Mardi 4 mars 2025

Terminale ➡ Devoir à rédiger n°3

Spécialité Mathématiques

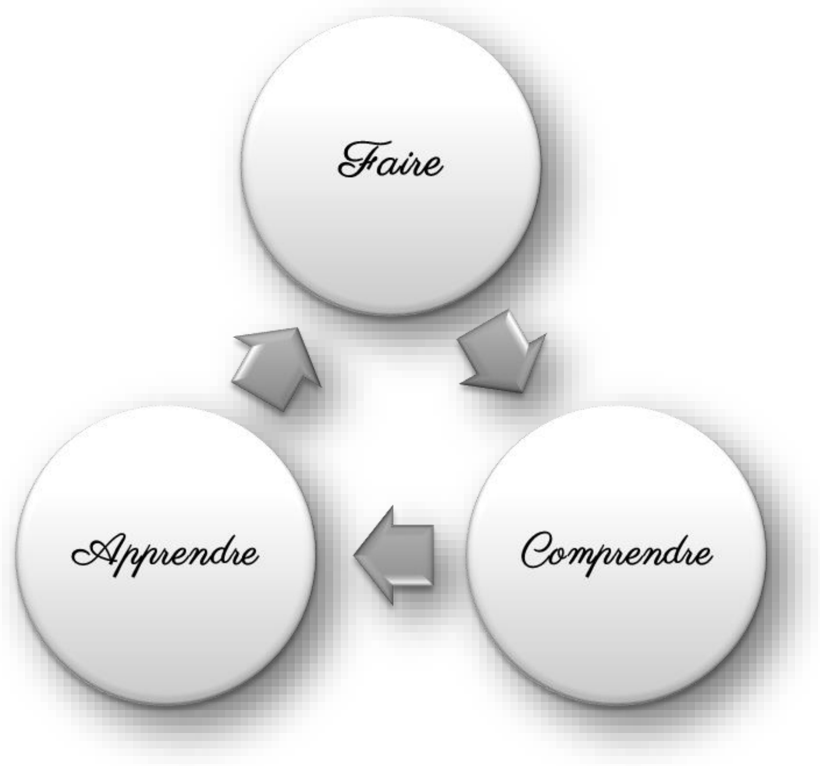


Table des matières

Enoncé du sujet 2
Exercice 1. Suites 2
Exercice 2. Probabilités 2
Exercice 3. Géométrie dans l'espace 3
Exercice 4. Etude de fonctions 4
Correction des exercices 5
Correction de l'exercice 1. Suites 5
Correction de l'exercice 2. Probabilités 8
Correction de l'exercice 3. Géométrie dans l'espace 10
Correction de l'exercice 4. Etude de fonctions 12

Terminale ➡ Devoir à rédiger n° 3

Spécialité Mathématiques

Enoncé du sujet

Exercice 1. Suites

Des biologistes étudient l'évolution d'une population d'oiseaux dans un parc national. Au début de l'étude la population est de 100 000 oiseaux. Pour préserver l'équilibre du milieu naturel, le nombre d'oiseaux ne doit pas dépasser 300 000.

Partie A : Étude d'un premier modèle en laboratoire

L'observation de l'évolution de ces populations d'oiseaux en captivité, en l'absence de tout prédateur, montre que le nombre moyen d'oiseaux augmente de 40% chaque année.

En tenant compte de cette observation, les biologistes modélisent l'évolution de la population d'oiseaux à l'aide de la suite (U_n) où, pour tout entier naturel n, U_n modélise le nombre d'oiseaux exprimé en millions, au bout de n années.

On a donc $U_0 = 0{,}1$.

1) Justifier que pour tout entier naturel n, $U_n = 0{,}1 \times 1{,}4^n$.

2) Déterminer le sens de variations de cette suite (U_n).

3) En résolvant une inéquation, déterminer le plus entier naturel n à partir duquel $U_n > 0{,}3$.

4) Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel serait-il préservé ? Justifier la réponse.

Partie B : Étude d'un second modèle

En tenant compte des contraintes du milieu naturel dans lequel évoluent les oiseaux, les biologistes choisissent une nouvelle modélisation. Ils modélisent le nombre d'oiseaux à l'aide de la suite (V_n), définie par $V_0 = 0{,}1$ et pour tout entier naturel n,

$$V_{n+1} = 1{,}4\,V_n - 1{,}4\,V_n^2.$$

où, pour tout entier n, V_n est le nombre d'oiseaux, exprimé en millions, au bout de n années.

1) Déterminer le nombre d'oiseaux au bout d'une année.

2) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ par $f(x) = 1{,}4x - 1{,}4x^2$.

a. Résoudre dans $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ l'équation $f(x) = x$.

b. Montrer que f est croissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

3) **a.** Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $0 \leq V_n \leq V_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

b. Montrer que la suite (V_n) est convergente.

On note ℓ la valeur de la limite de la suite (V_n). On admet que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

c. Déterminer la valeur de ℓ.

d. Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel sera-t-il préservé ? Justifier la réponse.

4) On donne ci-dessous la fonction seuil, écrite en langage Python.

```
def seuil(A):
    V=0.1
    n=0
    while V<A:
        V=1.4*V-1.4*V**2
        n=n+1
    return n
```

a. Qu'observe-t-on si on saisit `seuil(0.3)` ?

b. Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de `seuil(0.27)` ?

Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

⬆

Exercice 2. Probabilités

Entre 2010 et 2022, en France, 10 111 028 accouchements ont été recensés, parmi lesquels 169 359 ont donné naissance à des jumeaux et 2 558 ont donné naissance à au moins trois enfants.

1) **a.** Avec une précision de 0,1 %, calculer parmi tous les accouchements recensés, le pourcentage d'accouchements donnant naissance **à un seul enfant** sur la période 2010-2022.

b. Vérifier que le pourcentage d'accouchements qui ont donné naissance **à au moins trois enfants** est inférieur à 0,1 %. *On considérera, pour la suite, que ce pourcentage est négligeable.*

On appelle accouchement ordinaire, un accouchement donnant naissance à un seul enfant. On appelle accouchement double, un accouchement donnant naissance à exactement deux enfants.

On considère dans la suite de l'exercice qu'un accouchement est soit ordinaire, soit double. La probabilité d'un accouchement ordinaire est égale à 0,983 et celle d'un accouchement double est alors égale à 0,017. *Les probabilités calculées dans la suite seront arrondies au millième.*

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on admet qu'un jour donné dans une maternité, on réalise n accouchements. On considère que ces n accouchements sont indépendants les uns des autres. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'accouchements doubles pratiqués ce jour.

a. Dans le cas où $n = 20$, préciser la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X et calculer la probabilité qu'on réalise exactement un accouchement double.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, par la méthode de votre choix que vous expliciterez, déterminer la plus petite valeur de n telle que $P(X \geq 1) \geq 0{,}99$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

3) Dans cette maternité, on estime qu'un tiers des jumeaux sont des jumeaux monozygotes (appelés « vrais jumeaux » qui sont obligatoirement de même sexe : deux garçons ou deux filles) et donc deux-tiers des jumeaux sont des jumeaux dizygotes (appelés « faux jumeaux », qui peuvent être de sexes différents : deux garçons, deux filles ou un garçon et une fille).

Dans le cas de naissances doubles, on admet que, comme pour les naissances ordinaires, la probabilité d'être une fille à la naissance est égale à 0,49 et que celle d'être un garçon à la naissance est égale à 0,51. Dans le cas d'une naissance double de jumeaux dizygotes, on admet aussi que le sexe du second nouveau-né des jumeaux est indépendant du sexe du premier nouveau-né. On choisit au hasard un accouchement double réalisé dans cette maternité et on considère les évènements suivants :

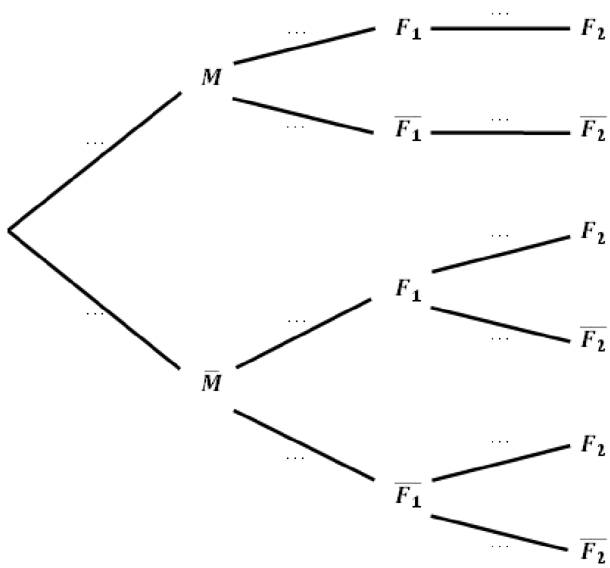
- M : « les jumeaux sont monozygotes » ;
- F_1 : « le premier nouveau-né est une fille » ;
- F_2 : « le second nouveau-né est une fille ».

On notera $P(A)$ la probabilité de l'évènement A et $\bar{A}$ l'évènement contraire de A.

a. Recopier puis compléter l'arbre pondéré ci-contre.

b. Montrer que la probabilité que les deux nouveau-nés soient des filles est 0,3234.

c. Les deux nouveau-nés sont des jumelles. Calculer la probabilité qu'elles soient monozygotes.



Exercice 3. Géométrie dans l'espace

La figure ci-contre représente un cube $ABCDEFGH$.

Le point I est le milieu du segment $[AD]$, le point J vérifie $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ et le point K est le milieu du segment $[FG]$.

On se place dans le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right)$.

▶1. a. Donner sans justification les coordonnées des points I, J et K.

b. Déterminer les réels a et b pour que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\a\\b\end{pmatrix}$ soit orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$.

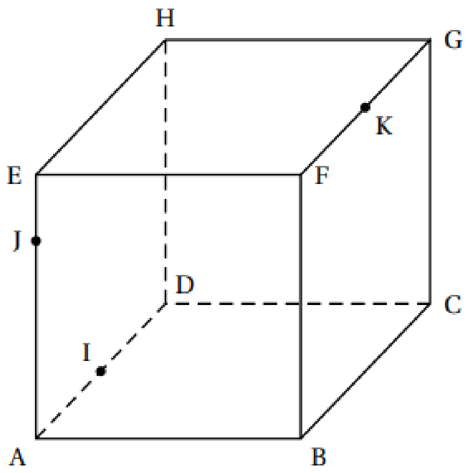
c. En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).

▶2. a. Donner une représentation paramétrique de la droite (CG).

b. Calculer les coordonnées du point N, intersection du plan (IJK) et de la droite (CG).

c. Placer le point N sur la figure.

d. Construire la section du cube par le plan (IJK).



▶3. On note R le projeté orthogonal du point F sur le plan (IJK).

On définit l'intérieur du cube comme l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que

$$\begin{cases}0 < x < 1\\0 < y < 1\\0 < z < 1\end{cases}$$

Le point R est-il à l'intérieur du cube ?

Exercice 4. Etude de fonctions

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x-2)e^x + x$

C_h est la représentation graphique de h dans un repère orthonormé.

▶1. a. Calculer h', puis h''.

b. Déterminer le sens de variation de h', puis le signe de h'.

c. En déduire les variations de h.

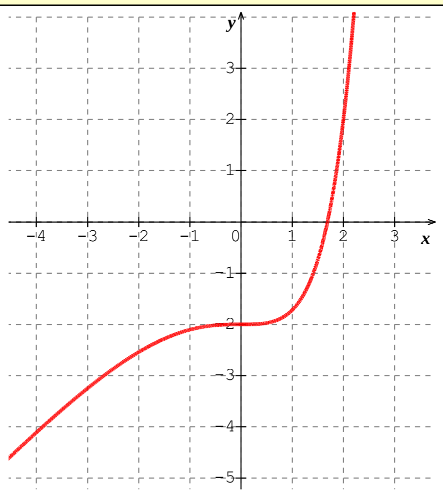
▶2. Déterminer les limites de h en $-\infty$ et $+\infty$. Dresser le tableau de variations de h.

▶3. a. La droite (d) est la droite d'équation $y = x$. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de C_h et (d).

b. Etudier les positions relatives de C_h et (d) c'est-à-dire préciser si C_h est au-dessus de (d) ou au-dessous.

c. Déterminer la tangente (T) à C_h au point d'abscisse 0.

▶4. Tracer (d) et (T) dans le repère ci-dessous.



Terminale ➡ Devoir à rédiger n° 3
Spécialité Mathématiques

Correction des exercices

Correction de l'exercice 1. Suites

Des biologistes étudient l'évolution d'une population d'oiseaux dans un parc national. Au début de l'étude la population est de 100 000 oiseaux. Pour préserver l'équilibre du milieu naturel, le nombre d'oiseaux ne doit pas dépasser 300 000.

Partie A : Étude d'un premier modèle en laboratoire

L'observation de l'évolution de ces populations d'oiseaux en captivité, en l'absence de tout prédateur, montre que le nombre moyen d'oiseaux augmente de 40% chaque année.

En tenant compte de cette observation, les biologistes modélisent l'évolution de la population d'oiseaux à l'aide de la suite (U_n) où, pour tout entier naturel n, U_n modélise le nombre d'oiseaux exprimé en millions, au bout de n années.

On a donc $U_0 = 0{,}1$.

1) Justifier que pour tout entier naturel n, $U_n = 0{,}1 \times 1{,}4^n$.

2) Déterminer le sens de variations de cette suite (U_n).

3) En résolvant une inéquation, déterminer le plus entier naturel n à partir duquel $U_n > 0{,}3$.

4) Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel serait-il préservé ? Justifier la réponse.

Partie B : Étude d'un second modèle

En tenant compte des contraintes du milieu naturel dans lequel évoluent les oiseaux, les biologistes choisissent une nouvelle modélisation. Ils modélisent le nombre d'oiseaux à l'aide de la suite (V_n), définie par $V_0 = 0{,}1$ et pour tout entier naturel n,

$$V_{n+1} = 1{,}4\,V_n - 1{,}4\,V_n^2.$$

où, pour tout entier n, V_n est le nombre d'oiseaux, exprimé en millions, au bout de n années.

1) Déterminer le nombre d'oiseaux au bout d'une année.

2) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ par $f(x) = 1{,}4x - 1{,}4x^2$.

a. Résoudre dans $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ l'équation $f(x) = x$.

b. Montrer que f est croissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

3) **a.** Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $0 \leq V_n \leq V_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

b. Montrer que la suite (V_n) est convergente.

On note ℓ la valeur de la limite de la suite (V_n). On admet que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

c. Déterminer la valeur de ℓ.

d. Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel sera-t-il préservé ? Justifier la réponse.

4) On donne ci-dessous la fonction seuil, écrite en langage Python.

```
def seuil(A):
    V=0.1
    n=0
    while V<A:
        V=1.4*V-1.4*V**2
        n=n+1
    return n
```

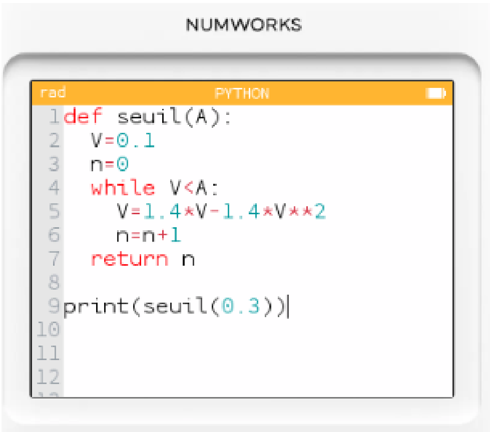
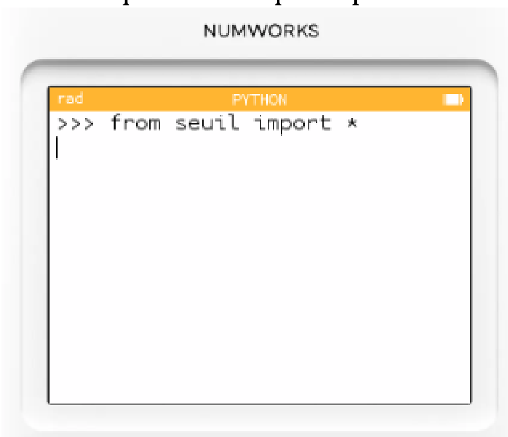
a. Qu'observe-t-on si on saisit `seuil(0.3)` ?

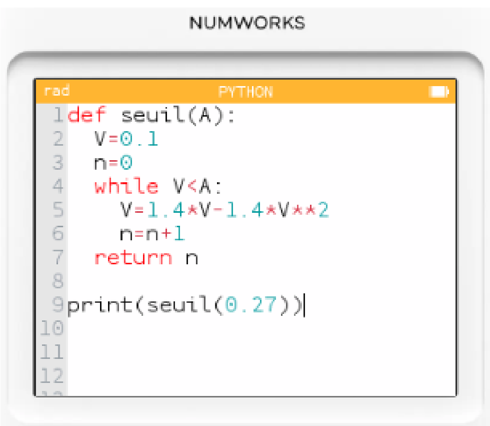
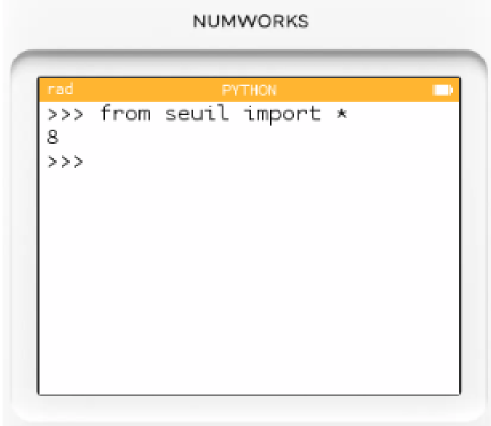
b. Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de `seuil(0.27)` ?

Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2	**A.1.**	Le nombre d'oiseau augmente de 40% chaque année, il est donc multiplié par 1,4 chaque année. La suite (U_n) est donc géométrique de raison 1,4 et de 1er terme 0,1. Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = 0{,}1 \times 1{,}4^n$.

<table>
<tr><td rowspan="9"></td><td rowspan="2">A.2.</td><td>Méthode n°1 :
$U_0 = 0{,}1 > 0$
A chaque rang, le terme est multiplié par $1{,}4 > 1$ pour obtenir le rang suivant. La suite (U_n) est donc croissante.</td><td>Méthode n°2 :
$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 0{,}1 \times 1{,}4^n > 0$ (suite strictement positive)
$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{0{,}1 \times 1{,}4^{n+1}}{0{,}1 \times 1{,}4^n}$$
$$= \frac{1{,}4}{1} = 1{,}4 > 1$$
La suite (U_n) est donc croissante.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Méthode n°3 :
$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - U_n = 0{,}1 \times 1{,}4^{n+1} - 0{,}1 \times 1{,}4^n$
$$= 0{,}1 \times 1{,}4^n(1{,}4 - 1)$$
$$= 0{,}04 \times 1{,}4^n$$
$$U_{n+1} - U_n > 0$$
La suite (U_n) est donc croissante.</td></tr>
<tr><td>A.3.</td><td colspan="2">$$U_n > 0{,}3$$
$$\Leftrightarrow 0{,}1 \times 1{,}4^n > 0{,}3$$
$$\Leftrightarrow 1{,}4^n > 3$$
$$\Leftrightarrow \ln(1{,}4^n) > \ln(3)$$
$$\Leftrightarrow n \ \ln(1{,}4) > \ln(3)$$
$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(3)}{\ln(1{,}4)} \quad \text{car} \ \ \ln(1{,}4) > 0$$
$$\text{donc} \ \ n > 3{,}265$$
J'en déduis que le plus petit entier n vérifiant $U_n > 0{,}3$ est $n = 4$.</td></tr>
<tr><td>A.4.</td><td colspan="2">Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel ne sera pas préservé car le nombre d'oiseaux dépassera 300 000 au bout de 11 années.</td></tr>
<tr><td>B.1.</td><td colspan="2">$$V_0 = 0{,}1$$
$V_1 = 1{,}4\, V_0 - 1{,}4\, V_0^2 = 1{,}4 \times 0{,}1 - 1{,}4 \times 0{,}1^2 = 0{,}126.$
Au bout d'une année, avec ce modèle, il y aura 126 000 oiseaux.</td></tr>
<tr><td>B.2.a.</td><td colspan="2">$$f(x) = x$$
$$\Leftrightarrow 1{,}4x - 1{,}4x^2 = x$$
$$\Leftrightarrow 0{,}4x - 1{,}4x^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x(0{,}4 - 1{,}4x) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad 0{,}4 - 1{,}4x = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad -1{,}4x = -0{,}4$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{-0{,}4}{-1{,}4} = \frac{2}{7}$$
Les solutions sont $\left\{0; \frac{2}{7}\right\}$.</td></tr>
<tr><td>B.2.b.</td><td colspan="2">$\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right], \ \ f(x) = 1{,}4x - 1{,}4x^2$
La fonction f est dérivable sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.
$\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right], \ \ f'(x) = 1{,}4 - 1{,}4 \times 2x$
$$f'(x) = 1{,}4 - 2{,}8x$$
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1{,}4 - 2{,}8x > 0$$
$$\Leftrightarrow -2{,}8x > -1{,}4$$
$$\Leftrightarrow x < \frac{-1{,}4}{-2{,}8}$$
$$\Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$
J'en déduis que, $\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right], f'(x) > 0$ et donc la fonction f est croissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.</td></tr>
</table>

	B.3.a.	Démontrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$: $0 \leq V_n \leq V_{n+1} \leq \frac{1}{2}$ est vraie pour tout entier naturel n. **Initialisation : pour $n = 0$** $V_0 = 0{,}1 \quad \text{et} \quad V_1 = 0{,}126$ $\text{donc } 0 \leq V_0 \leq V_1 \leq \frac{1}{2}$ **Hérédité : Je suppose la propriété vraie au rang n** Je suppose que, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé arbitrairement, $0 \leq V_n \leq V_{n+1} \leq \frac{1}{2}$ La fonction $x \longmapsto f(x)$ est croissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ On a donc $f(0) \leq f(V_n) \leq f(V_{n+1}) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$ De plus, $V_{n+1} = f(V_n)$, $\quad V_{n+2} = f(V_{n+1})$, $\quad f(0) = 0$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1{,}4}{2} - \frac{1{,}4}{4} = 0{,}35$
	B.3.a.	Par conséquent $0 \leq V_{n+1} \leq V_{n+2} \leq 0{,}35 \leq \frac{1}{2}$ La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie. J'en déduis que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie, pour tout entier n $\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq V_n \leq V_{n+1} \leq \frac{1}{2}$
	B.3.b.	$\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_n \leq V_{n+1}$ la suite (V_n) est donc croissante. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_n \leq \frac{1}{2}$ la suite (V_n) est donc majorée par $\frac{1}{2}$. La suite (V_n) est donc convergente.
	B.3.c.	On note ℓ la valeur de la limite de la suite (V_n). La fonction f étant continue, ℓ est alors solution de l'équation $f(x) = x$ qui admet pour solutions 0 et $\frac{2}{7}$. Or, la suite (V_n) est croissante et $V_0 = 0{,}1$ donc $\ell = \frac{2}{7}$.
	B.3.d.	Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel sera préservé car le nombre d'oiseaux va tendre en augmentant vers 285 714 individus.
	B.4.a.	Si on saisit `seuil(0.3)` alors la calculatrice se bloque et ne répond pas.  La condition « $V < 0.3$ » est toujours `Vraie` donc la boucle `While` ne se termine jamais. Il faut interrompre le programme.

	B.4.b.	  La valeur renvoyée par la saisie de `seuil(0.27)` est 8. Selon ce modèle, le nombre d'oiseaux dépassera le nombre de 270 000 au bout de 8 années.

Correction de l'exercice 2. Probabilités

Entre 2010 et 2022, en France, 10 111 028 accouchements ont été recensés, parmi lesquels 169 359 ont donné naissance à des jumeaux et 2 558 ont donné naissance à au moins trois enfants.

1) **a.** Avec une précision de 0,1 %, calculer parmi tous les accouchements recensés, le pourcentage d'accouchements donnant naissance **à un seul enfant** sur la période 2010-2022.

b. Vérifier que le pourcentage d'accouchements qui ont donné naissance **à au moins trois enfants** est inférieur à 0,1 %. *On considérera, pour la suite, que ce pourcentage est négligeable.*

On appelle accouchement ordinaire, un accouchement donnant naissance à un seul enfant. On appelle accouchement double, un accouchement donnant naissance à exactement deux enfants.

On considère dans la suite de l'exercice qu'un accouchement est soit ordinaire, soit double. La probabilité d'un accouchement ordinaire est égale à 0,983 et celle d'un accouchement double est alors égale à 0,017. *Les probabilités calculées dans la suite seront arrondies au millième.*

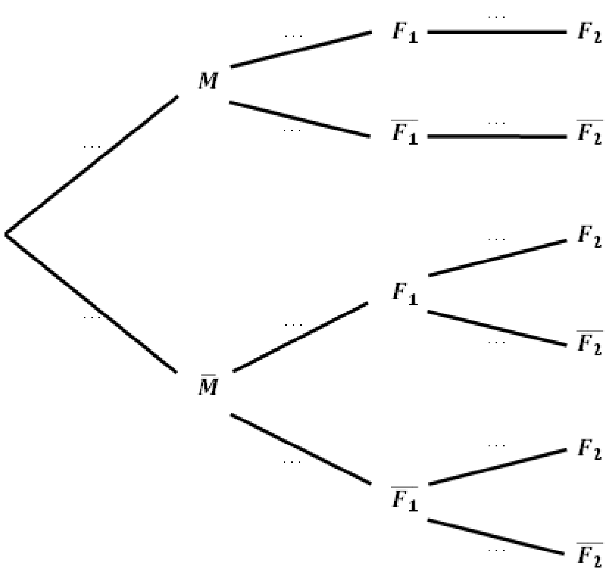
2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on admet qu'un jour donné dans une maternité, on réalise n accouchements. On considère que ces n accouchements sont indépendants les uns des autres. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'accouchements doubles pratiqués ce jour.

a. Dans le cas où $n = 20$, préciser la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X et calculer la probabilité qu'on réalise exactement un accouchement double.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, par la méthode de votre choix que vous expliciterez, déterminer la plus petite valeur de n telle que $P(X \geq 1) \geq 0{,}99$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

3) Dans cette maternité, on estime qu'un tiers des jumeaux sont des jumeaux monozygotes (appelés « vrais jumeaux » qui sont obligatoirement de même sexe : deux garçons ou deux filles) et donc deux-tiers des jumeaux sont des jumeaux dizygotes (appelés « faux jumeaux », qui peuvent être de sexes différents : deux garçons, deux filles ou un garçon et une fille).

Dans le cas de naissances doubles, on admet que, comme pour les naissances ordinaires, la probabilité d'être une fille à la naissance est égale à



0,49 et que celle d'être un garçon à la naissance est égale à 0,51. Dans le cas d'une naissance double de jumeaux dizygotes, on admet aussi que le sexe du second nouveau-né des jumeaux est indépendant du sexe du premier nouveau-né. On choisit au hasard un accouchement double réalisé dans cette maternité et on considère les évènements suivants :

- M : « les jumeaux sont monozygotes » ;
- F_1 : « le premier nouveau-né est une fille » ;
- F_2 : « le second nouveau-né est une fille ».

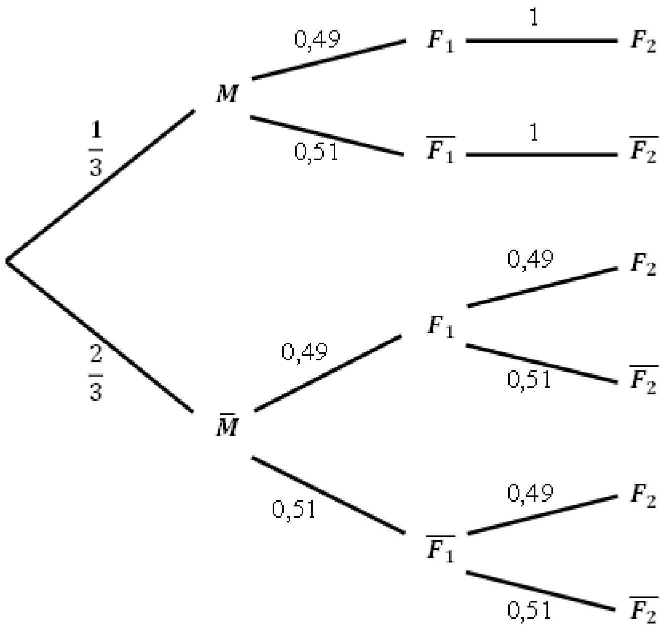
On notera $P(A)$ la probabilité de l'évènement A et $\bar{A}$ l'évènement contraire de A.

a. Recopier puis compléter l'arbre pondéré ci-contre0.

b. Montrer que la probabilité que les deux nouveau-nés soient des filles est 0,3234.

c. Les deux nouveau-nés sont des jumelles. Calculer la probabilité qu'elles soient monozygotes.

Exercice 2.	**1.a.**	Parmi tous les accouchements recensés, la proportion d'accouchements donnant naissance à un seul enfant sur la période 2010-2022 est $$\frac{10\,111\,028 - 169\,359 - 2\,558}{10\,111\,028} = \frac{9\,939\,111}{10\,111\,028} \approx 0.983 \text{ soit } 98{,}3\%$$
	1.b.	La proportion d'accouchements qui ont donné naissance à au moins trois enfants est $$\frac{2\,558}{10\,111\,028} \approx 2 \times 10^{-4} \text{ soit } 0{,}03\%$$ Ce pourcentage est bien inférieur à 0,1 %.
	2.a.	Un accouchement est soit ordinaire, soit double et la probabilité qu'un accouchement soit double est égale à 0,017. On répète 20 fois, de façon identique et indépendante, l'alternative où la probabilité qu'un accouchement soit double est 0,017. La variable aléatoire X qui compte le nombre d'accouchements doubles pratiqués ce jour, suit alors une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}017$. $$P(X = 1) = 20 \times 0{,}017 \times 0{,}983^{19} \approx 0{,}245$$
	2.b.	Pour $n \in \mathbb{N}^*$, X suit alors une loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}017$. $$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}983^n$$ $$1 - 0{,}983^n \geq 0{,}99$$ $$\Leftrightarrow -0{,}983^n \geq 0{,}99 - 1$$ $$\Leftrightarrow -0{,}983^n \geq -0{,}01$$ $$\Leftrightarrow 0{,}983^n \leq 0{,}01$$ $$\Leftrightarrow \ln(0{,}983^n) \leq \ln(0{,}01)$$ $$\Leftrightarrow n \times \ln(0{,}983) \leq \ln(0{,}01)$$ $$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}983)} \text{ car } \ln(0{,}983) < 0$$ $$\Leftrightarrow n \geq 268{,}6$$ A partir de 269 accouchements par jour, la probabilité d'avoir au moins un accouchement double est supérieure à 99%.

<table>
<tr><td></td><td>3.a.</td><td>
</td></tr>
<tr><td></td><td>3.b.</td><td>La probabilité d'avoir deux filles vaut :
$P(M \cap F_1 \cap F_2) + P(\overline{M} \cap F_1 \cap F_2) = \frac{1}{3} \times 0{,}49 + \frac{2}{3} \times 0{,}49^2 = 0{,}3234$</td></tr>
<tr><td></td><td>3.c.</td><td>Sachant que les deux nouveau-nés sont des jumelles, la probabilité qu'elles soient monozygotes vaut :
$$\frac{P(M \cap F_1 \cap F_2)}{P(M \cap F_1 \cap F_2) + P(\overline{M} \cap F_1 \cap F_2)} = \frac{\frac{1}{3} \times 0{,}49}{0{,}3234} \approx 0{,}505$$</td></tr>
</table>

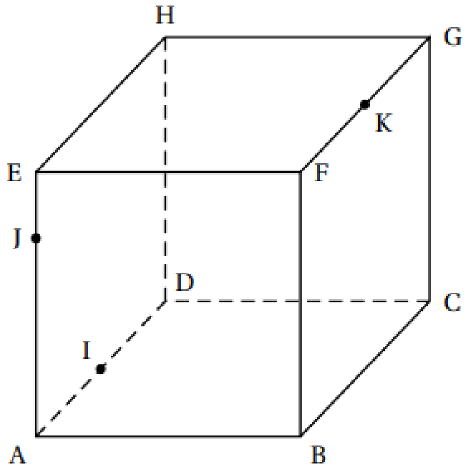
Correction de l'exercice 3. Géométrie dans l'espace

La figure ci-contre représente un cube $ABCDEFGH$.
Le point I est le milieu du segment $[AD]$, le point J vérifie $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ et le point K est le milieu du segment $[FG]$. On se place dans le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right)$.

►1. a. Donner sans justification les coordonnées des points I, J et K.

b. Déterminer les réels a et b pour que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\a\\b\end{pmatrix}$ soit orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$.

c. En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).



►2. a. Donner une représentation paramétrique de la droite (CG).
b. Calculer les coordonnées du point N, intersection du plan (IJK) et de la droite (CG).
c. Placer le point N sur la figure.
d. Construire la section du cube par le plan (IJK).

►3. On note R le projeté orthogonal du point F sur le plan (IJK).
On définit l'intérieur du cube comme l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \\ 0 < z < 1 \end{cases}$$

Le point R est-il à l'intérieur du cube ?

Exercice 3

▶1

$$I\left(0;\frac{1}{2};0\right)\quad J\left(0;0;\frac{3}{4}\right)\quad K\left(1;\frac{1}{2};1\right)$$

$$\vec{n}\begin{pmatrix}4\\a\\b\end{pmatrix}\qquad \overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0\\-1/2\\3/4\end{pmatrix}\qquad \overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$\vec{n}.\overrightarrow{IJ}=0 \Leftrightarrow 0-\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}b=0$

$\Leftrightarrow \frac{3}{4}b=\frac{1}{2}a$

$\Leftrightarrow a=\frac{3}{2}b$

$\vec{n}.\overrightarrow{IK}=0 \Leftrightarrow 4+0+b=0$

$\Leftrightarrow b=-4$

J'en déduis que $a=\frac{3}{2}b=\frac{3}{2}\times(-4)=-6$

Le vecteur $\vec{n}$ a donc pour coordonnées : $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-6\\-4\end{pmatrix}$

$\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-6\\-4\end{pmatrix}$ étant orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK), j'en déduis que $\vec{n}$ est normal au plan (IJK). L'équation cartésienne du plan (IJK) est donc de la forme $4x-6y-4z+d=0$

or $I\left(0;\frac{1}{2};0\right)\in(IJK)$ donc $4\times 0-6\times\frac{1}{2}-4\times 0+d=0$

$\Leftrightarrow -3+d=0$

$\Leftrightarrow d=3$

$(IJK)\ :\ 4x-6y-4z+3=0$

▶2

$$C(1;1;0)\quad G(1;1;1)\quad \overrightarrow{CG}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$(CG):\begin{cases}x=1\\y=1\\z=t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$$

$N(x;y;z)$ intersection du plan (IJK) et de la droite (CG)

$$\begin{cases}x=1\\y=1\\z=t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}\quad \text{et}\quad 4x-6y-4z+3=0$$

J'en déduis que $4\times 1-6\times 1-4\times t+3=0$

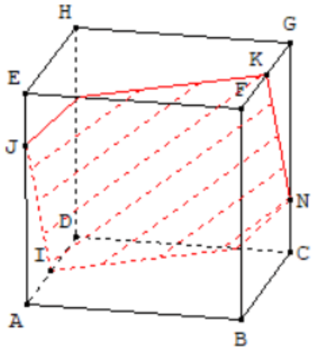
$\Leftrightarrow 4-6-4t+3=0$

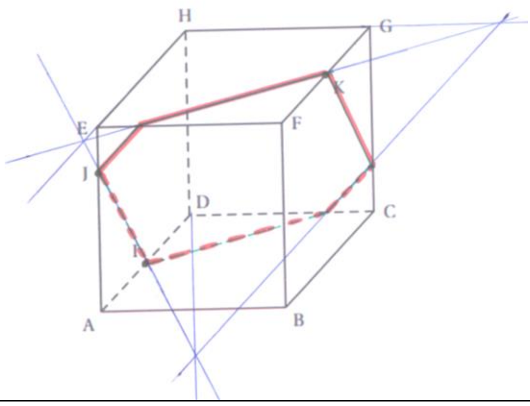
$\Leftrightarrow -4t+1=0$

$\Leftrightarrow -4t=-1$

$\Leftrightarrow t=\frac{1}{4}$

$N\left(1;1;\frac{1}{4}\right)$





▶3

$$F(1;0;1)$$

$R(x;y;z)$ le projeté orthogonal du point F sur le plan (IJK)

Le vecteur $\overrightarrow{RF}$ est donc colinéaire au vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-6\\-4\end{pmatrix}$ normal au plan (IJK).

Il existe $t \in \mathbb{R}$, tel que $\overrightarrow{RF} = t\,\vec{n}$ donc

$$\begin{cases} 1-x=4t \\ -y=-6t \\ 1-z=-4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-4t=x \\ y=6t \\ 1+4t=z \end{cases} \quad \text{et } \ 4x-6y-4z+3=0$$

J'en déduis que :

$$4(1-4t)-6(6t)-4(1+4t)+3=0$$
$$\Leftrightarrow 4-16t-36t-4-16t+3=0$$
$$\Leftrightarrow -68t+3=0$$
$$\Leftrightarrow -68t=-3$$
$$\Leftrightarrow t=\frac{3}{68}$$

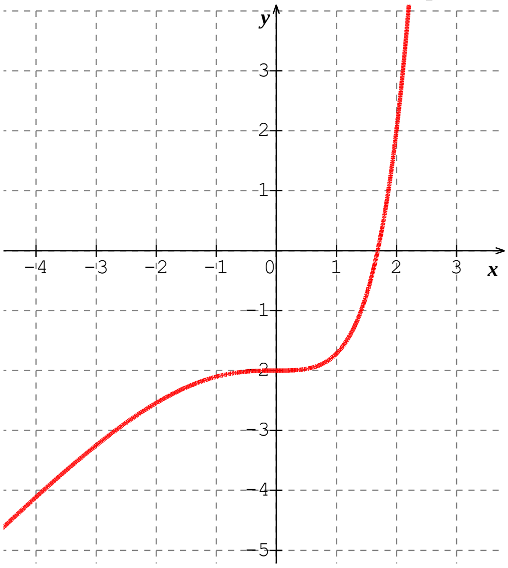
$$\begin{cases} x=1-4t=1-4\times\dfrac{3}{68}=\dfrac{14}{17} \\ y=6t=6\times\dfrac{3}{68}=\dfrac{9}{34} \\ z=1+4t=1+4\times\dfrac{3}{68}=\dfrac{20}{17} \end{cases}$$

J'en déduis que $R\left(\frac{14}{17};\frac{9}{34};\frac{20}{17}\right)$

Puisque $\frac{20}{17} \geq 1$, le point R n'est pas à l'intérieur du cube.

Correction de l'exercice 4. Etude de fonctions

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=(x-2)e^{x}+x$



C_h est la représentation graphique de h dans un repère orthonormé.

▶1. a. Calculer h', puis h''.

b. Déterminer le sens de variation de h', puis le signe de h'.

c. En déduire les variations de h.

▶2. Déterminer les limites de h en $-\infty$ et $+\infty$. Dresser le tableau de variations de h.

▶3. a. La droite (d) est la droite d'équation $y=x$. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de C_h et (d).

b. Etudier les positions relatives de C_h et (d) c'est-à-dire préciser si C_h est au-dessus de (d) ou au-dessous.

c. Déterminer la tangente (T) à C_h au point d'abscisse 0.

▶4. Tracer (d) et (T) dans le repère ci-dessous.

Exercice 4.

▶1

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R},\ \ h'(x) = 1 \times e^x + (x-2)e^x + 1$
$h'(x) = (1 + x - 2)e^x + 1$
$h'(x) = (x-1)e^x + 1$

La fonction h' est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R},\ \ h''(x) = 1 \times e^x + (x-1)e^x$
$h''(x) = (1 + x - 1)e^x$
$h''(x) = x\,e^x$

$$h''(x) > 0 \Leftrightarrow x\,e^x > 0$$
$$\Leftrightarrow x > 0 \quad \text{car} \quad e^x > 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h''(x)$		$-$	0	$+$	
$h'(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$h'(0) = (0-1)e^0 + 1 = -1 + 1 = 0$
J'en déduis que, $\forall x \in \mathbb{R},\ \ h'(x) \geq 0$

On peut en déduire que la fonction h est croissante sur $\mathbb{R}$.

▶2

$\forall x \in \mathbb{R},\ \ h(x) = (x-2)e^x + x$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x - 2 = +\infty \end{array}\right\} \text{donc, par produit, } \lim\limits_{x \to +\infty} (x-2)e^x = +\infty$$

et donc, $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x - 2 = -\infty \end{array}\right\} \text{FI, par produit}$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \ h(x) = xe^x - 2e^x + x$
Par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} -2e^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty \end{array}\right\} \text{donc, par somme, } \lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

$h(0) = (0-2)e^0 + 0 = -2$

	▶3	$(d):\ y = x$ $$h(x) = x$$ $$\Leftrightarrow (x-2)e^x + x = x$$ $$\Leftrightarrow (x-2)e^x = 0$$ $$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ car } e^x \neq 0$$ $$\Leftrightarrow x = 2$$ Les coordonnées du point d’intersection de C_h et (d) sont $(2; 2)$.
		$$h(x) > x$$ $$\Leftrightarrow (x-2)e^x + x > x$$ $$\Leftrightarrow (x-2)e^x > 0$$ $$\Leftrightarrow x - 2 > 0 \text{ car } e^x > 0$$ $$\Leftrightarrow x > 2$$ La courbe C_h est au-dessus de (d) sur $]2; +\infty[$ et au-dessous de (d) sur $]-\infty; 2[$.
		$h(0) = (0-2)e^0 + 0 = -2$ $h'(0) = (0-1)e^0 + 1 = -1 + 1 = 0$ $$y = h'(0)(x-0) + h(0)$$ $$y = -2$$
	▶4