LYCEE Polyvalent Albert EINSTEIN

Mardi 4 mars 2025 – *Facultatif et modulable*
Terminale ⇨ Devoir à rédiger n° 3
Spécialité Mathématiques – Calculatrice autorisée

Exercice 1.

Des biologistes étudient l'évolution d'une population d'oiseaux dans un parc national. Au début de l'étude la population est de 100 000 oiseaux. Pour préserver l'équilibre du milieu naturel, le nombre d'oiseaux ne doit pas dépasser 300 000.

Partie A : Étude d'un premier modèle en laboratoire

L'observation de l'évolution de ces populations d'oiseaux en captivité, en l'absence de tout prédateur, montre que le nombre moyen d'oiseaux augmente de 40% chaque année.
En tenant compte de cette observation, les biologistes modélisent l'évolution de la population d'oiseaux à l'aide de la suite (U_n) où, pour tout entier naturel n, U_n modélise le nombre d'oiseaux exprimé en millions, au bout de n années.
On a donc $U_0 = 0{,}1$.

1) Justifier que pour tout entier naturel n, $U_n = 0{,}1 \times 1{,}4^n$.
2) Déterminer le sens de variations de cette suite (U_n).
3) En résolvant une inéquation, déterminer le plus entier naturel n à partir duquel $U_n > 0{,}3$.
4) Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel serait-il préservé ? Justifier la réponse.

Partie B : Étude d'un second modèle

En tenant compte des contraintes du milieu naturel dans lequel évoluent les oiseaux, les biologistes choisissent une nouvelle modélisation. Ils modélisent le nombre d'oiseaux à l'aide de la suite (V_n), définie par $V_0 = 0{,}1$ et pour tout entier naturel n,

$$V_{n+1} = 1{,}4\,V_n - 1{,}4\,V_n^2.$$

où, pour tout entier n, V_n est le nombre d'oiseaux, exprimé en millions, au bout de n années.

1) Déterminer le nombre d'oiseaux au bout d'une année.
2) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ par $f(x) = 1{,}4x - 1{,}4x^2$.
a. Résoudre dans $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ l'équation $f(x) = x$.
b. Montrer que f est croissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.
3) **a.** Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $0 \leq V_n \leq V_{n+1} \leq \frac{1}{2}$
b. Montrer que la suite (V_n) est convergente.
On note ℓ la valeur de la limite de la suite (V_n). On admet que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.
c. Déterminer la valeur de ℓ.
d. Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel sera-t-il préservé ? Justifier la réponse.
4) On donne ci-dessous la fonction seuil, écrite en langage Python.

```
def seuil(A):
    V=0.1
    n=0
    while V<A:
        V=1.4*V-1.4*V**2
        n=n+1
    return n
```

a. Qu'observe-t-on si on saisit `seuil(0.3)` ?
b. Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de `seuil(0.27)` ?
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2.

Entre 2010 et 2022, en France, 10 111 028 accouchements ont été recensés, parmi lesquels 169 359 ont donné naissance à des jumeaux et 2 558 ont donné naissance à au moins trois enfants.

1) **a.** Avec une précision de 0,1 %, calculer parmi tous les accouchements recensés, le pourcentage d'accouchements donnant naissance **à un seul enfant** sur la période 2010-2022.

b. Vérifier que le pourcentage d'accouchements qui ont donné naissance **à au moins trois enfants** est inférieur à 0,1 %. *On considérera, pour la suite, que ce pourcentage est négligeable.*

On appelle accouchement ordinaire, un accouchement donnant naissance à un seul enfant. On appelle accouchement double, un accouchement donnant naissance à exactement deux enfants.

On considère dans la suite de l'exercice qu'un accouchement est soit ordinaire, soit double. La probabilité d'un accouchement ordinaire est égale à 0,983 et celle d'un accouchement double est alors égale à 0,017. *Les probabilités calculées dans la suite seront arrondies au millième.*

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on admet qu'un jour donné dans une maternité, on réalise n accouchements. On considère que ces n accouchements sont indépendants les uns des autres. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'accouchements doubles pratiqués ce jour.

a. Dans le cas où $n = 20$, préciser la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X et calculer la probabilité qu'on réalise exactement un accouchement double.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, par la méthode de votre choix que vous expliciterez, déterminer la plus petite valeur de n telle que $P(X \geq 1) \geq 0{,}99$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

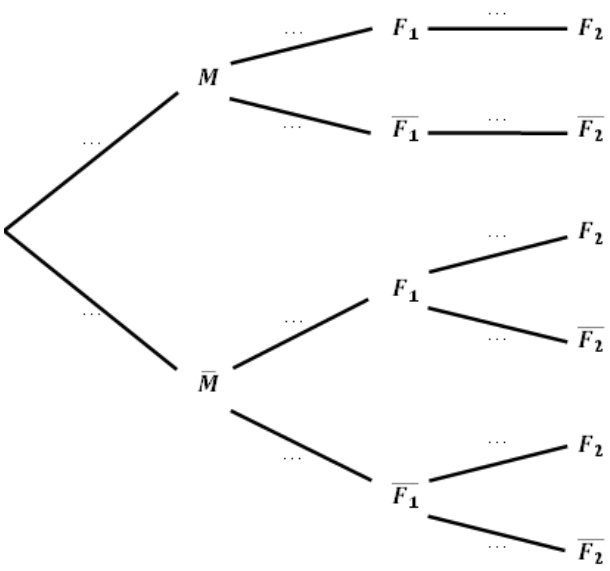
3) Dans cette maternité, on estime qu'un tiers des jumeaux sont des jumeaux monozygotes (appelés « vrais jumeaux » qui sont obligatoirement de même sexe : deux garçons ou deux filles) et donc deux-tiers des jumeaux sont des jumeaux dizygotes (appelés « faux jumeaux », qui peuvent être de sexes différents : deux garçons, deux filles ou un garçon et une fille).

Dans le cas de naissances doubles, on admet que, comme pour les naissances ordinaires, la probabilité d'être une fille à la naissance est égale à 0,49 et que celle d'être un garçon à la naissance est égale à 0,51. Dans le cas d'une naissance double de jumeaux dizygotes, on admet aussi que le sexe du second nouveau-né des jumeaux est indépendant du sexe du premier nouveau-né. On choisit au hasard un accouchement double réalisé dans cette maternité et on considère les évènements suivants :

- M : « les jumeaux sont monozygotes » ;
- F_1 : « le premier nouveau-né est une fille » ;
- F_2 : « le second nouveau-né est une fille ».

On notera $P(A)$ la probabilité de l'évènement A et $\bar{A}$ l'évènement contraire de A.

a. Recopier puis compléter l'arbre pondéré ci-contre0.



b. Montrer que la probabilité que les deux nouveau-nés soient des filles est 0,3234.

c. Les deux nouveau-nés sont des jumelles. Calculer la probabilité qu'elles soient monozygotes.

Exercice 3.

La figure ci-contre représente un cube $ABCDEFGH$.

Le point I est le milieu du segment $[AD]$, le point J vérifie $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ et le point K est le milieu du segment $[FG]$.

On se place dans le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right)$.

►1. a. Donner sans justification les coordonnées des points I, J et K.

b. Déterminer les réels a et b pour que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\a\\b\end{pmatrix}$ soit orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$.

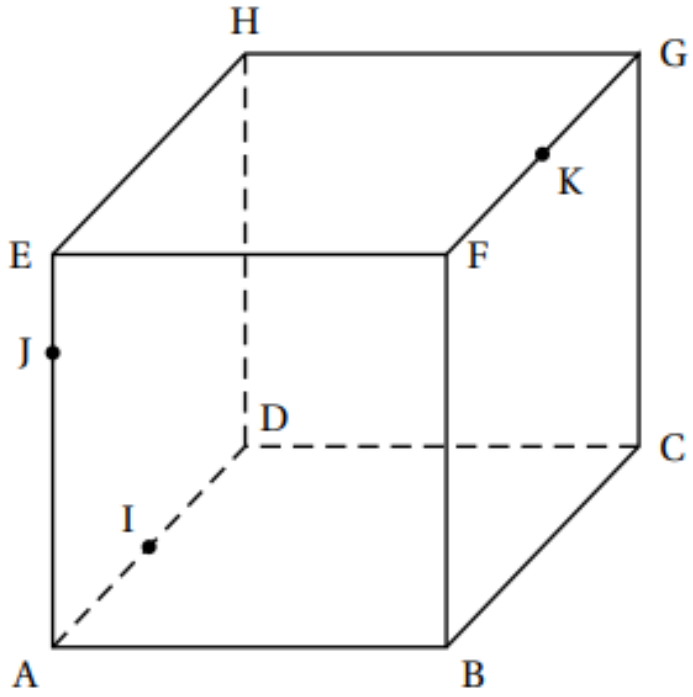
c. En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).

►2. a. Donner une représentation paramétrique de la droite (CG).

b. Calculer les coordonnées du point N, intersection du plan (IJK) et de la droite (CG).

c. Placer le point N sur la figure.

d. Construire la section du cube par le plan (IJK).



►3. On note R le projeté orthogonal du point F sur le plan (IJK).

On définit l'intérieur du cube comme l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \\ 0 < z < 1 \end{cases}$$

Le point R est-il à l'intérieur du cube ?

Exercice 4.

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x-2)e^x + x$
C_h est la représentation graphique de h dans un repère orthonormé.

▶1. a. Calculer h', puis h''.

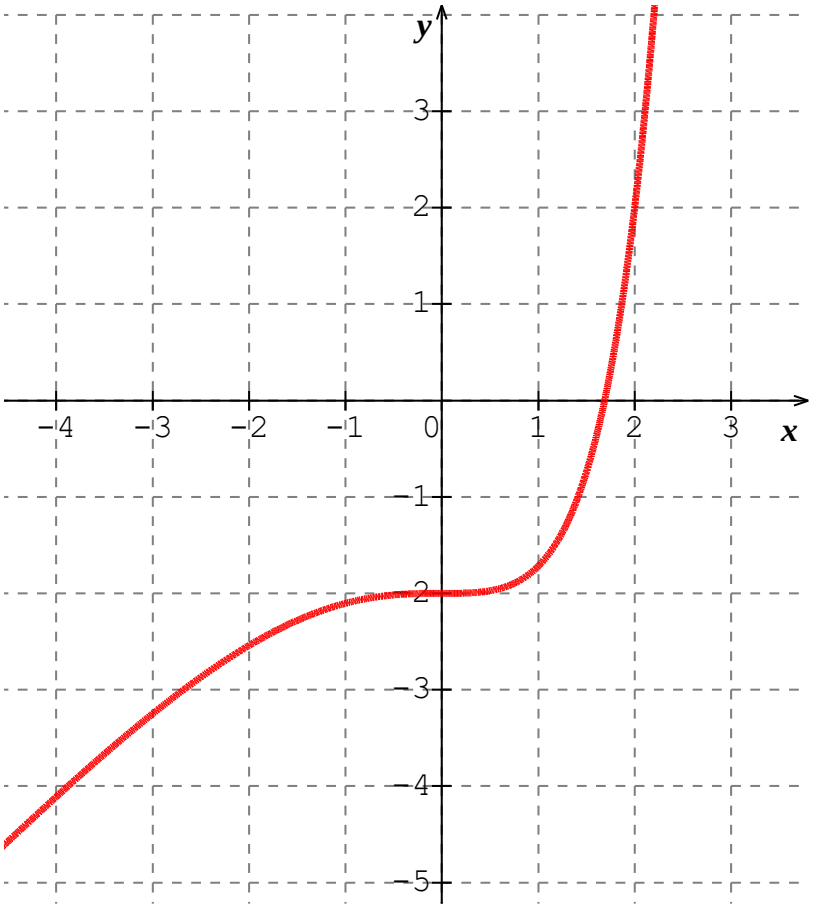
b. Déterminer le sens de variation de h', puis le signe de h'.

c. En déduire les variations de h.

▶2. Déterminer les limites de h en $-\infty$ et $+\infty$. Dresser le tableau de variations de h.

▶3. a. La droite (d) est la droite d'équation $y = x$. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de C_h et (d).

b. Etudier les positions relatives de C_h et (d) c'est-à-dire préciser si C_h est au-dessus de (d) ou au-dessous.

c. Déterminer la tangente (T) à C_h au point d'abscisse 0.

▶4. Tracer (d) et (T) dans le repère ci-dessous.