Mardi 4 février 2025

Terminale ➡ Contrôle n° 5

Spécialité Mathématiques

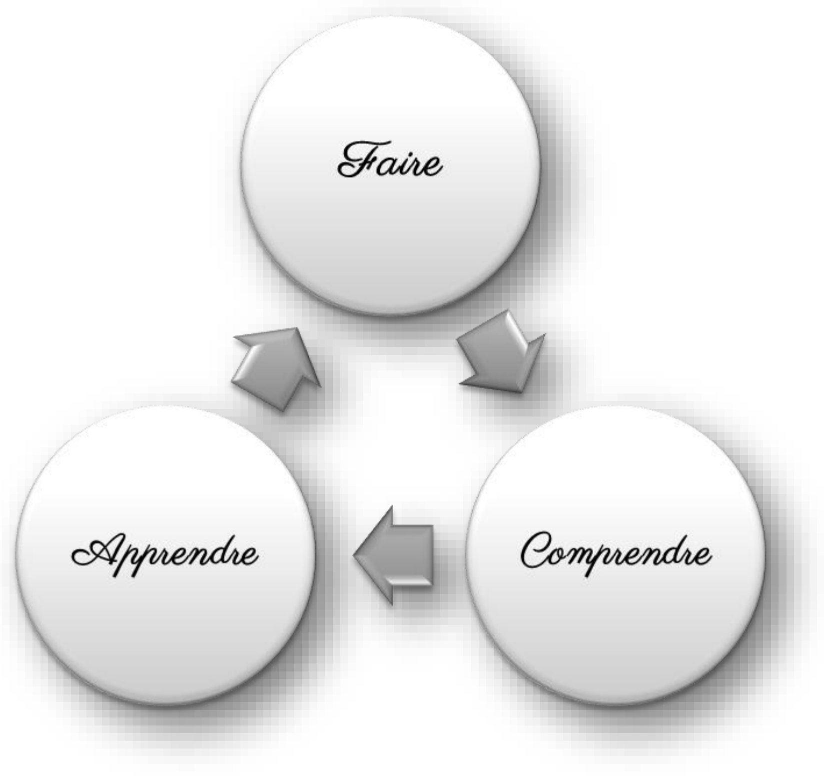


Table des matières

Terminale ➡ Contrôle n° 5
Spécialité Mathématiques - Calculatrice autorisée

Enoncé du sujet

Exercice 1. (7 points)

Le Tournoi des Six Nations est une compétition de rugby à XV, disputée chaque année en février et mars par les équipes masculines d'Angleterre, d'Écosse, de France, du pays de Galles, d'Irlande et d'Italie. Chaque équipe affronte les cinq autres une et une seule fois.

1. Combien de matchs sont organisés au total dans ce tournoi ?
2. a) Combien peut-on former de podium différents (3 premiers) ?
   b) En 2024, la France s'est classée 2e du tournoi. Combien peut-on former de classements complets différents avec la France à la 2e place (sans ex-aequo et avec les 6 équipes) ?
3. Pour le tournoi 2025, 18 joueurs « arrières » ont été sélectionnés.
   a) Combien de possibilités a-t-on pour choisir 7 joueurs « arrières » parmi les sélectionnés ?
   b) Sachant qu'Antoine Dupont est assuré d'avoir sa place dans l'équipe mais que Romain Ntamack en est exclu à cause d'un carton rouge, combien de possibilités restent-ils pour choisir les « arrières » restants ?
4. Simplifier l'écriture, pour tout entier naturel non nul n de :

$$A = \frac{(n-1)\,!}{(n+2)\,!} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\quad B = k\binom{n}{k} - n\binom{n-1}{k-1}$$

Exercice 2. (8 points)

Ces dernières années, la rougeole a fait son retour suite à la diminution du nombre de personnes vaccinées. Dans une région française, une étude statistique a montré que :
- 80 % de cette population est vaccinée contre la rougeole ;
- parmi les personnes vaccinées contre la rougeole, 0,1 % d'entre elles a contracté cette maladie ;
- parmi les personnes non vaccinées contre la rougeole, 10 % d'entre elles ont contracté cette maladie.

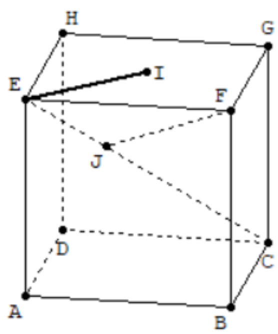
On choisit au hasard une personne concernée par cette enquête. Chaque personne a la même probabilité d'être choisie. On considère les évènements suivants R : « la personne choisie est atteinte de la rougeole » et V : « la personne choisie est vaccinée contre la rougeole ».

1. Démontrer que la probabilité de l'évènement R est égale à 0,0208.
2. La personne choisie est atteinte de la rougeole. Calculer la probabilité qu'elle ne soit pas vaccinée, à 0,1 %.
3. Déterminer la probabilité que la personne choisie au hasard soit vaccinée sachant qu'elle n'est pas atteinte de la rougeole.
4. En cas de rougeole, les complications de type pneumonie concernent 6% des personnes. En 2023, on a recensé 117 cas de rougeole en France. On prélève chaque année, 117 personnes ayant la rougeole, on note X le nombre de personnes ayant une complication de type pneumonie parmi elles.

a. Quelle est la loi de X ? On donnera ses paramètres.
b. Déterminer la valeur exacte de $P(X=7)$, puis une valeur approchée.
c. Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins une personne ayant une complication de type pneumonie en valeur exacte, puis en valeur approchée.
d. Déterminer l'espérance de X. Interpréter ce résultat.

Exercice 3. (5 points)

$ABCDEFGH$ est un cube. On note I le milieu de $[HF]$ et J vérifie $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$



1. Démontrer que $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$.
2. Dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right)$,

a) Déterminer, sans justifier les coordonnées des sommets du cube ainsi que des points I et J.
b) Les droites (EI) et (JF) sont-elles parallèles ? On justifiera sa réponse.
c) Les points A, I et J sont-ils alignés ? On justifiera sa réponse.
d) Déterminer deux réels α et β tels que $\overrightarrow{CG} = \alpha\overrightarrow{GI} + \beta\overrightarrow{GJ}$. Que peut-on en déduire ?

Terminale → Contrôle n° 5

Spécialité Mathématiques

Correction du sujet

Correction de l'exercice 1. (7 points)

Le Tournoi des Six Nations est une compétition de rugby à XV, disputée chaque année en février et mars par les équipes masculines d'Angleterre, d'Écosse, de France, du pays de Galles, d'Irlande et d'Italie. Chaque équipe affronte les cinq autres une et une seule fois.

1. Combien de matchs sont organisés au total dans ce tournoi ?
2. a) Combien peut-on former de podium différents (3 premiers) ?
   b) En 2024, la France s'est classée 2e du tournoi. Combien peut-on former de classements complets différents avec la France à la 2e place (sans ex-aequo et avec les 6 équipes) ?
3. Pour le tournoi 2025, 18 joueurs « arrières » ont été sélectionnés.
   a) Combien de possibilités a-t-on pour choisir 7 joueurs « arrières » parmi les sélectionnés ?
   b) Sachant qu'Antoine Dupont est assuré d'avoir sa place dans l'équipe mais que Romain Ntamack en est exclu à cause d'un carton rouge, combien de possibilités restent-ils pour choisir les « arrières » restants ?
4. Simplifier l'écriture, pour tout entier naturel non nul n de :

$$A=\frac{(n-1)\,!}{(n+2)\,!} \quad \text{et} \quad \forall k\in\mathbb{N},\quad B=k\binom{n}{k}-n\binom{n-1}{k-1}$$

Exercice 1.	1	Le nombre de matchs organisés est $\binom{6}{2}=\frac{6!}{2!\,4!}=15$ (sans répétition et sans ordre)
	2	Le nombre de podium différents est un arrangement de 3 parmi 6 équipes soit $6\times5\times4=120$ possibilités (sans répétition mais avec ordre)
		Le nombre de classements complets avec les 6 équipes mais la France en 2e position est une permutation de 5 équipes soit $5!=120$ possibilités.
	3	Le choix de 7 joueurs « arrières » parmi 18 sélectionnés correspond à une combinaison de 7 parmi 18 : $\binom{18}{7}=31\,824$ possibilités (sans répétition et sans ordre)
	4	Antoine Dupont étant assuré d'avoir sa place mais Romain Ntamack en est exclu, donc le choix n'est plus que de 6 joueurs parmi 16 sélectionnés restants soit $\binom{16}{6}=8\,008$ possibilités (sans répétition et sans ordre)
	5	$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad A=\frac{(n-1)\,!}{(n+2)\,!}=\frac{(n-1)\,!}{(n+2)\times(n+1)\times n\times(n-1)\,!}=\frac{1}{(n+2)\times(n+1)\times n}$
		$\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall k\in\mathbb{N},\quad B=k\binom{n}{k}-n\binom{n-1}{k-1}$ $B=k\times\frac{n\,!}{k\,!\times(n-k)!}-n\times\frac{(n-1)\,!}{(k-1)\,!\times\big(n-1-(k-1)\big)!}$ $B=\frac{k\times n\,!}{k\times(k-1)\,!\times(n-k)!}-\frac{n\times(n-1)\,!}{(k-1)\,!\times(n-1-k+1)!}$ $B=\frac{n\,!}{(k-1)\,!\times(n-k)!}-\frac{n\,!}{(k-1)\,!\times(n-k)!}$ $B=0$

Correction de l'exercice 2. (8 points)

Ces dernières années, la rougeole a fait son retour suite à la diminution du nombre de personnes vaccinées. Dans une région française, une étude statistique a montré que :

- 80 % de cette population est vaccinée contre la rougeole ;
- parmi les personnes vaccinées contre la rougeole, 0,1 % d'entre elles a contracté cette maladie ;
- parmi les personnes non vaccinées contre la rougeole, 10 % d'entre elles ont contracté cette maladie.

On choisit au hasard une personne concernée par cette enquête. Chaque personne a la même probabilité d'être choisie. On considère les évènements suivants R : « la personne choisie est atteinte de la rougeole » et V : « la personne choisie est vaccinée contre la rougeole ».

1 Démontrer que la probabilité de l'évènement R est égale à 0,0208.

2 La personne choisie est atteinte de la rougeole. Calculer la probabilité qu'elle ne soit pas vaccinée, à 0,1 %.

3 Déterminer la probabilité que la personne choisie au hasard soit vaccinée sachant qu'elle n'est pas atteinte de la rougeole.

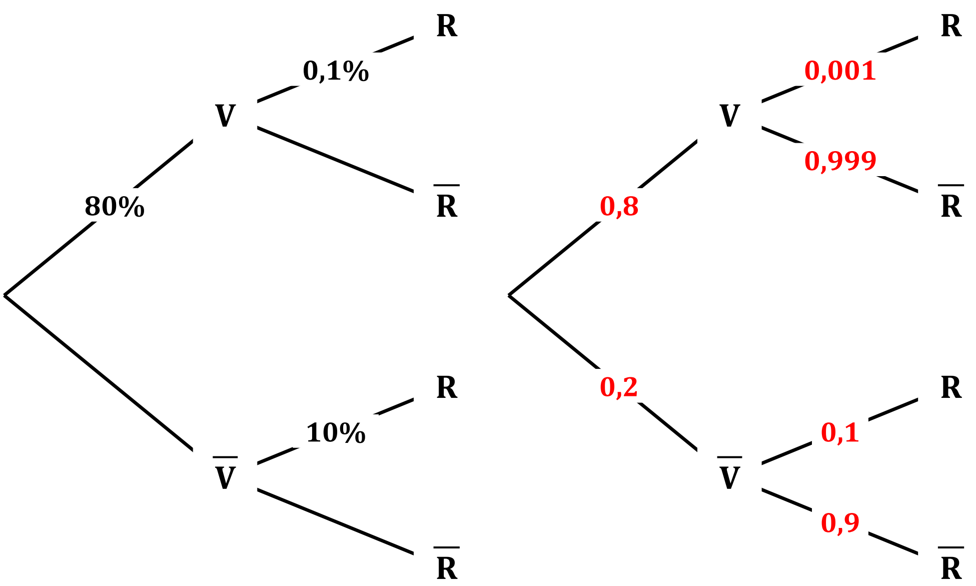
4 En cas de rougeole, les complications de type pneumonie concernent 6% des personnes. En 2023, on a recensé 117 cas de rougeole en France. On prélève chaque année, 117 personnes ayant la rougeole, on note X le nombre de personnes ayant une complication de type pneumonie parmi elles.

a. Quelle est la loi de X ? On donnera ses paramètres.

b. Déterminer la valeur exacte de $P(X = 7)$, puis une valeur approchée.

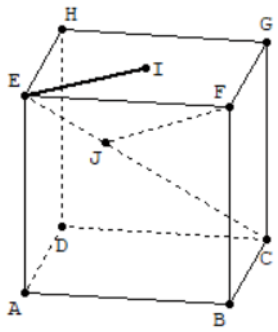
c. Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins une personne ayant une complication de type pneumonie en valeur exacte, puis en valeur approchée.

d. Déterminer l'espérance de X. Interpréter ce résultat.

Exercice 2.	1	 $P(R) = P(R \cap V) + P(R \cap \bar{V})$ $P(R) = 0{,}8 \times 0{,}001 + 0{,}2 \times 0{,}1 = 0{,}0208$ soit 2,08 % de cas de rougeole.
	2	$P_R(\bar{V}) = \dfrac{P(R \cap \bar{V})}{P(R)} = \dfrac{0{,}2 \times 0{,}1}{0{,}0208} = \dfrac{25}{26} \approx 0{,}962$ soit 96,2 %
	3	$P_{\bar{R}}(V) = \dfrac{P(V \cap \bar{R})}{P(\bar{R})} = \dfrac{0{,}8 \times 0{,}999}{1 - 0{,}0208} = \dfrac{111}{136} \approx 0{,}816$ soit 81,6 %
	4	On répète 117 fois, de façon identique et indépendante, le schéma de Bernoulli où la probabilité que la personne ait une complication de type pneumonie est 6% donc X le nombre de personnes ayant une complication de type pneumonie suit une loi binomiale de paramètres $p = 0{,}06$ et $n = 117$.
		$P(X = 7) = \binom{117}{7} \times 0{,}06^7 \times 0{,}94^{110} \approx 0{,}154$

		$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$ $P(X \geq 1) = 1 - 0{,}94^{117} \approx 0{,}999$
		$E(X) = n \times p = 117 \times 0{,}06 = 7{,}02$ C'est le nombre moyen de personnes qui ont une complication de type pneumonie que l'on peut espérer avoir.

Correction de l'exercice 3. (5 points)



$ABCDEFGH$ est un cube. On note I le milieu de $[HF]$ et J vérifie $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$

1 Démontrer que $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$.

2 Dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right)$,

a) Déterminer, sans justifier les coordonnées des sommets du cube ainsi que des points I et J.

b) Les droites (EI) et (JF) sont-elles parallèles ? On justifiera sa réponse.

c) Les points A, I et J sont-ils alignés ? On justifiera sa réponse.

d) Déterminer deux réels α et β tels que $\overrightarrow{CG} = \alpha\overrightarrow{GI} + \beta\overrightarrow{GJ}$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 3.	**1**	$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EJ}$ $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$ $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$ $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{3}\overrightarrow{AE} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$
	2	$A(0;0;0)$ $\quad$ $E(0;0;1)$ $\quad$ $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1\right)$ $B(1;0;0)$ $\quad$ $F(1;0;1)$ $C(1;1;0)$ $\quad$ $G(1;1;1)$ $\quad$ $J\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ $D(0;1;0)$ $\quad$ $H(0;1;1)$
		$\overrightarrow{EI}\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\0\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{JF}\begin{pmatrix}2/3\\-1/3\\1/3\end{pmatrix}$ $\frac{1/2}{2/3} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$ mais $\frac{1/2}{-1/3} = \frac{1}{2} \times -3 = \frac{-3}{2}$ puisque $\frac{3}{4} \neq -\frac{3}{2}$, les vecteurs $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{JF}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (EI) et (JF) ne sont pas parallèles.
		$\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}1/3\\1/3\\2/3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ Les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont donc colinéaires donc les points A, I et J sont alignés.

		$$\overrightarrow{CG} = \alpha\overrightarrow{GI} + \beta\overrightarrow{GJ}$$ $$\overrightarrow{CG}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{GI}\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\0\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{GJ}\begin{pmatrix}-2/3\\-2/3\\-1/3\end{pmatrix}$$ Je résous le système : $$\begin{cases}0 = -\frac{1}{2}\alpha - \frac{2}{3}\beta\\0 = -\frac{1}{2}\alpha - \frac{2}{3}\beta\\1 = -\frac{1}{3}\beta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta = -3\\\frac{1}{2}\alpha = -\frac{2}{3}\times(-3)\end{cases}$$ $$\Leftrightarrow \begin{cases}\beta = -3\\\frac{1}{2}\alpha = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta = -3\\\alpha = 4\end{cases}$$ donc $\overrightarrow{CG} = 4\overrightarrow{GI} - 3\overrightarrow{GJ}$ On peut en déduire que les vecteurs $\overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{GI}$ et $\overrightarrow{GJ}$ sont coplanaires. Par conséquent, les points C, G, I et J sont coplanaires.