préservé ? Justifier la réponse.

Partie B : Étude d'un second modèle

En tenant compte des contraintes du milieu naturel dans lequel évoluent les oiseaux, les biologistes choisissent une nouvelle modélisation.
Ils modélisent le nombre d'oiseaux à l'aide de la suite (V_n), définie par :

$V_0 = 0{,}1$ et pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = 1{,}4\, V_n - 1{,}4\, V_n^2$.

où, pour tout entier n, V_n est le nombre d'oiseaux, exprimé en millions, au bout de n années.

1) Déterminer le nombre d'oiseaux au bout d'une année.
2) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ par $f(x) = 1{,}4x - 1{,}4x^2$.
   a. Résoudre dans $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ l'équation $f(x) = x$.
   b. Montrer que f est croissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

3) **a.** Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $0 \leq V_n \leq V_{n+1} \leq \frac{1}{2}$
   b. Montrer que la suite (V_n) est convergente.
   On note ℓ la valeur de la limite de la suite (V_n). On admet que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.
   c. Déterminer la valeur de ℓ.
   d. Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel sera-t-il préservé ? Justifier la réponse.

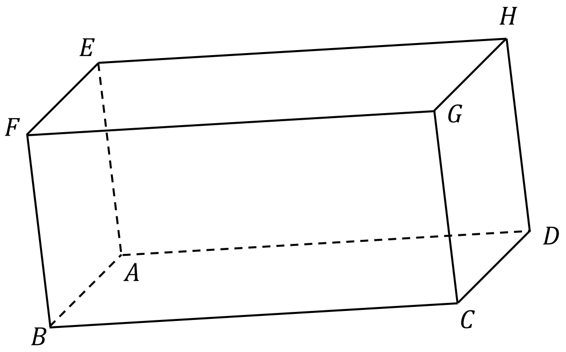
4) On donne ci-dessous la fonction seuil, écrite en langage Python.

```
def seuil(A):
    V=0.1
    n=0
    while V<A:
        V=1.4*V-1.4*V**2
        n=n+1
    return n
```

   a. Qu'observe-t-on si on saisit `seuil(0.3)` ?
   b. Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de `seuil(0.27)` ?
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Exercice 3. (5 points)

On considère un pavé droit $ABCDEFGH$ tel que : $AB = 1$, $AD = 2$ et $AE = 1$.
I est le milieu de $[AD]$, le point J vérifie $\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{AI}$ et le point K vérifie $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DF}$.
L'espace est muni du repère orthonormé $\left(\boldsymbol{A}; \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}; \overrightarrow{\boldsymbol{AI}}; \overrightarrow{\boldsymbol{AE}}\right)$.



1) **a.** Démontrer que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$

b. Donner, dans le repère choisi, les coordonnées des points C, E, G, I, J et K.

2) **a.** Déterminer deux réels α et β tels que $\overrightarrow{EJ} = \alpha\overrightarrow{EI} + \beta\overrightarrow{EK}$.

b. Que peut-on en déduire ?

3) **a.** Les points I, K et G sont-ils alignés ? Justifier votre réponse.

b. Les droites (DK) et (AG) sont-elles sécantes ? Justifier votre réponse.

4) Déterminer l'intersection des plans (IJK) et (EFG).

5) On considère la droite (d) dont on donne la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5t + 7 \\ z = -t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

a. Le point G appartient-il à la droite (d) ? Justifier.

b. Les droites (d) et (JK) sont-elles parallèles ?

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d') parallèle à (IJ) passant par K.

d. Déterminer les coordonnées du point L intersection des droites (d) et (d').

Exercice 4. (5 points)

Entre 2010 et 2022, en France, 10 111 028 accouchements ont été recensés, parmi lesquels 169 359 ont donné naissance à des jumeaux et 2 558 ont donné naissance à au moins trois enfants.

1) **a.** Avec une précision de 0,1 %, calculer parmi tous les accouchements recensés, le pourcentage d'accouchements donnant naissance **à un seul enfant** sur la période 2010-2022.

b. Vérifier que le pourcentage d'accouchements qui ont donné naissance **à au moins trois enfants** est inférieur à 0,1 %. *On considérera, pour la suite, que ce pourcentage est négligeable.*

On appelle accouchement ordinaire, un accouchement donnant naissance à un seul enfant. On appelle accouchement double, un accouchement donnant naissance à exactement deux enfants.

On considère dans la suite de l'exercice qu'un accouchement est soit ordinaire, soit double. La probabilité d'un accouchement ordinaire est égale à 0,983 et celle d'un accouchement double est alors égale à 0,017. *Les probabilités calculées dans la suite seront arrondies au millième.*

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on admet qu'un jour donné dans une maternité, on réalise n accouchements. On considère que ces n accouchements sont indépendants les uns des autres. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'accouchements doubles pratiqués ce jour.

a. Dans le cas où $n = 20$, préciser la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X et calculer la probabilité qu'on réalise exactement un accouchement double.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, par la méthode de votre choix que vous expliciterez, déterminer la plus petite valeur de n telle que $P(X \geq 1) \geq 0,99$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

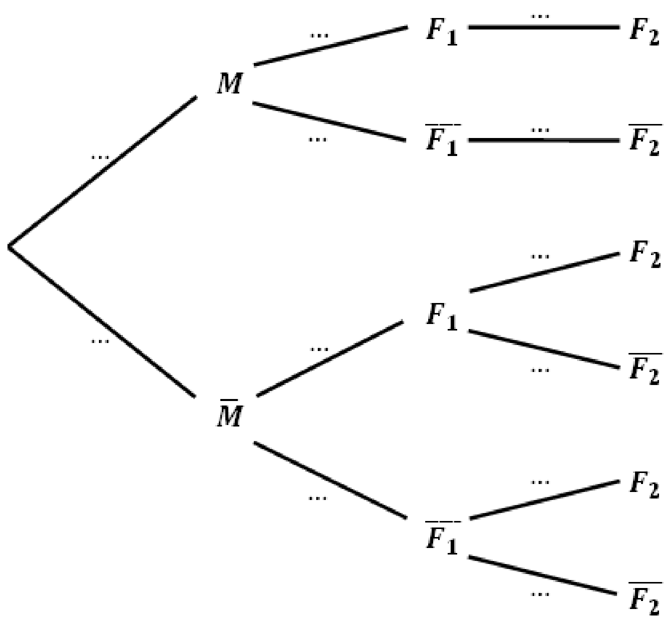
3) Dans cette maternité, on estime qu'un tiers des jumeaux sont des jumeaux monozygotes (appelés « vrais jumeaux » qui sont obligatoirement de même sexe : deux garçons ou deux filles) et donc deux-tiers des jumeaux sont des jumeaux dizygotes (appelés « faux jumeaux », qui peuvent être de sexes différents : deux garçons, deux filles ou un garçon et une fille).

Dans le cas de naissances doubles, on admet que, comme pour les naissances ordinaires, la probabilité d'être une fille à la naissance est égale à 0,49 et que celle d'être un garçon à la naissance est égale à 0,51. Dans le cas d'une naissance double de jumeaux dizygotes, on admet aussi que le sexe du second nouveau-né des jumeaux est indépendant du sexe du premier nouveau-né. On choisit au hasard un accouchement double réalisé dans cette maternité et on considère les évènements suivants :

- M : « les jumeaux sont monozygotes » ;
- F_1 : « le premier nouveau-né est une fille » ;
- F_2 : « le second nouveau-né est une fille ».

On notera $P(A)$ la probabilité de l'évènement A et $\bar{A}$ l'évènement contraire de A.

a. Recopier puis compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



b. Montrer que la probabilité que les deux nouveau-nés soient des filles est 0,3234.

c. Les deux nouveau-nés sont des jumelles. Calculer la probabilité qu'elles soient monozygotes.

Terminale ➡ Contrôle n° 7 ➡ Bac Blanc

Spécialité Mathématiques

Correction du sujet

Correction de l'exercice 1. (5 points)

PARTIE A : Étude d'une fonction auxiliaire g

Soit g la fonction définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, telle que pour tout $x>0$,

$$g(x)=4x-2x\ln(x)-4.$$

On note g' la fonction dérivée de g sur $]0;+\infty[$. On admet que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)=-4$.

1) Calculer $g(1)$ et $g(e)$.
2) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ en justifiant votre démarche.
3) **a.** Montrer que, pour tout $x>0$, $g'(x)=2-2\ln(x)$.
b. En déduire le tableau de variations de g sur $]0;+\infty[$.
4) **a.** Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet exactement deux solutions distinctes sur $]0;+\infty[$: 1 et α avec α appartenant à l'intervalle $[e\,;+\infty[$.
b. En justifiant, donner l'arrondi de α à 10^{-2} près.
5) En déduire le tableau de signes de g sur $]0;+\infty[$.

PARTIE B : Étude de la fonction f

Soit f la fonction, définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, telle que pour tout $x>0$,

$$f(x)=6x-2x\ln(x)-4\ln(x).$$

On note f' la fonction dérivée de f sur $]0;+\infty[$.
La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de cette fonction f est donnée dans le repère ci-dessous.
On admet que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

1) Déterminer la limite de f en 0 en justifiant votre démarche. Interpréter graphiquement le résultat.
2) **a.** Justifier que pour tout $x>0$,

$$f'(x)=\frac{g(x)}{x}.$$

b. En déduire le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$. *On ne calculera pas $f(\alpha)$.*
3) On admet que, sur $]0;+\infty[$, f est deux fois dérivable et que pour tout $x>0$,

$$f''(x)=\frac{4-2x}{x^2}$$

a. Étudier la convexité de f sur $]0;+\infty[$.
b. La courbe de la fonction f admet-elle un ou des points d'inflexion sur $]0;+\infty[$? Si oui, en préciser les coordonnées.

Exercice 1.	**A.1.**	$g(1)=4-2\ln(1)-4=0$ $g(e)=4e-2e\ln(e)-4=4e-2e-4=2e-4$
	A.2.	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 4x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} -2x\ln(x)-4=-\infty\end{array}\right\}$ il y a FI par somme $\forall x\in\,]0;+\infty[,\qquad g(x)=x\left(4-2\ln(x)-\frac{4}{x}\right)$ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} 4-2\ln(x)-\frac{4}{x}=-\infty\end{array}\right\}$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

A.3.a.

$\forall x \in]0;+\infty[, \qquad g'(x) = 4 - 2\ln(x) - 2x \times \dfrac{1}{x}$

$$g'(x) = 4 - 2\ln(x) - 2$$
$$g'(x) = 2 - 2\ln(x)$$

A.3.b.

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2 - 2\ln(x) > 0$$
$$\Leftrightarrow -2\ln(x) > -2$$
$$\Leftrightarrow \ln(x) < \frac{-2}{-2}$$
$$\Leftrightarrow \ln(x) < 1$$
$$\Leftrightarrow x < e^1$$
$$\Leftrightarrow x < e$$

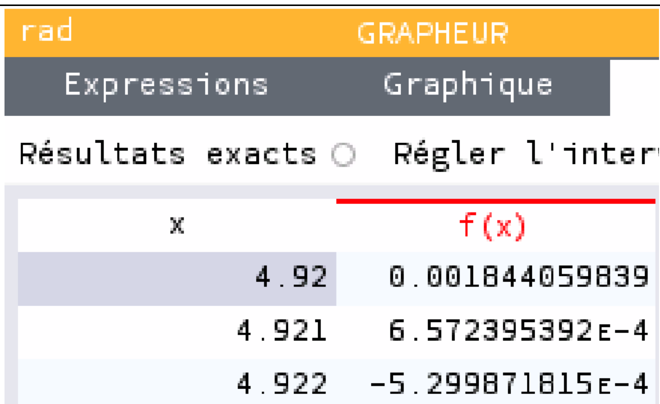
x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	-4	$\nearrow$	$2e-4$	$\searrow$	$-\infty$

A.4.a.

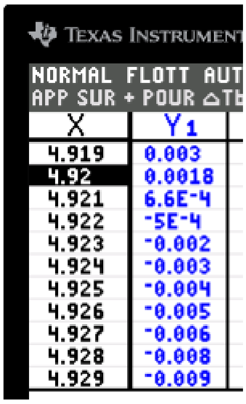
$g(1) = 4 - 2\ln(1) - 4 = 0$
et la fonction g est strictement croissante sur $]0;e]$ donc $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0;e]$ qui est le nombre 1.

$g(e) = 2e - 4 \approx 1{,}4 > 0$
$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty < 0$
de plus, la fonction g est continue car dérivable sur $[e\,;+\infty[$ et elle y est strictement décroissante. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, j'en déduis que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[e\,;+\infty[$ que l'on notera α.

A.4.b.



x	f(x)
4.92	0.001844059839
4.921	6.572395392E-4
4.922	-5.299871815E-4



X	Y1
4.919	0.003
4.92	0.0018
4.921	6.6E-4
4.922	-5E-4
4.923	-0.002
4.924	-0.003
4.925	-0.004
4.926	-0.005
4.927	-0.006
4.928	-0.008
4.929	-0.009

A l'aide de la calculatrice, on obtient :

$$g(4{,}921) \approx 6 \times 10^{-4} > 0$$
$$g(4{,}922) \approx -5 \times 10^{-4} < 0$$

donc $4{,}921 < \alpha < 4{,}922$ et donc $\alpha \approx 4{,}92$

A.5.

On en déduit que :

x	0		1		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

B.1.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to0^+} 6x = 0 \\ \lim\limits_{x\to0^+} -2x\ln(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to0^+} -4\ln(x) = +\infty \end{array}\right\} \text{donc, par somme,} \quad \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$$

La courbe admet donc une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

<table>
<tr><td></td><td>B.2.a.</td><td>

$$\forall x \in]0;+\infty[, \qquad f'(x) = 6 - 2\ln(x) - 2x \times \frac{1}{x} - 4 \times \frac{1}{x}$$
$$f'(x) = 6 - 2\ln(x) - 2 - \frac{4}{x}$$
$$f'(x) = \frac{4x - 2x\ln(x) - 4}{x} = \frac{g(x)}{x}$$

</td></tr>
<tr><td></td><td>B.2.b.</td><td>

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{g(x)}{x} > 0$$
$$\Leftrightarrow g(x) > 0 \text{ car } x > 0$$

$$\begin{array}{|c|ccccccccc|}
\hline
x & 0 & & 1 & & \alpha & & +\infty \\
\hline
g(x) & & - & 0 & + & 0 & - & \\
\hline
f'(x) & & - & 0 & + & 0 & - & \\
\hline
f(x) & +\infty & \searrow & 6 & \nearrow & f(\alpha) & \searrow & -\infty \\
\hline
\end{array}$$

</td></tr>
<tr><td></td><td>B.3.a.</td><td>

$$\forall x \in]0;+\infty[, \qquad f''(x) = \frac{4-2x}{x^2}$$
$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{4-2x}{x^2} > 0$$
$$\Leftrightarrow 4 - 2x > 0 \text{ car } x^2 > 0$$
$$\Leftrightarrow -2x > -4$$
$$\Leftrightarrow x < \frac{-4}{-2}$$
$$\Leftrightarrow x < 2$$

On en déduit que la courbe de f est convexe sur $]0;2[$, puis concave sur $]2;+\infty[$.

</td></tr>
<tr><td></td><td>B.3.b.</td><td>

La courbe de f admet donc un point d'inflexion en 2. Les coordonnées du point d'inflexion sont $(2; f(2))$ soit $(2; 12 - 8\ln(2))$.

</td></tr>
</table>

Correction de l'exercice 2. (5 points)

Des biologistes étudient l'évolution d'une population d'oiseaux dans un parc national.
Au début de l'étude la population est de 100 000 oiseaux.
Pour préserver l'équilibre du milieu naturel, le nombre d'oiseaux ne doit pas dépasser 300 000.

Partie A : Étude d'un premier modèle en laboratoire

L'observation de l'évolution de ces populations d'oiseaux en captivité, en l'absence de tout prédateur, montre que le nombre moyen d'oiseaux augmente de 40% chaque année.
En tenant compte de cette observation, les biologistes modélisent l'évolution de la population d'oiseaux à l'aide de la suite (U_n) où, pour tout entier naturel n, U_n modélise le nombre d'oiseaux exprimé en millions, au bout de n années.
On a donc $U_0 = 0{,}1$.

1) Justifier que pour tout entier naturel n, $U_n = 0{,}1 \times 1{,}4^n$.
2) Déterminer le sens de variations de cette suite (U_n).
3) En résolvant une inéquation, déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel $U_n > 0{,}3$.
4) Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel serait-il préservé ? Justifier la réponse.

Partie B : Étude d'un second modèle

En tenant compte des contraintes du milieu naturel dans lequel évoluent les oiseaux, les biologistes choisissent une nouvelle modélisation.
Ils modélisent le nombre d'oiseaux à l'aide de la suite (V_n), définie par :

$V_0 = 0{,}1$ et pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = 1{,}4\, V_n - 1{,}4\, V_n^2$.

où, pour tout entier n, V_n est le nombre d'oiseaux, exprimé en millions, au bout de n années.

1) Déterminer le nombre d'oiseaux au bout d'une année.

2) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ par $f(x) = 1{,}4x - 1{,}4x^2$.

a. Résoudre dans $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ l'équation $f(x) = x$.

b. Montrer que f est croissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

3) **a.** Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $0 \leq V_n \leq V_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

b. Montrer que la suite (V_n) est convergente.

On note ℓ la valeur de la limite de la suite (V_n). On admet que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

c. Déterminer la valeur de ℓ.

d. Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel sera-t-il préservé ? Justifier la réponse.

4) On donne ci-dessous la fonction seuil, écrite en langage Python.

```
def seuil(A):
    V=0.1
    n=0
    while V<A:
        V=1.4*V-1.4*V**2
        n=n+1
    return n
```

a. Qu'observe-t-on si on saisit `seuil(0.3)` ?

b. Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de `seuil(0.27)` ?

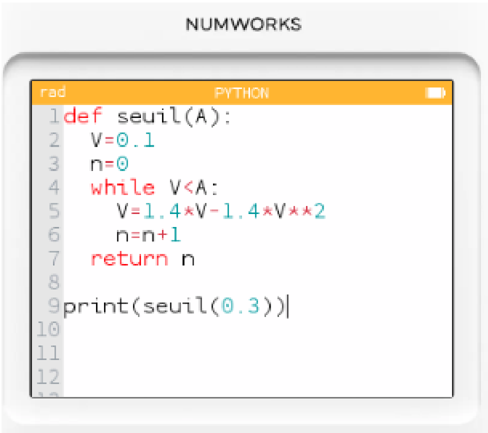
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

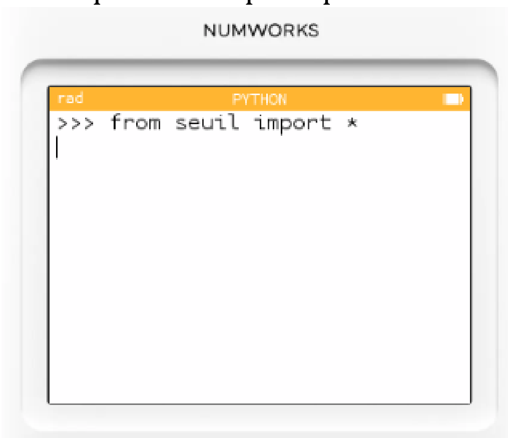
<table>
<tr>
<td rowspan="3">Exercice 2.</td>
<td>A.1.</td>
<td colspan="2">Le nombre d'oiseau augmente de 40% chaque année, il est donc multiplié par 1,4 chaque année. La suite (U_n) est donc géométrique de raison 1,4 et de 1er terme 0,1.
Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 0{,}1 \times 1{,}4^n$.</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">A.2.</td>
<td>Méthode n°1 :
$U_0 = 0{,}1 > 0$
A chaque rang, le terme est multiplié par $1{,}4 > 1$ pour obtenir le rang suivant. La suite (U_n) est donc croissante.</td>
<td>Méthode n°2 :
$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 0{,}1 \times 1{,}4^n > 0$ (suite strictement positive)
$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{0{,}1 \times 1{,}4^{n+1}}{0{,}1 \times 1{,}4^n} = \frac{1{,}4}{1} = 1{,}4 > 1$$
La suite (U_n) est donc croissante.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Méthode n°3 :
$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - U_n &= 0{,}1 \times 1{,}4^{n+1} - 0{,}1 \times 1{,}4^n \\ &= 0{,}1 \times 1{,}4^n(1{,}4 - 1) \\ &= 0{,}04 \times 1{,}4^n \\ U_{n+1} - U_n &> 0\end{aligned}$$
La suite (U_n) est donc croissante.</td>
</tr>
</table>

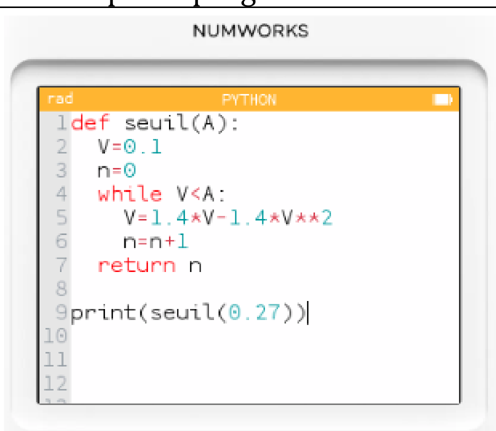
	A.3.	$$U_n > 0{,}3$$ $$\Leftrightarrow 0{,}1 \times 1{,}4^n > 0{,}3$$ $$\Leftrightarrow 1{,}4^n > 3$$ $$\Leftrightarrow \ln(1{,}4^n) > \ln(3)$$ $$\Leftrightarrow n \ \ln(1{,}4) > \ln(3)$$ $$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(3)}{\ln(1{,}4)} \quad \text{car} \quad \ln(1{,}4) > 0$$ $$\text{donc } \ n > 3{,}265$$ J'en déduis que le plus petit entier n vérifiant $U_n > 0{,}3$ est $n = 4$.
	A.4.	Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel ne sera pas préservé car le nombre d'oiseaux dépassera 300 000 au bout de 11 années.
	B.1.	$$V_0 = 0{,}1$$ $V_1 = 1{,}4\, V_0 - 1{,}4\, V_0^2 = 1{,}4 \times 0{,}1 - 1{,}4 \times 0{,}1^2 = 0{,}126.$ Au bout d'une année, avec ce modèle, il y aura 126 000 oiseaux.
	B.2.a.	$$f(x) = x$$ $$\Leftrightarrow 1{,}4x - 1{,}4x^2 = x$$ $$\Leftrightarrow 0{,}4x - 1{,}4x^2 = 0$$ $$\Leftrightarrow x(0{,}4 - 1{,}4x) = 0$$ $$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad 0{,}4 - 1{,}4x = 0$$ $$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad -1{,}4x = -0{,}4$$ $$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{-0{,}4}{-1{,}4} = \frac{2}{7}$$ Les solutions sont $\left\{0; \frac{2}{7}\right\}$.
	B.2.b.	$\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right], \ f(x) = 1{,}4x - 1{,}4x^2$ La fonction f est dérivable sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$. $\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right], \ f'(x) = 1{,}4 - 1{,}4 \times 2x$ $$f'(x) = 1{,}4 - 2{,}8x$$ $$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1{,}4 - 2{,}8x > 0$$ $$\Leftrightarrow -2{,}8x > -1{,}4$$ $$\Leftrightarrow x < \frac{-1{,}4}{-2{,}8}$$ $$\Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$ J'en déduis que, $\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, $f'(x) > 0$ et donc la fonction f est croissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.
	B.3.a.	Démontrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n) : \ 0 \leq V_n \leq V_{n+1} \leq \frac{1}{2}$ est vraie pour tout entier naturel n. **Initialisation : pour $n = 0$** $$V_0 = 0{,}1 \quad \text{et} \quad V_1 = 0{,}126$$ $$\text{donc } \ 0 \leq V_0 \leq V_1 \leq \frac{1}{2}$$ **Hérédité : Je suppose la propriété vraie au rang n** Je suppose que, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé arbitrairement, $0 \leq V_n \leq V_{n+1} \leq \frac{1}{2}$ La fonction $x \longmapsto f(x)$ est croissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ $$\text{On a donc } f(0) \leq f(V_n) \leq f(V_{n+1}) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$$ De plus, $V_{n+1} = f(V_n), \quad V_{n+2} = f(V_{n+1}), \quad f(0) = 0$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1{,}4}{2} - \frac{1{,}4}{4} = 0{,}35$

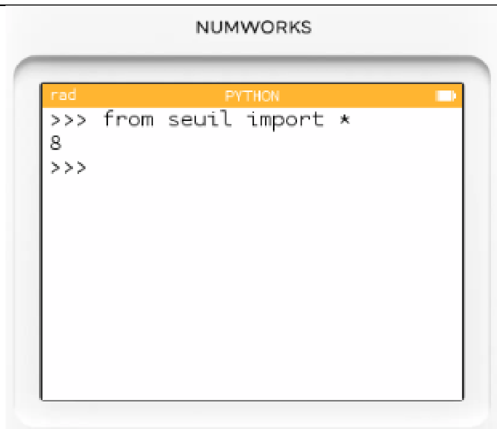
<table>
<tr><td></td><td>B.3.a.</td><td>Par conséquent $0 \leq V_{n+1} \leq V_{n+2} \leq 0{,}35 \leq \frac{1}{2}$
La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

J'en déduis que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie, pour tout entier n
$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N},\ \ 0 \leq V_n \leq V_{n+1} \leq \frac{1}{2}$$</td></tr>
<tr><td></td><td>B.3.b.</td><td>$\forall n \in \mathbb{N},\ \ V_n \leq V_{n+1}$ la suite (V_n) est donc croissante.
$\forall n \in \mathbb{N},\ \ V_n \leq \dfrac{1}{2}$ la suite (V_n) est donc majorée par $\dfrac{1}{2}$.
La suite (V_n) est donc convergente.</td></tr>
<tr><td></td><td>B.3.c.</td><td>On note ℓ la valeur de la limite de la suite (V_n).
La fonction f étant continue, ℓ est alors solution de l'équation $f(x) = x$ qui admet pour solutions 0 et $\frac{2}{7}$.

Or, la suite (V_n) est croissante et $V_0 = 0{,}1$ donc $\ell = \dfrac{2}{7}$.</td></tr>
<tr><td></td><td>B.3.d.</td><td>Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel sera préservé car le nombre d'oiseaux va tendre en augmentant vers 285 714 individus.</td></tr>
<tr><td></td><td>B.4.a.</td><td>Si on saisit <code>seuil(0.3)</code> alors la calculatrice se bloque et ne répond pas.




La condition « $V < 0.3$ » est toujours <code>Vraie</code> donc la boucle <code>While</code> ne se termine jamais.
Il faut interrompre le programme.</td></tr>
<tr><td></td><td>B.4.b.</td><td>

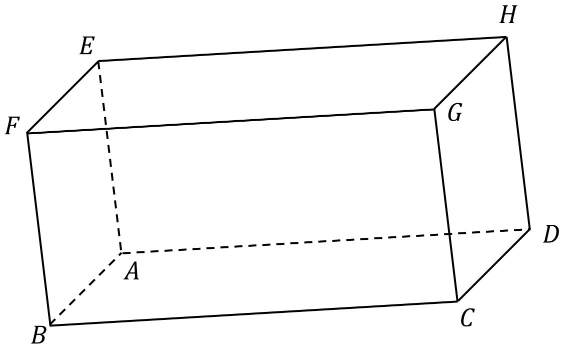


La valeur renvoyée par la saisie de <code>seuil(0.27)</code> est 8.
Selon ce modèle, le nombre d'oiseaux dépassera le nombre de 270 000 au bout de 8 années.</td></tr>
</table>

Correction de l'exercice 3. (5 points)

On considère un pavé droit $ABCDEFGH$ tel que : $AB = 1$, $AD = 2$ et $AE = 1$.
I est le milieu de $[AD]$, le point J vérifie $\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{AI}$ et le point K vérifie $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DF}$.

L'espace est muni du repère orthonormé $(\boldsymbol{A}; \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}; \overrightarrow{\boldsymbol{AI}}; \overrightarrow{\boldsymbol{AE}})$.



1) **a.** Démontrer que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$

b. Donner, dans le repère choisi, les coordonnées des points C, E, G, I, J et K.

2) **a.** Déterminer deux réels α et β tels que $\overrightarrow{EJ} = \alpha\overrightarrow{EI} + \beta\overrightarrow{EK}$.

b. Que peut-on en déduire ?

3) **a.** Les points I, K et G sont-ils alignés ? Justifier votre réponse.

b. Les droites (DK) et (AG) sont-elles sécantes ? Justifier votre réponse.

4) Déterminer l'intersection des plans (IJK) et (EFG).

5) On considère la droite (d) dont on donne la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5t + 7 \\ z = -t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

a. Le point G appartient-il à la droite (d) ? Justifier.

b. Les droites (d) et (JK) sont-elles parallèles ?

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d') parallèle à (IJ) passant par K.

d. Déterminer les coordonnées du point L intersection des droites (d) et (d').

<table>
<tr><td rowspan="2">Exercice 3.</td><td>1.a.</td><td>$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK}$
$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DF}$
$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BF})$
$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$
$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$
$\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$
$\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3} \times 2\overrightarrow{AI} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$
$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$</td></tr>
<tr><td>1.b.</td><td>$C(1; 2; 0)$ $E(0; 0; 1)$ $G(1; 2; 1)$ $I(0; 1; 0)$ $J(1; 3; 0)$ $K\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>2.a.</td><td>

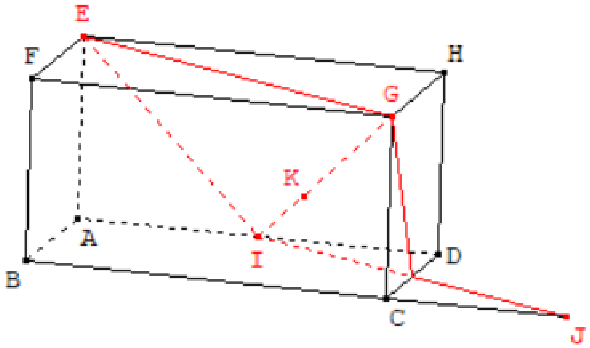
$$\overrightarrow{EJ}\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{EI}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{EK}\begin{pmatrix}1/3\\4/3\\-2/3\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{EJ} = \alpha\overrightarrow{EI} + \beta\overrightarrow{EK}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 1 = 0 \times \alpha + \frac{1}{3}\beta \\ 3 = 1 \times \alpha + \frac{4}{3}\beta \\ -1 = -1 \times \alpha - \frac{2}{3}\beta \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \beta = 3 \\ 3 = \alpha + 4 \\ -1 = -\alpha - 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \beta = 3 \\ \alpha = 3 - 4 \\ \alpha = -2 + 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \beta = 3 \\ \alpha = -1 \end{array}\right.$$

J'en déduis que $\overrightarrow{EJ} = -\overrightarrow{EI} + 3\overrightarrow{EK}$
</td></tr>
<tr><td></td><td>2.b.</td><td>

J'en déduis que les vecteurs $\overrightarrow{EJ}$, $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{EK}$ sont coplanaires et donc que les points E, J, I et K sont coplanaires. **Cela signifie que le point E appartient au plan (IJK).**



</td></tr>
<tr><td></td><td>3.a.</td><td>

$$\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}1/3\\1/3\\1/3\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{IG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{IG} = 3\,\overrightarrow{IK}$$

Par conséquent, les points I, K et G sont alignés.
Cela signifie que le point G appartient à la droite (IK).
</td></tr>
</table>

3.b.

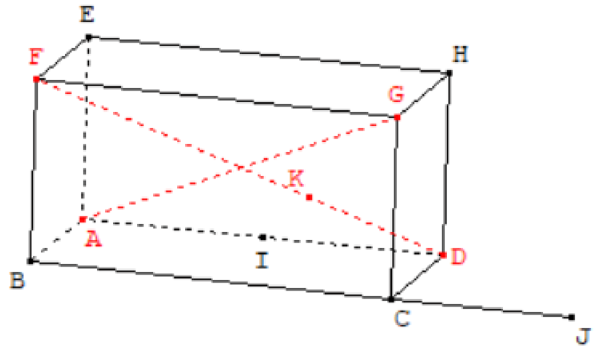
$D(0;2;0)$ et $\overrightarrow{DK}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ donc une équation paramétrique est $\begin{cases} x=\frac{1}{3}t \\ y=2-\frac{2}{3}t \\ z=\frac{1}{3}t \end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$

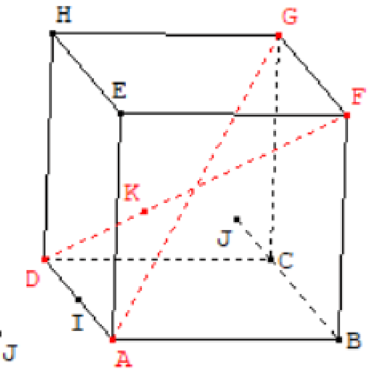
$A(0;0;0)$ et $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ donc une équation paramétrique est $\begin{cases} x=t' \\ y=2t' \\ z=t' \end{cases}$ où $t'\in\mathbb{R}$

Résolvons le système :

$$\begin{cases} t'=\frac{1}{3}t \\ 2t'=2-\frac{2}{3}t \\ t'=\frac{1}{3}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=3t' \\ 2t'=2-\frac{2}{3}\times 3t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=3t' \\ 2t'=2-2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=3t' \\ 4t'=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t'=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \\ t=\frac{3}{2} \end{cases}$$

Les droites (DK) et (AG) sont donc sécantes au point $\left(\frac{1}{2};1;\frac{1}{2}\right)$.

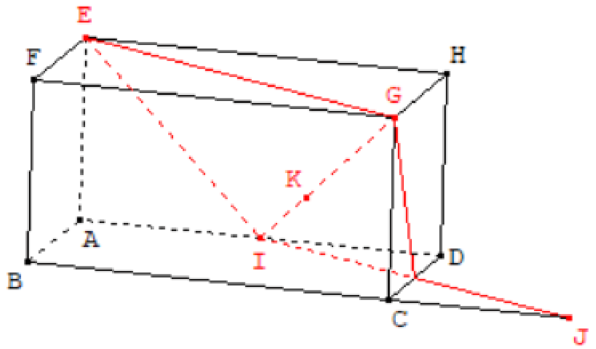




2e méthode : $K\in(DF)$ donc les droites (DF) et (DK) sont confondues.
Les droites (DF) et (AG) sont les diagonales du rectangle $AFGD$. Elles se coupent dont au centre du rectangle $AFGD$.

4.

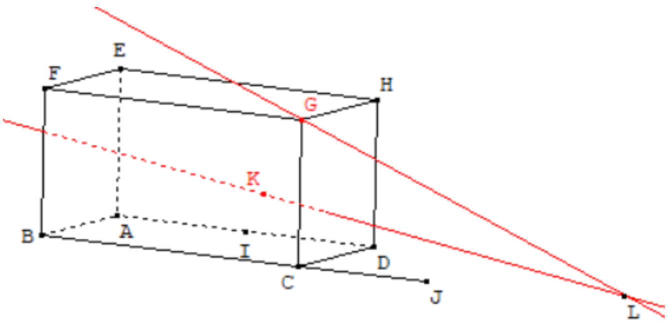
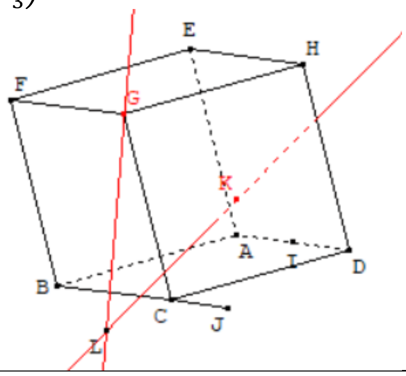
L'intersection de deux plans est une droite.
D'après la question 2b. le point E appartient au plan (IJK)
D'après la question 3a. le point G appartient à la droite (IK) donc il appartient au plan (IJK).
L'intersection des plans (IJK) et (EFG) est donc la droite (EG).



5.a.

$$(d)\begin{cases} x=3+2t \\ y=5t+7 \\ z=-t \end{cases} \text{ où } t\in\mathbb{R}$$

$$\text{Pour } t=-1,\ \begin{cases} x=3-2=1 \\ y=-5+7=2 \\ z=-(-1)=1 \end{cases} \text{ donc } G\in(d)$$

	5.b.	Un vecteur directeur de la droite (d) est $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix}-2/3\\-5/3\\1/3\end{pmatrix}$ donc $\vec{u}=-3\,\overrightarrow{JK}$ J'en déduis que les droites (d) et (JK) sont parallèles.
	5.c.	$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $K\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$ donc une équation paramétrique de (d') est $\begin{cases} x=\frac{1}{3}+t \\ y=\frac{4}{3}+2t \\ z=\frac{1}{3}\end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$
	5.d.	$(d)\begin{cases}x=3+2t\\y=5t+7\\z=-t\end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$ et $(d')\begin{cases}x=\frac{1}{3}+t'\\y=\frac{4}{3}+2t'\\z=\frac{1}{3}\end{cases}$ où $t'\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}3+2t=\frac{1}{3}+t'\\5t+7=\frac{4}{3}+2t'\\-t=\frac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\frac{-1}{3}\\3-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+t'\\-\frac{5}{3}+7=\frac{4}{3}+2t'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\frac{-1}{3}\\t'=2\end{cases}$ Les droites (d) et (d') sont sécantes au point $L\left(\frac{7}{3};\frac{16}{3};\frac{1}{3}\right)$  

Correction de l'exercice 4. (5 points)

Entre 2010 et 2022, en France, 10 111 028 accouchements ont été recensés, parmi lesquels 169 359 ont donné naissance à des jumeaux et 2 558 ont donné naissance à au moins trois enfants.

1) **a.** Avec une précision de 0,1 %, calculer parmi tous les accouchements recensés, le pourcentage d'accouchements donnant naissance **à un seul enfant** sur la période 2010-2022.

b. Vérifier que le pourcentage d'accouchements qui ont donné naissance **à au moins trois enfants** est inférieur à 0,1 %. *On considérera, pour la suite, que ce pourcentage est négligeable.*

On appelle accouchement ordinaire, un accouchement donnant naissance à un seul enfant. On appelle accouchement double, un accouchement donnant naissance à exactement deux enfants.

On considère dans la suite de l'exercice qu'un accouchement est soit ordinaire, soit double. La probabilité d'un accouchement ordinaire est égale à 0,983 et celle d'un accouchement double est alors égale à 0,017. *Les probabilités calculées dans la suite seront arrondies au millième.*

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on admet qu'un jour donné dans une maternité, on réalise n accouchements. On considère que ces n accouchements sont indépendants les uns des autres. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'accouchements doubles pratiqués ce jour.

a. Dans le cas où $n = 20$, préciser la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X et calculer la probabilité qu'on réalise exactement un accouchement double.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, par la méthode de votre choix que vous expliciterez, déterminer la plus petite valeur de n telle que $P(X \geq 1) \geq 0{,}99$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

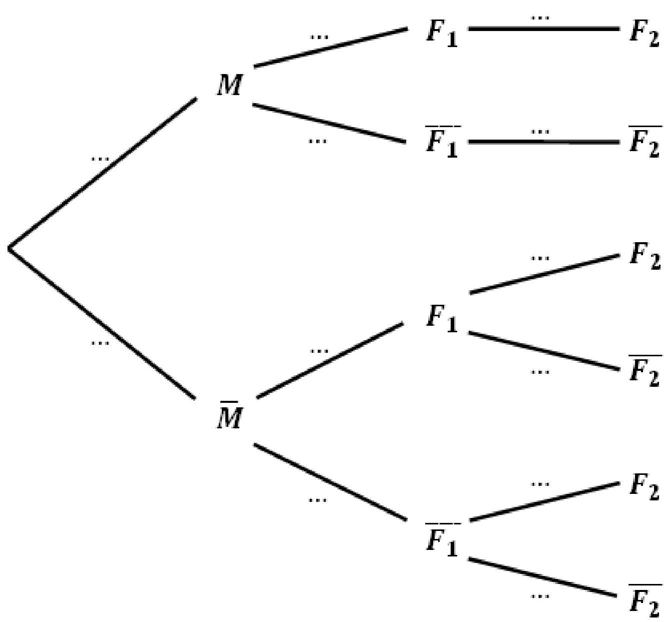
3) Dans cette maternité, on estime qu'un tiers des jumeaux sont des jumeaux monozygotes (appelés « vrais jumeaux » qui sont obligatoirement de même sexe : deux garçons ou deux filles) et donc deux-tiers des jumeaux sont des jumeaux dizygotes (appelés « faux jumeaux », qui peuvent être de sexes différents : deux garçons, deux filles ou un garçon et une fille).

Dans le cas de naissances doubles, on admet que, comme pour les naissances ordinaires, la probabilité d'être une fille à la naissance est égale à 0,49 et que celle d'être un garçon à la naissance est égale à 0,51. Dans le cas d'une naissance double de jumeaux dizygotes, on admet aussi que le sexe du second nouveau-né des jumeaux est indépendant du sexe du premier nouveau-né. On choisit au hasard un accouchement double réalisé dans cette maternité et on considère les évènements suivants :

- M : « les jumeaux sont monozygotes » ;
- F_1 : « le premier nouveau-né est une fille » ;
- F_2 : « le second nouveau-né est une fille ».

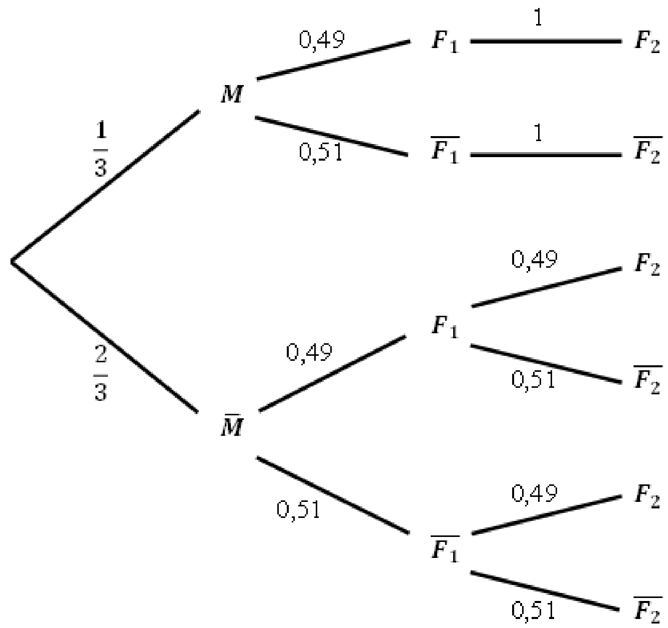
On notera $P(A)$ la probabilité de l'évènement A et $\bar{A}$ l'évènement contraire de A.

a. Recopier puis compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



b. Montrer que la probabilité que les deux nouveau-nés soient des filles est 0,3234.

c. Les deux nouveau-nés sont des jumelles. Calculer la probabilité qu'elles soient monozygotes.

<table>
<tr><td rowspan="7">Exercice 4.</td><td>1.a.</td><td>Parmi tous les accouchements recensés, la proportion d'accouchements donnant naissance à un seul enfant sur la période 2010-2022 est
$$\frac{10\,111\,028 - 169\,359 - 2\,558}{10\,111\,028} = \frac{9\,939\,111}{10\,111\,028} \approx 0.983 \text{ soit } 98{,}3\%$$</td></tr>
<tr><td>1.b.</td><td>La proportion d'accouchements qui ont donné naissance à au moins trois enfants est
$$\frac{2\,558}{10\,111\,028} \approx 2 \times 10^{-4} \text{ soit } 0{,}03\%$$
Ce pourcentage est bien inférieur à 0,1 %.</td></tr>
<tr><td>2.a.</td><td>Un accouchement est soit ordinaire, soit double et la probabilité qu'un accouchement soit double est égale à 0,017.
On répète 20 fois, de façon identique et indépendante, l'alternative où la probabilité qu'un accouchement soit double est 0,017. La variable aléatoire X qui compte le nombre d'accouchements doubles pratiqués ce jour, suit alors une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}017$.
$$P(X = 1) = 20 \times 0{,}017 \times 0{,}983^{19} \approx 0{,}245$$</td></tr>
<tr><td>2.b.</td><td>Pour $n \in \mathbb{N}^*$, X suit alors une loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}017$.
$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}983^n$$
$$1 - 0{,}983^n \geq 0{,}99$$
$$\Leftrightarrow -0{,}983^n \geq 0{,}99 - 1$$
$$\Leftrightarrow -0{,}983^n \geq -0{,}01$$
$$\Leftrightarrow 0{,}983^n \leq 0{,}01$$
$$\Leftrightarrow \ln(0{,}983^n) \leq \ln(0{,}01)$$
$$\Leftrightarrow n \times \ln(0{,}983) \leq \ln(0{,}01)$$
$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}983)} \quad \text{car} \quad \ln(0{,}983) < 0$$
$$\Leftrightarrow n \geq 268{,}6$$
A partir de 269 accouchements par jour, la probabilité d'avoir au moins un accouchement double est supérieure à 99%.</td></tr>
<tr><td>3.a.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>3.b.</td><td>La probabilité d'avoir deux filles vaut :
$$P(M \cap F_1 \cap F_2) + P(\overline{M} \cap F_1 \cap F_2) = \frac{1}{3} \times 0{,}49 + \frac{2}{3} \times 0{,}49^2 = 0{,}3234$$</td></tr>
</table>

	3.c.	Sachant que les deux nouveau-nés sont des jumelles, la probabilité qu'elles soient monozygotes vaut : $$\frac{P(M \cap F_1 \cap F_2)}{P(M \cap F_1 \cap F_2) + P(\overline{M} \cap F_1 \cap F_2)} = \frac{\frac{1}{3} \times 0{,}49}{0{,}3234} \approx 0{,}505$$