Vendredi 3 mai 2024

Terminale → Contrôle n° 8

Spécialité Mathématiques

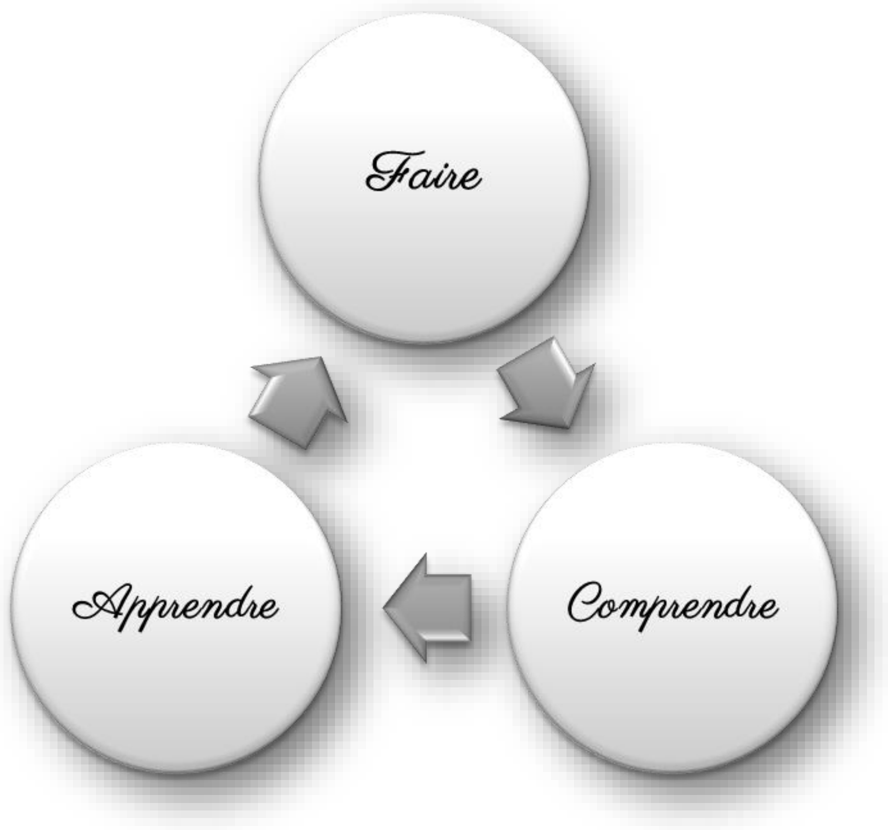


Table des matières

Enoncé du sujet A 2
Exercice 1. (6 points) 2
Exercice 2. (10 points) Pharmacocinétique 2
Exercice 3. (4 points) 2
Enoncé du sujet B 3
Exercice 1. (6 points) 3
Exercice 2. (10 points) Pharmacocinétique 3
Exercice 3. (4 points) 3
Correction du sujet A 4
Correction de l'exercice 1. (6 points) 4
Correction de l'exercice 2. (10 points) Pharmacocinétique 5
Correction de l'exercice 3. (4 points) 8
Correction du sujet B 10
Correction de l'exercice 1. (6 points) 10
Correction de l'exercice 2. (10 points) Pharmacocinétique 11
Correction de l'exercice 3. (4 points) 14

Terminale ➡ Contrôle n° 8

Spécialité Mathématiques

Enoncé du sujet A

Exercice 1. (6 points)

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur l'intervalle $]0;+\infty[$ vérifiant l'équation différentielle $\quad (E):\quad x\,f'(x) = (2x-1)\,f(x) + 6$.

▶ 1. Résoudre l'équation différentielle $(E'):\ \ y' = 2y + 6$.

▶ 2. On définit, sur l'intervalle $]0;+\infty[$, la fonction g par $g(x) = x \times f(x)$.

a) Exprimer g' en fonction de f'.

b) Démontrer que la fonction f est solution de (E) si, et seulement si la fonction g est solution de (E').

▶ 3. En déduire toutes les solutions de (E).

▶ 4. Déterminer la fonction f solution de (E) qui vérifie $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

Exercice 2. (10 points) Pharmacocinétique

On s'intéresse à une maladie dégénérative de l'œil qui occasionne des troubles de la vision. Afin de freiner son évolution, un traitement est possible. Dans cet exercice, on étudie l'évolution de la quantité des principes actifs
On s'intéresse à une maladie dégénérative de l'œil qui occasionne des troubles de la vision. Afin de freiner son évolution, un traitement est possible. Dans cet exercice, on étudie l'évolution de la quantité des principes actifs
présents dans le sang en fonction du temps.

Le traitement consiste à faire absorber au malade par voie orale un médicament qui libère peu à peu le principe actif qui passe dans le sang. Il est efficace lorsque la quantité de principe actif est supérieure ou égale à 5 mg. On admet qu'à l'instant $t = 0$ la quantité de principe actif présente dans le sang est de 1 mg.

▶ 1. Résolution d'une équation différentielle

L'évolution en fonction du temps (exprimé en heures), de la quantité de principe actif présente dans le sang après absorption (exprimée en mg) est modélisée par une fonction vérifiant l'équation différentielle :

$$\boldsymbol{(E)\quad y' + 0{,}1y = 2e^{-0{,}1t}}$$

où y est une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0;+\infty[$.

a. Déterminer les solutions sur $[0;+\infty[$ de l'équation $\boldsymbol{(E_0)} : \boldsymbol{y' + 0{,}1y = 0}$.

b. Soit h la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $h(t) = 2t\,e^{-0{,}1t}$.
Vérifier que h est une solution particulière de (E).

c. Démontrer que f est solution de (E) si, et seulement si $(f-h)$ est solution de (E_0).

d. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

e. Déterminer la solution f de (E) correspondant au problème posé.

▶ 2. Étude d'une fonction

Soit la fonction f définie pour tout t de l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(t) = (2t+1)\,e^{-0{,}1t}$.

a. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.

b. Etudier, en justifiant chaque étape, le tableau des variations de f sur $[0;+\infty[$.

c. Démontrer que l'équation $f(t) = 5$ admet exactement deux solutions sur $[0;+\infty[$ et en donner une valeur approchée au dixième.

▶ 3. Application

a. Au bout de combien de temps la quantité de principe actif dans le sang sera-t-elle maximale ?

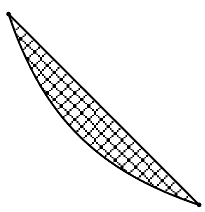
b. Sur quel intervalle de temps le médicament sera-t-il efficace ?

c. En intégrant par parties, démontrer que $I = \int_0^{24} (2t+1)\,e^{-0{,}1t}dt = 210 - 690\,e^{-2{,}4}$. En déduire la quantité moyenne de principe actif présente dans le sang entre 0 et 24 h. On arrondira le résultat au dixième.

Exercice 3. (4 points)

Soient f et g deux fonctions définies sur $]0;+\infty[$ par $\ f(x) = 4 - x\quad$ et $\quad g(x) = \frac{3}{x}$.

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives respectivement des fonctions f et g dans un repère orthogonal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.



▶ 1. Résoudre $f(x) > g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

▶ 2. Calculer une valeur exacte de l'aire qui sépare les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Terminale ➡ Contrôle n° 8

Spécialité Mathématiques

Enoncé du sujet B

Exercice 1. (6 points)

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur l'intervalle $]0;+\infty[$ vérifiant l'équation différentielle $\quad (E): \quad x\,f'(x) = (3x-1)\,f(x) + 9$.

▶ 1. Résoudre l'équation différentielle (E') : $\; y' = 3y + 9$.

▶ 2. On définit, sur l'intervalle $]0;+\infty[$, la fonction h par $h(x) = x \times f(x)$.

a) Exprimer h' en fonction de f'.

b) Démontrer que la fonction f est solution de (E) si, et seulement si la fonction h est solution de (E').

▶ 3. En déduire toutes les solutions de (E).

▶ 4. Déterminer la fonction f solution de (E) qui vérifie $f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$.

Exercice 2. (10 points) Pharmacocinétique

On s'intéresse à une maladie dégénérative de l'œil qui occasionne des troubles de la vision. Afin de freiner son évolution, un traitement est possible. Dans cet exercice, on étudie l'évolution de la quantité des principes actifs On s'intéresse à une maladie dégénérative de l'œil qui occasionne des troubles de la vision. Afin de freiner son évolution, un traitement est possible. Dans cet exercice, on étudie l'évolution de la quantité des principes actifs présents dans le sang en fonction du temps.

Le traitement consiste à faire absorber au malade par voie orale un médicament qui libère peu à peu le principe actif qui passe dans le sang. Il est efficace lorsque la quantité de principe actif est supérieure ou égale à 5 mg. On admet qu'à l'instant $t = 0$ la quantité de principe actif présente dans le sang est de 1 mg.

▶ 1. Résolution d'une équation différentielle

L'évolution en fonction du temps (exprimé en heures), de la quantité de principe actif présente dans le sang après absorption (exprimée en mg) est modélisée par une fonction vérifiant l'équation différentielle :

$$\boldsymbol{(E)\quad y' + 0,1y = 2e^{-0,1t}}$$

où y est une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0;+\infty[$.

a. Déterminer les solutions sur $[0;+\infty[$ de l'équation $\boldsymbol{(E_0)} : \boldsymbol{y' + 0,1y = 0}$.

b. Soit h la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $h(t) = 2t\,e^{-0,1t}$.
Vérifier que h est une solution particulière de (E).

c. Démontrer que f est solution de (E) si, et seulement si $(f-h)$ est solution de (E_0).

d. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

e. Déterminer la solution f de (E) correspondant au problème posé.

▶ 2. Étude d'une fonction

Soit la fonction f définie pour tout t de l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(t) = (2t+1)\,e^{-0,1t}$.

a. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.

b. Etudier, en justifiant chaque étape, le tableau des variations de f sur $[0;+\infty[$.

c. Démontrer que l'équation $f(t) = 5$ admet exactement deux solutions sur $[0;+\infty[$ et en donner une valeur approchée au dixième.

▶ 3. Application

a. Au bout de combien de temps la quantité de principe actif dans le sang sera-t-elle maximale ?

b. Sur quel intervalle de temps le médicament sera-t-il efficace ?

c. En intégrant par parties, démontrer que $I = \int_0^{24}(2t+1)\,e^{-0,1t}dt = 210 - 690\,e^{-2,4}$. En déduire la quantité moyenne de principe actif présente dans le sang entre 0 et 24 h. On arrondira le résultat au dixième.

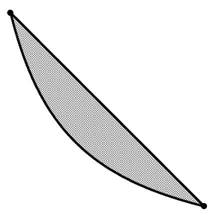
Exercice 3. (4 points)

Soient f et g deux fonctions définies sur $]0;+\infty[$ par $\; f(x) = 5 - x \quad$ et $\quad g(x) = \frac{4}{x}$.

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives respectivement des fonctions f et g dans un repère orthogonal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

▶ 1. Résoudre $f(x) > g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

▶ 2. Calculer une valeur exacte de l'aire qui sépare les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.



Terminale ➡ Contrôle n° 8
Spécialité Mathématiques
Correction du sujet A

Correction de l'exercice 1. (6 points)

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur l'intervalle $]0;+\infty[$ vérifiant l'équation différentielle (E) : $x\,f'(x) = (2x-1)\,f(x) + 6$.

▶1. Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' = 2y + 6$.

▶2. On définit, sur l'intervalle $]0;+\infty[$, la fonction g par $g(x) = x \times f(x)$.

a) Exprimer g' en fonction de f'.

b) Démontrer que la fonction f est solution de (E) si, et seulement si la fonction g est solution de (E').

▶3. En déduire toutes les solutions de (E).

▶4. Déterminer la fonction f solution de (E) qui vérifie $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

<table>
<tr><td rowspan="4">Exercice 1.</td><td>1.</td><td>L'équation différentielle (E') : $y' = 2y + 6$ admet pour solution les fonctions
$\forall x \in]0;+\infty[,\ \ y(x) = C\,e^{2x} - \frac{6}{2} = C\,e^{2x} - 3$ où $C \in \mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>2a.</td><td>$\forall x \in]0;+\infty[,\ \ g(x) = x \times f(x)$
$g'(x) = 1 \times f(x) + x \times f'(x) = f(x) + xf'(x)$</td></tr>
<tr><td>2b.</td><td>Condition nécessaire : Je suppose que f est solution de (E)
donc, $\forall x \in]0;+\infty[,\ \ x\,f'(x) = (2x-1)\,f(x) + 6$

or $g'(x) = f(x) + xf'(x)$
$g'(x) = f(x) + (2x-1)\,f(x) + 6$
$g'(x) = (2x-1+1)\,f(x) + 6$
$g'(x) = 2\,xf(x) + 6$
$g'(x) = 2\,g(x) + 6$
donc g est solution de (E')

Condition suffisante : Je suppose que g est solution de (E')
donc, $\forall x \in]0;+\infty[,\ \ g'(x) = 2\,g(x) + 6$

or $g'(x) = f(x) + xf'(x)$
$f(x) + xf'(x) = 2xf(x) + 6$
$\Leftrightarrow xf'(x) = 2xf(x) + 6 - f(x)$
$\Leftrightarrow xf'(x) = (2x-1)\,f(x) + 6$
donc f est solution de (E)</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Les solutions de (E') sont les fonctions :
$\forall x \in]0;+\infty[,\ \ g(x) = C\,e^{2x} - 3$ où $C \in \mathbb{R}$
Les fonctions f solution de (E) sont donc les fonctions qui vérifient
$\forall x \in]0;+\infty[,\ \ g(x) = x \times f(x) = C\,e^{2x} - 3$
$\Leftrightarrow f(x) = \dfrac{C\,e^{2x} - 3}{x}$</td></tr>
</table>

	4.	$f\left(\frac{1}{2}\right)=0=\dfrac{C\,e^{2\times\frac{1}{2}}-3}{\frac{1}{2}}=(C\,e^{1}-3)\times 2=0$ $\Leftrightarrow C\,e-3=0$ $\Leftrightarrow C=\frac{3}{e}$ $\forall x\in\,]0;+\infty[,\,f(x)=\dfrac{\frac{3}{e}\times e^{2x}-3}{x}=\dfrac{3\,e^{2x-1}-3}{x}$

Correction de l'exercice 2. (10 points) Pharmacocinétique

On s'intéresse à une maladie dégénérative de l'œil qui occasionne des troubles de la vision. Afin de freiner son évolution, un traitement est possible. Dans cet exercice, on étudie l'évolution de la quantité des principes actifs On s'intéresse à une maladie dégénérative de l'œil qui occasionne des troubles de la vision. Afin de freiner son évolution, un traitement est possible. Dans cet exercice, on étudie l'évolution de la quantité des principes actifs présents dans le sang en fonction du temps.

Le traitement consiste à faire absorber au malade par voie orale un médicament qui libère peu à peu le principe actif qui passe dans le sang. Il est efficace lorsque la quantité de principe actif est supérieure ou égale à 5 mg. On admet qu'à l'instant $t=0$ la quantité de principe actif présente dans le sang est de 1 mg.

▶1. Résolution d'une équation différentielle

L'évolution en fonction du temps (exprimé en heures), de la quantité de principe actif présente dans le sang après absorption (exprimée en mg) est modélisée par une fonction vérifiant l'équation différentielle :

$$(\boldsymbol{E})\quad \boldsymbol{y'+0,1y=2e^{-0,1t}}$$

où y est une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0;+\infty[$.

a. Déterminer les solutions sur $[0;+\infty[$ de l'équation $(\boldsymbol{E_0})$: $\boldsymbol{y'+0,1y=0}$.

b. Soit h la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $h(t)=2t\,e^{-0,1t}$.
Vérifier que h est une solution particulière de (E).

c. Démontrer que f est solution de (E) si, et seulement si $(f-h)$ est solution de (E_0).

d. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

e. Déterminer la solution f de (E) correspondant au problème posé.

▶2. Étude d'une fonction

Soit la fonction f définie pour tout t de l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(t)=(2t+1)\,e^{-0,1t}$.

a. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.

b. Etudier, en justifiant chaque étape, le tableau des variations de f sur $[0;+\infty[$.

c. Démontrer que l'équation $f(t)=5$ admet exactement deux solutions sur $[0;+\infty[$ et en donner une valeur approchée au dixième.

▶3. Application

a. Au bout de combien de temps la quantité de principe actif dans le sang sera-t-elle maximale ?

b. Sur quel intervalle de temps le médicament sera-t-il efficace ?

c. En intégrant par parties, démontrer que $I=\int_0^{24}(2t+1)\,e^{-0,1t}dt=210-690\,e^{-2,4}$. En déduire la quantité moyenne de principe actif présente dans le sang entre 0 et 24 h. On arrondira le résultat au dixième.

<table>
<tr><td rowspan="6">Exercice 2.</td><td>1a.</td><td>
$$(E_0) : y' + 0{,}1y = 0$$
$$\Leftrightarrow y' = -0{,}1y$$
Les solutions sont les fonctions définies par :
$\forall t \in [0;+\infty[,\ y(t) = C\,e^{-0{,}1\,t}$ où $C \in \mathbb{R}$
</td></tr>
<tr><td>1b.</td><td>
$\forall t \in [0;+\infty[, h(t) = 2t\,e^{-0{,}1t}$
h est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $h'(t) = 2\,e^{-0{,}1t} + 2t \times (-0{,}1\,e^{-0{,}1t})$
$h'(t) = 2\,e^{-0{,}1t} - 0{,}2t\,e^{-0{,}1t}$
$h'(t) = (2 - 0{,}2t\,)e^{-0{,}1t}$
Par conséquent
$h'(t) + 0{,}1h(t) = (2 - 0{,}2t\,)e^{-0{,}1t} + 0{,}1 \times 2t\,e^{-0{,}1t}$
$h'(t) + 0{,}1h(t) = (2 - 0{,}2t\,)e^{-0{,}1t} + 0{,}2t\,e^{-0{,}1t}$
$h'(t) + 0{,}1h(t) = (2 - 0{,}2t + 0{,}2t)e^{-0{,}1t}$
$h'(t) + 0{,}1h(t) = 2e^{-0{,}1t}$
donc h est une solution particulière de (E)
</td></tr>
<tr><td>1c.</td><td>
Condition nécessaire : Je suppose que f est solution de (E)
donc, $\forall t \in]0;+\infty[, \quad f'(t) + 0{,}1f(t) = 2e^{-0{,}1t}$
$$\text{or } h'(t) + 0{,}1h(t) = 2e^{-0{,}1t}$$
$$\text{donc } f'(t) + 0{,}1f(t) - \big(h'(t) + 0{,}1h(t)\big) = 2e^{-0{,}1t} - 2e^{-0{,}1t}$$
$$\Leftrightarrow f'(t) + 0{,}1f(t) - h'(t) - 0{,}1h(t) = 0$$
$$\Leftrightarrow f'(t) - h'(t) + 0{,}1\big(f(t) - h(t)\big) = 0$$
$$\Leftrightarrow (f - h)'(t) + 0{,}1(f - h)(t) = 0$$
donc $(f - h)$ est solution de (E_0)

Condition suffisante : Je suppose que $(f - h)$ est solution de (E_0)
donc, $\forall t \in]0;+\infty[, \quad (f - h)'(t) + 0{,}1(f - h)(t) = 0$
$$\Leftrightarrow f'(t) + 0{,}1f(t) - h'(t) - 0{,}1h(t) = 0$$
$$\Leftrightarrow f'(t) + 0{,}1f(t) = h'(t) + 0{,}1h(t)$$
$$\text{or } h'(t) + 0{,}1h(t) = 2e^{-0{,}1t}$$
$$\text{donc } f'(t) + 0{,}1f(t) = 2e^{-0{,}1t}$$
donc f est solution de (E)
</td></tr>
<tr><td>1d.</td><td>
On a alors, $\forall t \in]0;+\infty[, \quad (f - h)(t) = f(t) - h(t) = C\,e^{-0{,}1\,t}$
Par conséquent, les solutions de (E) sont les fonctions
$$f(t) = C\,e^{-0{,}1\,t} + h(t)$$
$$f(t) = C\,e^{-0{,}1\,t} + 2te^{-0{,}1t}$$
</td></tr>
<tr><td>1e.</td><td>
$$f(0) = 1$$
$$C\,e^{0} + 2 \times 0 = 1$$
$$\Leftrightarrow C = 1$$
$$\forall t \in]0;+\infty[, f(t) = 1 \times e^{-0{,}1\,t} + 2te^{-0{,}1t} = (2t + 1)\,e^{-0{,}1t}$$
</td></tr>
</table>

2a.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to+\infty} 2t+1=+\infty \\ \lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,1t}=0\end{array}\right\}\text{FI par produit}$$

or $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$

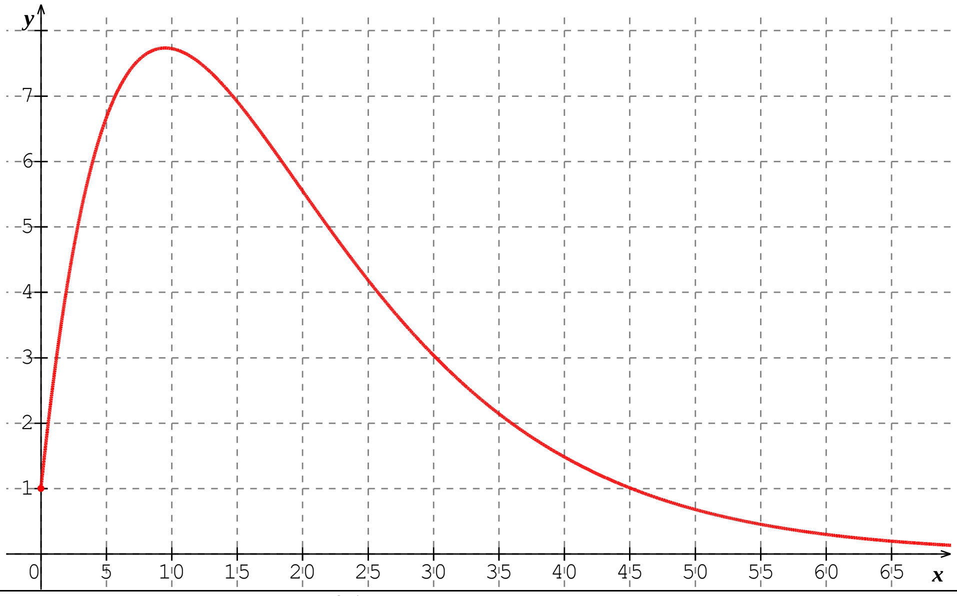
et $\forall t\in\,]0;+\infty[,\ \ f(t)=(2t+1)\,e^{-0,1t}$

$$f(t)=2t\,e^{-0,1t}+\ e^{-0,1t}$$

$$f(t)=-20\times(-0,1\,e^{-0,1t})+\ e^{-0,1t}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to+\infty} -0,1\,e^{-0,1t}=0 \\ \lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,1t}=0\end{array}\right\}\text{donc, par somme, } \lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=0$$

On peut en déduire que la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$.



2b.

$\forall t\in[0;+\infty[, f(t)=(2t+1)\,e^{-0,1t}$

f est dérivable sur $[0;+\infty[$

$\forall t\in[0;+\infty[, f'(t)=2\,e^{-0,1t}+(2t+1)\times(-0,1\,e^{-0,1t})$

$f'(t)=2\,e^{-0,1t}-(0,2t+0,1)\times e^{-0,1t}$

$f'(t)=(2-0,2t-0,1)e^{-0,1t}$

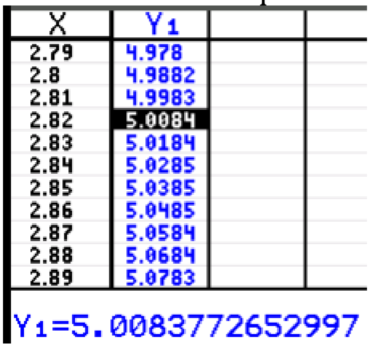
$f'(t)=(1,9-0,2t)e^{-0,1t}$

$$f'(t)>0$$
$$\Leftrightarrow (1,9-0,2t)e^{-0,1t}>0$$
$$\Leftrightarrow 1,9-0,2t>0 \ \text{ car } \ e^{-0,1t}>0$$
$$\Leftrightarrow -0,2t>-1,9$$
$$\Leftrightarrow t<\frac{-1,9}{-0,2}$$
$$\Leftrightarrow t<9,5$$

t	0		$9,5$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	1	$\nearrow$	$20e^{-0,95}$	$\searrow$	0

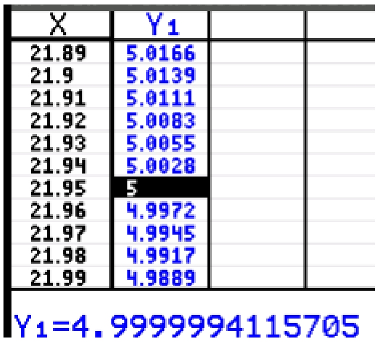
<table>
<tr><td></td><td>2c.</td><td>

$f(0) = 1 < 5$
$f(2) = 20\, e^{-0,95} \approx 7{,}73 > 5$
$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0 < 5$
De plus, la fonction f est dérivable et donc continue sur $[0; +\infty[$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = 5$ admet donc au moins une solution dans l'intervalle $[0; 9{,}5]$ et au moins une solution dans l'intervalle dans $[9{,}5; +\infty[$.
Enfin, puisque f est strictement croissante sur $[0; 9{,}5]$ et strictement décroissante sur $[9{,}5; +\infty[$, ces solutions sont uniques sur chaque intervalle que l'on note α et β



X	Y1
2.79	4.978
2.8	4.9882
2.81	4.9983
2.82	5.0084
2.83	5.0184
2.84	5.0285
2.85	5.0385
2.86	5.0485
2.87	5.0584
2.88	5.0684
2.89	5.0783

Y1=5.0083772652997



X	Y1
21.89	5.0166
21.9	5.0139
21.91	5.0111
21.92	5.0083
21.93	5.0055
21.94	5.0028
21.95	5
21.96	4.9972
21.97	4.9945
21.98	4.9917
21.99	4.9889

Y1=4.9999994115705

$2{,}81 < \alpha < 2{,}82$ donc $\alpha \approx 2{,}8$
$21{,}94 < \beta < 21{,}95$ donc $\beta \approx 21{,}9$

</td></tr>
<tr><td></td><td>3a.</td><td>La quantité de principe actif dans le sang sera maximale au bout de 9,5 heures et elle vaut 7,73 mg.</td></tr>
<tr><td></td><td>3b.</td><td>Le médicament sera efficace entre la 2,8e heure et la 21,9e heure soit pendant 19 heures environ.</td></tr>
<tr><td></td><td>3c.</td><td>

$I = \int_0^{24} (2t+1)\, e^{-0,1t} dt = \boldsymbol{\int u'v}$

$u' = e^{-0,1t} \quad u = \frac{1}{-0{,}1} e^{-0,1t}$

$v = 2t+1 \quad v' = 2$

$I = \boldsymbol{[u\,v] - \int u\,v'} = \left[(2t+1)\left(\frac{1}{-0{,}1} e^{-0,1t}\right)\right]_0^{24} - \int_0^{24} \frac{2}{-0{,}1} e^{-0,1t}\, dt$

$I = [-10\,(2t+1)e^{-0,1t}]_0^{24} + \int_0^{24} 20\, e^{-0,1t}\, dt$

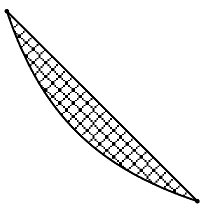
$I = -490e^{-2,4} + 10e^0 + \left[\frac{20}{-0{,}1} e^{-0,1t}\right]_0^{24}$
$I = -490e^{-2,4} + 10e^0 + [-200\, e^{-0,1t}]_0^{24}$
$I = -490e^{-2,4} + 10 - 200\, e^{-2,4} + 200\, e^0$
$I = -690e^{-2,4} + 210$

La quantité moyenne de principe actif présente dans le sang entre 0 et 24 h est alors
$\frac{1}{24} I = \frac{-690e^{-2,4}+210}{24} \approx 6{,}1$ mg

</td></tr>
</table>

Correction de l'exercice 3. (4 points)

Soient f et g deux fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 4 - x$ et $g(x) = \frac{3}{x}$.
On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives respectivement des fonctions f et g dans un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.



▶ 1. Résoudre $f(x) > g(x)$ sur $]0; +\infty[$.
▶ 2. Calculer une valeur exacte de l'aire qui sépare les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Exercice 3.

1.

$$f(x) > g(x)$$
$$\Leftrightarrow 4 - x > \frac{3}{x}$$
$$\Leftrightarrow 4x - x^2 > 3 \text{ car } x > 0$$
$$\Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 > 0$$
$$\Delta = 16 - 4 \times 3 = 16 - 12 = 4 > 0$$
$$x_1 = \frac{-4-2}{-2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4+2}{-2} = 1$$

De plus, la parabole est tournée vers le bas car $a = -1 < 0$ donc

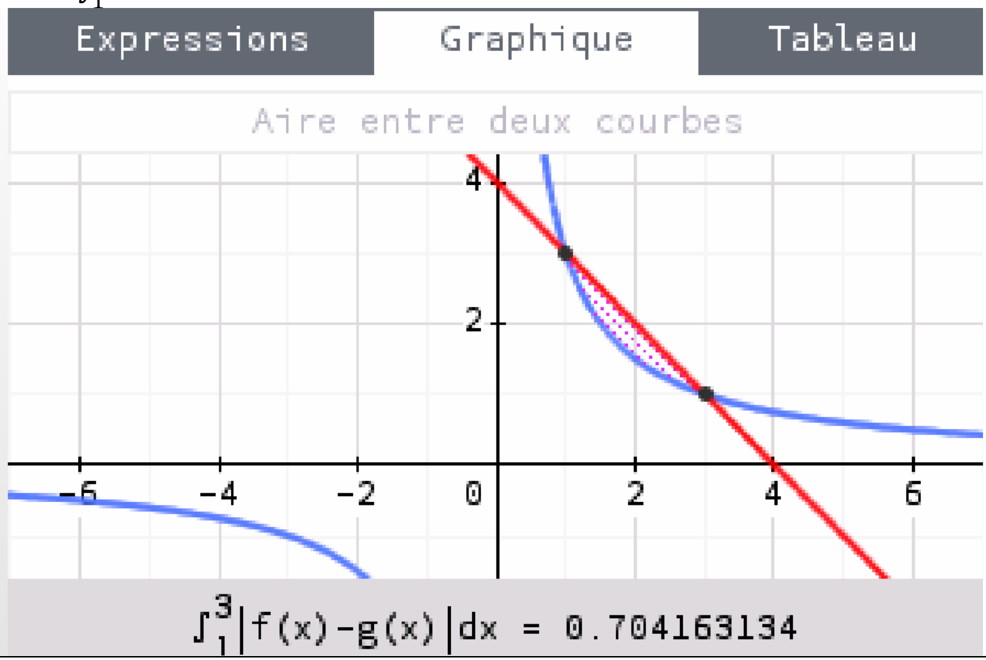
x	0		1		3		$+\infty$
$-x^2+4x-3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

En définitive, $f(x) > g(x)$ a pour solution l'intervalle $]1;3[$

2.

Pour calculer l'aire entre les deux courbes, il faut donc calculer

$$\int_1^3 f(x)dx - \int_1^3 g(x)dx = \int_1^3 (f(x) - g(x))dx$$
$$\int_1^3 f(x)dx - \int_1^3 g(x)dx = \int_1^3 \left(4 - x - \frac{3}{x}\right) dx$$
$$\int_1^3 f(x)dx - \int_1^3 g(x)dx = \left[4x - \frac{x^2}{2} - 3\ln(x)\right]_1^3$$
$$\int_1^3 f(x)dx - \int_1^3 g(x)dx = 12 - \frac{9}{2} - 3\ln(3) - \left(4 - \frac{1}{2} - 3\ln(1)\right)$$
$$\int_1^3 f(x)dx - \int_1^3 g(x)dx = \frac{15}{2} - 3\ln(3) - \frac{7}{2}$$
$$\int_1^3 f(x)dx - \int_1^3 g(x)dx = 4 - 3\ln(3)$$



Terminale ➡ Contrôle n° 8

Spécialité Mathématiques

Correction du sujet B

Correction de l'exercice 1. (6 points)

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur l'intervalle $]0;+\infty[$ vérifiant l'équation différentielle (E) : $x\,f'(x) = (3x-1)\,f(x) + 9$.

▶ 1. Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' = 3y + 9$.

▶ 2. On définit, sur l'intervalle $]0;+\infty[$, la fonction h par $h(x) = x \times f(x)$.

a) Exprimer h' en fonction de f'.

b) Démontrer que la fonction f est solution de (E) si, et seulement si la fonction h est solution de (E').

▶ 3. En déduire toutes les solutions de (E).

▶ 4. Déterminer la fonction f solution de (E) qui vérifie $f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$.

Exercice 1.	**1.**	L'équation différentielle (E') : $y' = 3y + 9$ admet pour solution les fonctions $\forall x \in]0;+\infty[,\ \ y(x) = C\,e^{3x} - \dfrac{9}{3} = C\,e^{3x} - 3$ où $C \in \mathbb{R}$
	2a.	$\forall x \in]0;+\infty[,\ \ h(x) = x \times f(x)$ $h'(x) = 1 \times f(x) + x \times f'(x) = f(x) + xf'(x)$
	2b.	**Condition nécessaire :** Je suppose que f est solution de (E) donc, $\forall x \in]0;+\infty[,\ \ x\,f'(x) = (3x-1)\,f(x) + 9$ or $h'(x) = f(x) + xf'(x)$ $h'(x) = f(x) + (3x-1)\,f(x) + 9$ $h'(x) = (3x-1+1)\,f(x) + 9$ $h'(x) = 3\,xf(x) + 9$ $h'(x) = 3\,h(x) + 9$ donc h est solution de (E') **Condition suffisante :** Je suppose que h est solution de (E') donc, $\forall x \in]0;+\infty[,\ \ h'(x) = 3\,h(x) + 9$ or $h'(x) = f(x) + xf'(x)$ $f(x) + xf'(x) = 3xf(x) + 9$ $\Leftrightarrow xf'(x) = 3xf(x) + 9 - f(x)$ $\Leftrightarrow xf'(x) = (3x-1)\,f(x) + 9$ donc f est solution de (E)
	3.	Les solutions de (E') sont les fonctions : $\forall x \in]0;+\infty[,\ \ h(x) = C\,e^{3x} - 3$ où $C \in \mathbb{R}$ Les fonctions f solution de (E) sont donc les fonctions qui vérifient $\forall x \in]0;+\infty[,\ \ h(x) = x \times f(x) = C\,e^{3x} - 3$ $\Leftrightarrow f(x) = \dfrac{C\,e^{3x} - 3}{x}$

	4.	$f\left(\frac{1}{3}\right)=0=\dfrac{C\,e^{3\times\frac{1}{3}}-3}{\frac{1}{3}}=(C\,e^{1}-3)\times 3=0$ $\Leftrightarrow C\,e-3=0$ $\Leftrightarrow C=\frac{3}{e}$ $\forall x\in\,]0;+\infty[,\,f(x)=\dfrac{\frac{3}{e}\times e^{3x}-3}{x}=\dfrac{3\,e^{3x-1}-3}{x}$

Correction de l'exercice 2. (10 points) Pharmacocinétique

On s'intéresse à une maladie dégénérative de l'œil qui occasionne des troubles de la vision. Afin de freiner son évolution, un traitement est possible. Dans cet exercice, on étudie l'évolution de la quantité des principes actifs On s'intéresse à une maladie dégénérative de l'œil qui occasionne des troubles de la vision. Afin de freiner son évolution, un traitement est possible. Dans cet exercice, on étudie l'évolution de la quantité des principes actifs présents dans le sang en fonction du temps.

Le traitement consiste à faire absorber au malade par voie orale un médicament qui libère peu à peu le principe actif qui passe dans le sang. Il est efficace lorsque la quantité de principe actif est supérieure ou égale à 5 mg. On admet qu'à l'instant $t=0$ la quantité de principe actif présente dans le sang est de 1 mg.

▶1. Résolution d'une équation différentielle

L'évolution en fonction du temps (exprimé en heures), de la quantité de principe actif présente dans le sang après absorption (exprimée en mg) est modélisée par une fonction vérifiant l'équation différentielle :

$$(\boldsymbol{E})\quad \boldsymbol{y'+0,1y=2e^{-0,1t}}$$

où y est une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0;+\infty[$.

a. Déterminer les solutions sur $[0;+\infty[$ de l'équation $(\boldsymbol{E_0})$: $\boldsymbol{y'+0,1y=0}$.

b. Soit h la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $h(t)=2t\,e^{-0,1t}$.
Vérifier que h est une solution particulière de (E).

c. Démontrer que f est solution de (E) si, et seulement si $(f-h)$ est solution de (E_0).

d. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

e. Déterminer la solution f de (E) correspondant au problème posé.

▶2. Étude d'une fonction

Soit la fonction f définie pour tout t de l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(t)=(2t+1)\,e^{-0,1t}$.

a. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.

b. Etudier, en justifiant chaque étape, le tableau des variations de f sur $[0;+\infty[$.

c. Démontrer que l'équation $f(t)=5$ admet exactement deux solutions sur $[0;+\infty[$ et en donner une valeur approchée au dixième.

▶3. Application

a. Au bout de combien de temps la quantité de principe actif dans le sang sera-t-elle maximale ?

b. Sur quel intervalle de temps le médicament sera-t-il efficace ?

c. En intégrant par parties, démontrer que $I=\int_0^{24}(2t+1)\,e^{-0,1t}dt=210-690\,e^{-2,4}$. En déduire la quantité moyenne de principe actif présente dans le sang entre 0 et 24 h. On arrondira le résultat au dixième.

Exercice 2.	**1a.**	$(E_0) : y' + 0{,}1y = 0$ $\Leftrightarrow y' = -0{,}1y$ Les solutions sont les fonctions définies par : $\forall t \in [0;+\infty[,\ y(t) = C\,e^{-0{,}1\,t}$ où $C \in \mathbb{R}$
	1b.	$\forall t \in [0;+\infty[, h(t) = 2t\,e^{-0{,}1t}$ h est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $h'(t) = 2\,e^{-0{,}1t} + 2t \times (-0{,}1\,e^{-0{,}1t})$ $h'(t) = 2\,e^{-0{,}1t} - 0{,}2t\,e^{-0{,}1t}$ $h'(t) = (2 - 0{,}2t\,)e^{-0{,}1t}$ Par conséquent $h'(t) + 0{,}1h(t) = (2 - 0{,}2t\,)e^{-0{,}1t} + 0{,}1 \times 2t\,e^{-0{,}1t}$ $h'(t) + 0{,}1h(t) = (2 - 0{,}2t\,)e^{-0{,}1t} + 0{,}2t\,e^{-0{,}1t}$ $h'(t) + 0{,}1h(t) = (2 - 0{,}2t + 0{,}2t)e^{-0{,}1t}$ $h'(t) + 0{,}1h(t) = 2e^{-0{,}1t}$ donc h est une solution particulière de (E)
	1c.	Condition nécessaire : Je suppose que f est solution de (E) donc, $\forall t \in]0;+\infty[,\quad f'(t) + 0{,}1f(t) = 2e^{-0{,}1t}$ or $h'(t) + 0{,}1h(t) = 2e^{-0{,}1t}$ donc $f'(t) + 0{,}1f(t) - \big(h'(t) + 0{,}1h(t)\big) = 2e^{-0{,}1t} - 2e^{-0{,}1t}$ $\Leftrightarrow f'(t) + 0{,}1f(t) - h'(t) - 0{,}1h(t) = 0$ $\Leftrightarrow f'(t) - h'(t) + 0{,}1\big(f(t) - h(t)\big) = 0$ $\Leftrightarrow (f - h)'(t) + 0{,}1(f - h)(t) = 0$ donc $(f - h)$ est solution de (E_0) Condition suffisante : Je suppose que $(f - h)$ est solution de (E_0) donc, $\forall t \in]0;+\infty[,\quad (f - h)'(t) + 0{,}1(f - h)(t) = 0$ $\Leftrightarrow f'(t) + 0{,}1f(t) - h'(t) - 0{,}1h(t) = 0$ $\Leftrightarrow f'(t) + 0{,}1f(t) = h'(t) + 0{,}1h(t)$ or $h'(t) + 0{,}1h(t) = 2e^{-0{,}1t}$ donc $f'(t) + 0{,}1f(t) = 2e^{-0{,}1t}$ donc f est solution de (E)
	1d.	On a alors, $\forall t \in]0;+\infty[,\quad (f - h)(t) = f(t) - h(t) = C\,e^{-0{,}1\,t}$ Par conséquent, les solutions de (E) sont les fonctions $f(t) = C\,e^{-0{,}1\,t} + h(t)$ $f(t) = C\,e^{-0{,}1\,t} + 2te^{-0{,}1t}$
	1e.	$f(0) = 1$ $C\,e^{0} + 2 \times 0 = 1$ $\Leftrightarrow C = 1$ $\forall t \in]0;+\infty[, f(t) = 1 \times e^{-0{,}1\,t} + 2te^{-0{,}1t} = (2t + 1)\,e^{-0{,}1t}$

2a.

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{t\to+\infty} 2t+1=+\infty\\ \lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,1t}=0\end{array}\right\}\text{FI par produit}$$

or $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$

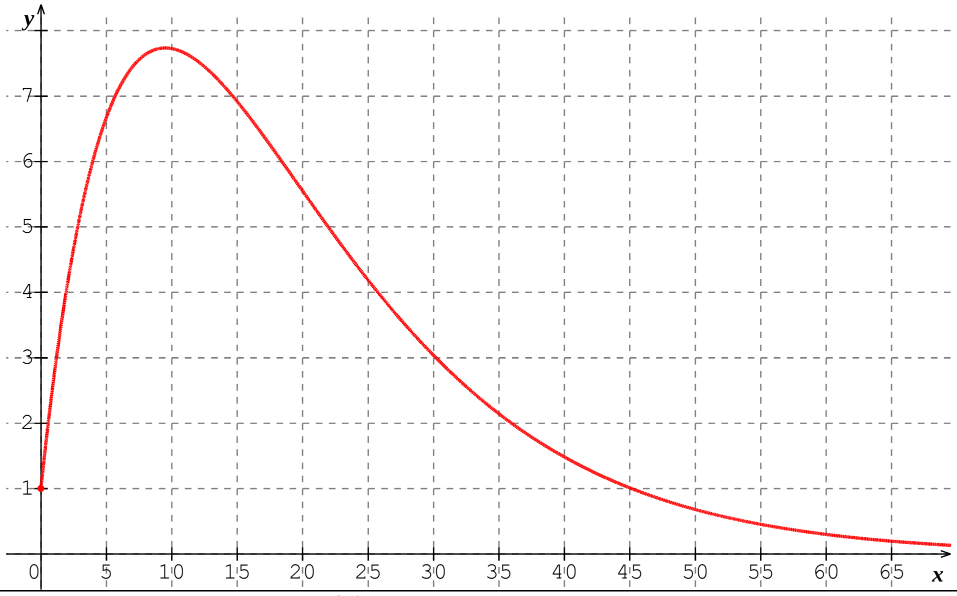
et $\forall t\in\,]0;+\infty[,\ \ f(t)=(2t+1)\,e^{-0,1t}$

$$f(t)=2t\,e^{-0,1t}+\ e^{-0,1t}$$

$$f(t)=-20\times(-0,1\,e^{-0,1t})+\ e^{-0,1t}$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{t\to+\infty} -0,1\,e^{-0,1t}=0\\ \lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,1t}=0\end{array}\right\}\text{donc, par somme, }\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=0$$

On peut en déduire que la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$.



2b.

$\forall t\in[0;+\infty[, f(t)=(2t+1)\,e^{-0,1t}$

f est dérivable sur $[0;+\infty[$

$\forall t\in[0;+\infty[, f'(t)=2\,e^{-0,1t}+(2t+1)\times(-0,1\,e^{-0,1t})$

$f'(t)=2\,e^{-0,1t}-(0,2t+0,1)\times e^{-0,1t}$

$f'(t)=(2-0,2t-0,1)e^{-0,1t}$

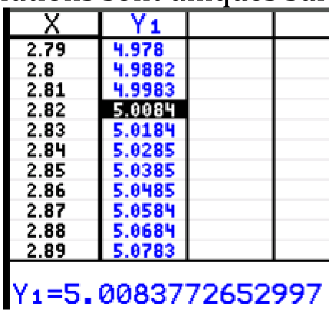
$f'(t)=(1,9-0,2t)e^{-0,1t}$

$$f'(t)>0$$
$$\Leftrightarrow (1,9-0,2t)e^{-0,1t}>0$$
$$\Leftrightarrow 1,9-0,2t>0 \text{ car } e^{-0,1t}>0$$
$$\Leftrightarrow -0,2t>-1,9$$
$$\Leftrightarrow t<\frac{-1,9}{-0,2}$$
$$\Leftrightarrow t<9,5$$

t	0		$9,5$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	1	$\nearrow$	$20e^{-0,95}$	$\searrow$	0

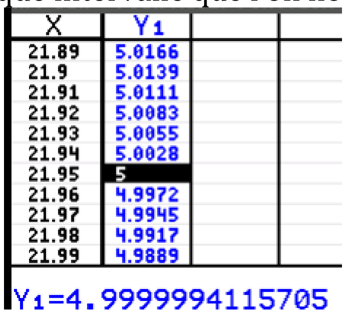
2c.

$f(0) = 1 < 5$
$f(2) = 20\, e^{-0{,}95} \approx 7{,}73 > 5$
$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0 < 5$
De plus, la fonction f est dérivable et donc continue sur $[0; +\infty[$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = 5$ admet donc au moins une solution dans l'intervalle $[0; 9{,}5]$ et au moins une solution dans l'intervalle dans $[9{,}5; +\infty[$.
Enfin, puisque f est strictement croissante sur $[0; 9{,}5]$ et strictement décroissante sur $[9{,}5; +\infty[$, ces solutions sont uniques sur chaque intervalle que l'on note α et β



X	Y1
2.79	4.978
2.8	4.9882
2.81	4.9983
2.82	5.0084
2.83	5.0184
2.84	5.0285
2.85	5.0385
2.86	5.0485
2.87	5.0584
2.88	5.0684
2.89	5.0783

Y1=5.0083772652997



X	Y1
21.89	5.0166
21.9	5.0139
21.91	5.0111
21.92	5.0083
21.93	5.0055
21.94	5.0028
21.95	5
21.96	4.9972
21.97	4.9945
21.98	4.9917
21.99	4.9889

Y1=4.9999994115705

$2{,}81 < \alpha < 2{,}82$ donc $\alpha \approx 2{,}8$
$21{,}94 < \beta < 21{,}95$ donc $\beta \approx 21{,}9$

3a.

La quantité de principe actif dans le sang sera maximale au bout de 9,5 heures et elle vaut 7,73 mg.

3b.

Le médicament sera efficace entre la 2,8^e heure et la 21,9^e heure soit pendant 19 heures environ.

3c.

$$I = \int_0^{24} (2t+1)\, e^{-0{,}1t} dt = \int \boldsymbol{u'v}$$

$$u' = e^{-0{,}1t} \qquad u = \frac{1}{-0{,}1}\, e^{-0{,}1t}$$
$$v = 2t+1 \qquad v' = 2$$

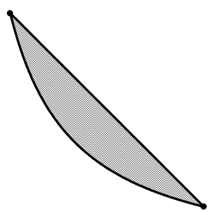
$$I = [\boldsymbol{u\,v}] - \int \boldsymbol{u\,v'} = \left[(2t+1)\left(\frac{1}{-0{,}1}\, e^{-0{,}1t}\right)\right]_0^{24} - \int_0^{24} \frac{2}{-0{,}1}\, e^{-0{,}1t}\, dt$$
$$I = [-10\,(2t+1)e^{-0{,}1t}]_0^{24} + \int_0^{24} 20\, e^{-0{,}1t}\, dt$$
$$I = -490e^{-2{,}4} + 10e^0 + \left[\frac{20}{-0{,}1}\, e^{-0{,}1t}\right]_0^{24}$$
$$I = -490e^{-2{,}4} + 10e^0 + [-200\, e^{-0{,}1t}]_0^{24}$$
$$I = -490e^{-2{,}4} + 10 - 200\, e^{-2{,}4} + 200\, e^0$$
$$I = -690e^{-2{,}4} + 210$$

La quantité moyenne de principe actif présente dans le sang entre 0 et 24 h est alors $\frac{1}{24} I = \frac{-690e^{-2{,}4}+210}{24} \approx 6{,}1$ mg

Correction de l'exercice 3. (4 points)

Soient f et g deux fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 5 - x$ et $g(x) = \frac{4}{x}$.
On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives respectivement des fonctions f et g dans un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

▶ 1. Résoudre $f(x) > g(x)$ sur $]0; +\infty[$.
▶ 2. Calculer une valeur exacte de l'aire qui sépare les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.



Exercice 3.

1.

$$f(x) > g(x)$$
$$\Leftrightarrow 5 - x > \frac{4}{x}$$
$$\Leftrightarrow 5x - x^2 > 4 \text{ car } x > 0$$
$$\Leftrightarrow -x^2 + 5x - 4 > 0$$
$$\Delta = 25 - 4 \times 4 = 25 - 16 = 9 > 0$$
$$x_1 = \frac{-5-3}{-2} = 4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-5+3}{-2} = 1$$

De plus, la parabole est tournée vers le bas car $a = -1 < 0$ donc

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$-x^2+5x-4$		$-$	0	$+$	0	$-$	

En définitive, $f(x) > g(x)$ a pour solution l'intervalle $]1;4[$.

2.

Pour calculer l'aire entre les deux courbes, il faut donc calculer

$$\int_1^4 f(x)dx - \int_1^4 g(x)dx = \int_1^4 (f(x) - g(x))dx$$
$$\int_1^4 f(x)dx - \int_1^4 g(x)dx = \int_1^4 \left(5 - x - \frac{4}{x}\right) dx$$
$$\int_1^4 f(x)dx - \int_1^4 g(x)dx = \left[5x - \frac{x^2}{2} - 4\ln(x)\right]_1^4$$
$$\int_1^4 f(x)dx - \int_1^4 g(x)dx = 20 - 8 - 4\ln(4) - \left(5 - \frac{1}{2} - 4\ln(1)\right)$$
$$\int_1^4 f(x)dx - \int_1^4 g(x)dx = 12 - 4\ln(2^2) - \frac{9}{2}$$
$$\int_1^4 f(x)dx - \int_1^4 g(x)dx = \frac{15}{2} - 8\ln(2)$$