Mardi 11 mars 2025

Terminale ➡ Contrôle n° 5

Spécialité Mathématiques

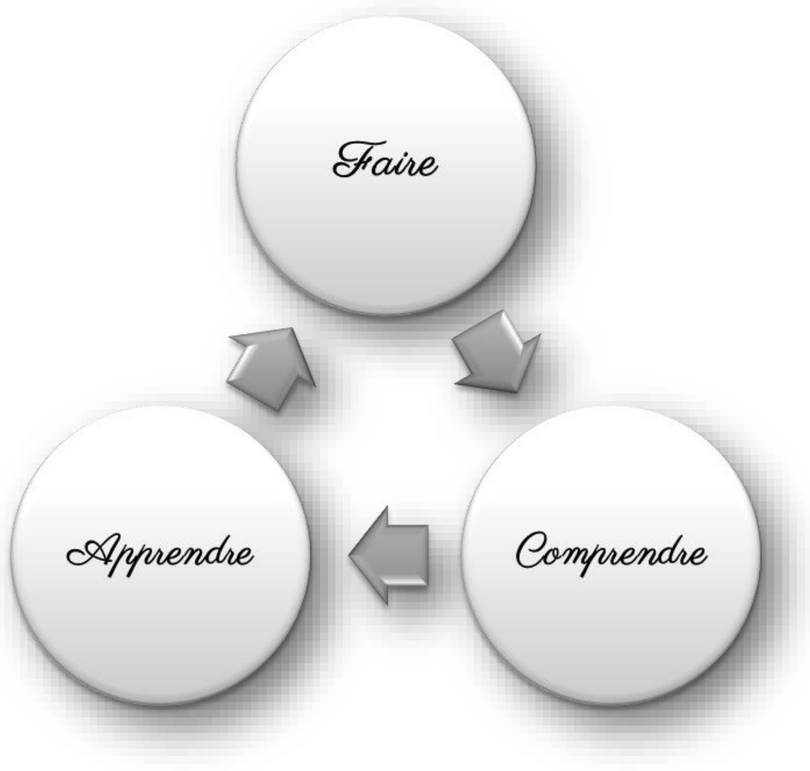


Table des matières

Enoncé du sujet 2

Exercice 1. (10 points) 2

Exercice 2. (10 points) 2

Correction du sujet 3

Correction de l'exercice 1. (10 points) 3

Correction de l'exercice 2. (10 points) 5

Terminale ➡ Contrôle n° 6

Spécialité Mathématiques - Calculatrice autorisée

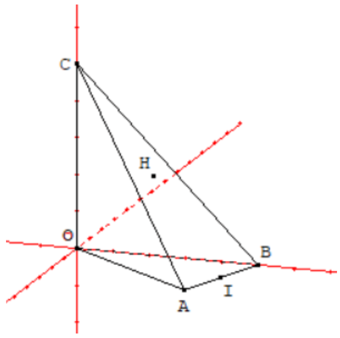
Enoncé du sujet

Exercice 1. (10 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$.

On considère les points $A(6;8;0)$ $B(0;10;0)$ et $C(0;0;10)$.

On note I le milieu du segment $[AB]$.



1 Déterminer les coordonnées du point I.

2 **a.** Démontrer que les triangles OAC et OBC sont rectangles et isocèles.

b. Quelle est la nature du triangle ABC ?

3 Soit H le point de coordonnées

$$\left(\frac{30}{19};\frac{90}{19};\frac{90}{19}\right)$$

a. Démontrer que les points H, C et I sont alignés.

b. Démontrer que H est le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).

c. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

4 **a.** Calculer l'aire du triangle OAB.

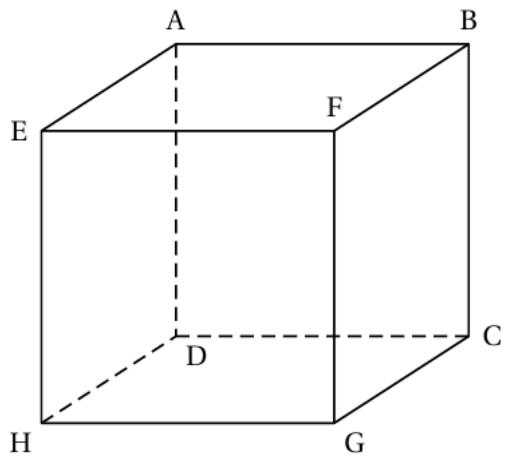
b. En déduire le volume du tétraèdre $OABC$.

c. Déterminer la distance du point O au plan (ABC).

d. Calculer l'aire du triangle ABC.

Exercice 2. (10 points)

On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous tel que $AB = 1$. Les points M, N et P sont les milieux respectifs des segment $[BC]$, $[HG]$ et $[AE]$.



On se place dans le repère orthonormé $(D;\overrightarrow{DH};\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA})$.

1 Déterminer les coordonnées de tous les points.

2 a. Déterminer les réels a et b tels que le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\a\\b\end{pmatrix}$ soit normal au plan (MNP).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (MNP).

3 Déterminer les coordonnées du point L intersection entre le plan (MNP) et le segment $[EH]$.

4 Tracer alors la section du plan (MNP) sur le cube.

5 Existe-t-il un point K de la droite (AG) tel que le triangle KMN soit rectangle en K.

6 Déterminer l'intersection entre la sphère de centre M et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et la droite (AG). Que peut-on en déduire ?

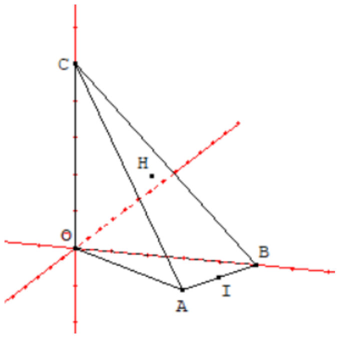
Terminale ➡ Contrôle n° 6

Spécialité Mathématiques

Correction du sujet

Correction de l'exercice 1. (10 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k}\right)$.
On considère les points $A(6;8;0)\quad B(0;10;0)$ et $C(0;0;10)$.
On note I le milieu du segment $[AB]$.



1 Déterminer les coordonnées du point I.

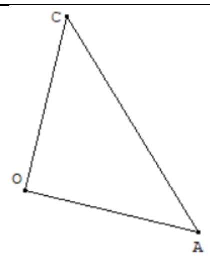
2 **a.** Démontrer que les triangles OAC et OBC sont rectangles et isocèles.
b. Quelle est la nature du triangle ABC ?

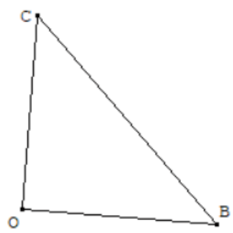
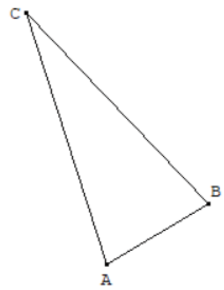
3 Soit H le point de coordonnées

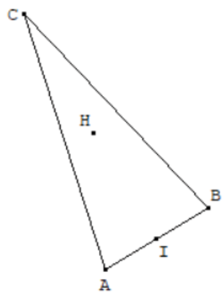
$$\left(\frac{30}{19};\frac{90}{19};\frac{90}{19}\right)$$

a. Démontrer que les points H, C et I sont alignés.
b. Démontrer que H est le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).
c. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

4 **a.** Calculer l'aire du triangle OAB.
b. En déduire le volume du tétraèdre $OABC$.
c. Déterminer la distance du point O au plan (ABC).
d. Calculer l'aire du triangle ABC.

<table>
<tr>
<td rowspan="3">Exercice 1.</td>
<td>1</td>
<td>$A(6;8;0)\quad B(0;10;0)$
$I\left(\frac{6+0}{2};\frac{8+10}{2};\frac{0+0}{2}\right)$
$I(3;9;0)$</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">2</td>
<td>$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}6\\8\\0\end{pmatrix}\quad\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}0\\0\\10\end{pmatrix}\quad\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}0\\10\\0\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}=0+0+0=0$ donc $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont orthogonaux.
$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}=0+0+0=0$ donc $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont orthogonaux.
Les triangles OAC et OBC sont donc rectangles en O.
3
De plus, $OA=\sqrt{6^2+8^2+0}=\sqrt{100}=10$
$OC=\sqrt{10^2}=10\quad OB=\sqrt{10^2}=10$
J'en déduis que les triangles OAC et OBC sont rectangles et isocèles en O.



</td>
</tr>
<tr>
<td>Méthode n°1 : Les triangle OBC et OAC sont égaux car ils sont tous les deux rectangles et isocèles en O et ils ont le côté $[OC]$ en commun. Je peux alors en déduire que les longueurs BC et AC sont égales.
Méthode n°2 :
$A(6;8;0)\quad B(0;10;0)$ et $C(0;0;10)$
$\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}0\\10\\-10\end{pmatrix}\quad\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}6\\8\\-10\end{pmatrix}$
De plus, $CA=\sqrt{6^2+8^2+10^2}=\sqrt{200}=10\sqrt{2}$
$CB=\sqrt{10^2+10^2}=\sqrt{200}=10\sqrt{2}=CA$
Mais $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}=0+80+100=180\neq 0$
Le triangle ABC est isocèle en C.

</td>
</tr>
</table>



$$H\left(\frac{30}{19};\frac{90}{19};\frac{90}{19}\right) \quad I(3;9;0) \quad C(0;0;10)$$

$$\overrightarrow{CI}\begin{pmatrix}3\\9\\-10\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}30/19\\90/19\\-100/19\end{pmatrix}$$

$$\frac{\frac{30}{19}}{3}=\frac{30}{19}\times\frac{1}{3}=\frac{10}{19}$$

$$\frac{\frac{90}{19}}{9}=\frac{90}{19}*\frac{1}{9}=\frac{10}{19}$$

$$\frac{-100/19}{-10}=\frac{-100}{19}*\frac{1}{-10}=\frac{10}{19}$$

J'en déduis que $\frac{10}{19}\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CH}$
Donc, les points H, C et I sont alignés

3

Puisque les points H, C et I sont alignés, je peux en déduire que $H \in (ABC)$ car $I \in (ABC)$.
Il me reste à démontrer que $\overrightarrow{OH}$ est orthogonal au plan (ABC).

$$\overrightarrow{OH}\begin{pmatrix}30/19\\90/19\\90/19\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}0\\10\\-10\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}6\\8\\-10\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{CB}=0+\frac{900}{19}-\frac{900}{19}=0$$

$$\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{CA}=\frac{180}{19}+\frac{720}{19}-\frac{900}{19}=0$$

$\overrightarrow{OH}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) donc $\overrightarrow{OH}$ est normal au plan (ABC). Je peux en déduire que H est le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC)

$$\overrightarrow{OH}\begin{pmatrix}30/19\\90/19\\90/19\end{pmatrix}\text{est normal au plan }(ABC)$$

Donc

$$\frac{19}{30}\times\overrightarrow{OH}\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}\text{est aussi normal au plan }(ABC)$$

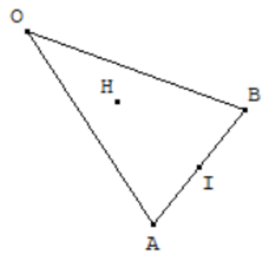
Une équation cartésienne du plan (ABC) s'écrira donc :

$$x+3y+3z+d=0$$

or $C(0;0;10) \in (ABC)$
donc

$$0+0+30+d=0$$
$$\Leftrightarrow d=-30$$
$$x+3y+3z-30=0$$

4



Méthode n°1 : $A(6;8;0)$ $\quad B(0;10;0)$

$$\mathcal{B}=\frac{y_B\times x_A}{2}=\frac{10\times 6}{2}=30$$

Méthode n°2 :

$OA=\sqrt{6^2+8^2+0}=\sqrt{100}=10 \quad OB=\sqrt{10^2}=10$

Le triangles OAB est isocèle en O et I est le milieu de $[AB]$. Par symétrie, $[OI]$ est donc la hauteur du triangle et $[AB]$ sa base.

$$I(3;9;0) \quad \overrightarrow{OI}\begin{pmatrix}3\\9\\0\end{pmatrix} \quad OI=\sqrt{3^2+9^2}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$$

$$A(6;8;0) \quad B(0;10;0) \quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\2\\0\end{pmatrix} \text{ donc } AB=\sqrt{6^2+2^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

L'aire du triangle OAB vaut donc $\mathcal{B}=\frac{OI\times AB}{2}=\frac{3\sqrt{10}\times 2\sqrt{10}}{2}=30$

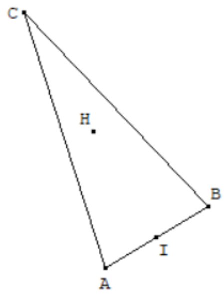
Les triangles OAC et OBC sont donc rectangles en O, le segment $[OC]$ est donc la hauteur du tétraèdre $OABC$ de base OAB.
Le volume du tétraèdre vaut donc :

$$\frac{OC \times \mathcal{B}}{3} = \frac{10 \times 30}{3} = 100$$

H étant le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC), la distance du point O au plan (ABC) est donc la distance OH.

$$\overrightarrow{OH}\begin{pmatrix} 30/19 \\ 90/19 \\ 90/19 \end{pmatrix} \text{ donc } OH = \sqrt{\frac{30^2}{19^2} + \frac{90^2}{19^2} \times 2} = \frac{\sqrt{17100}}{19} = \frac{30\sqrt{19}}{19}$$

Méthode n°1 :
Le volume du tétraèdre peut aussi se calculer en utilisant la hauteur OH et comme base, le triangle ABC



$$\frac{OH \times \mathcal{B}'}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{30\sqrt{19}}{19} \times \mathcal{B}' = 100$$
$$\mathcal{B}' = 10\sqrt{19}$$

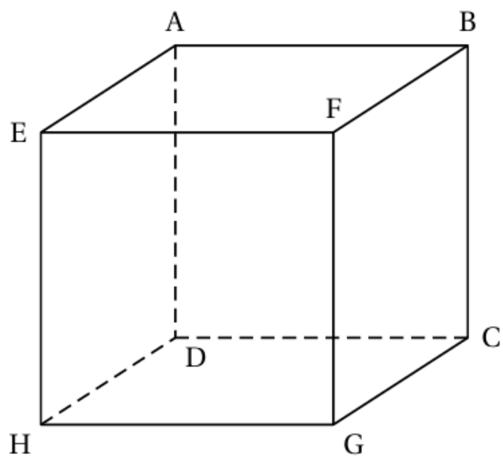
L'aire du triangle ABC vaut donc $10\sqrt{19}$.

Méthode n°2 :

$$\overrightarrow{CI}\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -10 \end{pmatrix} \qquad CI = \sqrt{9 + 81 + 100} = \sqrt{190}$$
$$\mathcal{B}' = \frac{AB \times CI}{2} = \frac{2\sqrt{10} \times \sqrt{190}}{2} = 10\sqrt{19}$$

Correction de l'exercice 2. (10 points)

On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous tel que $AB = 1$. Les points M, N et P sont les milieux respectifs des segment $[BC]$, $[HG]$ et $[AE]$.
On se place dans le repère orthonormé $\left(D; \overrightarrow{DH}; \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DA}\right)$.



1 Déterminer les coordonnées de tous les points.

2 a. Déterminer les réels a et b tels que le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ soit normal au plan (MNP).
b. En déduire une équation cartésienne du plan (MNP).

3 Déterminer les coordonnées du point L intersection entre le plan (MNP) et le segment $[EH]$.

4 Tracer alors la section du plan (MNP) sur le cube.

5 Existe-t-il un point K de la droite (AG) tel que le triangle KMN soit rectangle en K.

6 Déterminer l'intersection entre la sphère de centre M et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et la droite (AG). Que peut-on en déduire ?

Exercice 2. — 1

$$D(0;0;0) \quad H(1;0;0) \quad G(1;1;0) \quad C(0;1;0)$$
$$A(0;0;1) \quad E(1;0;1) \quad F(1;1;1) \quad B(0;1;1)$$
$$M\left(0;1;\frac{1}{2}\right) \quad N\left(1;\frac{1}{2};0\right) \quad P\left(\frac{1}{2};0;1\right)$$

2

$$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\a\\b\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}1\\-1/2\\-1/2\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}1/2\\-1\\1/2\end{pmatrix}$$

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\a\\b\end{pmatrix}$ est normal au plan (MNP) donc

$\vec{u}.\overrightarrow{MN} = 1 - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = 0 \Leftrightarrow a + b = 2$

$\vec{u}.\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2} - a + \frac{1}{2}b = 0 \Leftrightarrow 2a - b = 1$

$\begin{cases} a+b=2 & (L_1) \\ 2a-b=1 & (L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2 & (L_1) \\ 3a=3 & (L_1+L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$

$$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \text{ est normal au plan } (MNP)$$

Une équation cartésienne du plan (MNP) est donc :

$$x + y + z + d = 0$$

$$\text{or } M\left(0;1;\frac{1}{2}\right) \in (MNP)$$

$$\text{donc } 0 + 1 + \frac{1}{2} + d = 0$$

$$\Leftrightarrow d = -\frac{3}{2}$$

$$(MNP) : \ x + y + z - \frac{3}{2} = 0$$

3

$$\overrightarrow{EH}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Une équation paramétrique de la droite $[EH]$ est donc $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 - t \end{cases}$ où $t \in [0;1]$

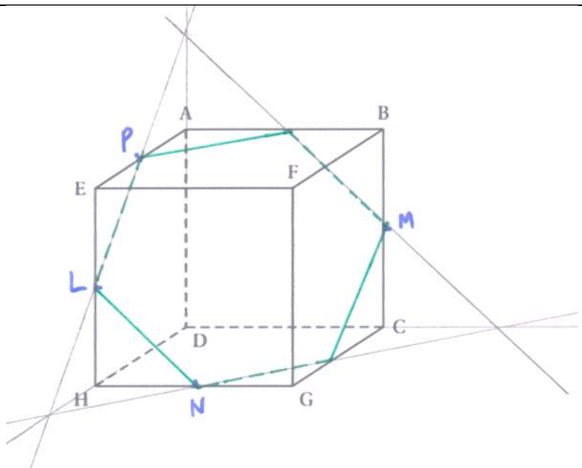
Soit $t \in [0;1]$, $L(1;0;1-t) \in (MNP)$

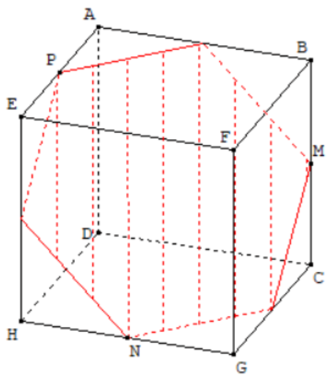
$$\text{donc } 1 + 0 + 1 - t - \frac{3}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

J'en déduis que les coordonnées de L sont : $\left(1;0;\frac{1}{2}\right)$

4





5

$$A(0;0;1) \qquad G(1;1;0) \qquad \overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \qquad M\left(0;1;\frac{1}{2}\right) \qquad N\left(1;\frac{1}{2};0\right)$$

Une équation paramétrique de la droite (AG) est donc $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

Soit $t \in \mathbb{R}$, $\quad K(t;t;1-t)$ tel que le triangle KMN soit rectangle en K

$$\overrightarrow{KM}\begin{pmatrix}-t\\1-t\\-\frac{1}{2}+t\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{KN}\begin{pmatrix}1-t\\\frac{1}{2}-t\\-1+t\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{KM}.\overrightarrow{KN} = 0$$

$$\Leftrightarrow -t(1-t) + (1-t)\left(\frac{1}{2}-t\right) + \left(-\frac{1}{2}+t\right)(-1+t) = 0$$

$$\Leftrightarrow -t + t^2 + \frac{1}{2} - t - \frac{1}{2}t + t^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t - t + t^2 = 0$$

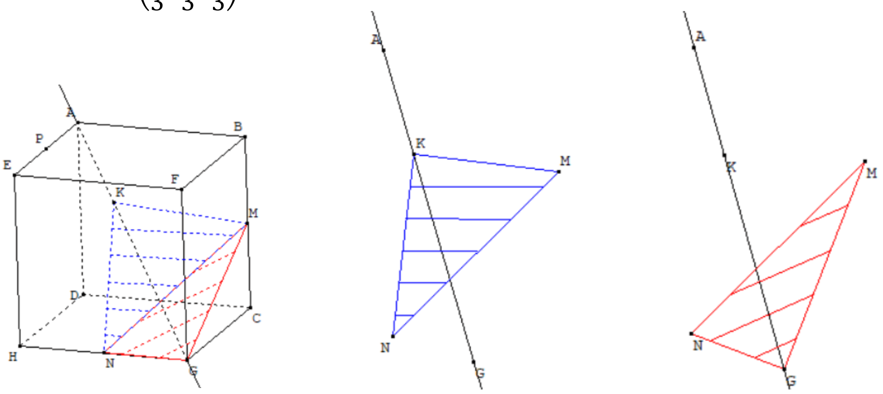
$$\Leftrightarrow 3t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4 \times 3 = 4 > 0$$

$$t_1 = \frac{4-2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad t_2 = \frac{4+2}{6} = 1$$

J'en déduis qu'il existe deux points K sur la droite (AG) tel que le triangle KMN soit rectangle en K :

$$K\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right) \quad \text{et} \quad K'(1;1;0) \quad (K' \text{ et } G \text{ sont confondus})$$



6

Une équation paramétrique de la droite (AG) est $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

Soit $t \in \mathbb{R}$, $\quad I(t;t;1-t)$ appartenant à la sphère de centre M et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$ où $M\left(0;1;\frac{1}{2}\right)$

$$\overrightarrow{MI}\begin{pmatrix}t\\t-1\\\frac{1}{2}-t\end{pmatrix} \quad \text{donc } MI = \sqrt{t^2 + (t-1)^2 + \left(\frac{1}{2}-t\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{donc} \quad t^2 + t^2 - 2t + 1 + \frac{1}{4} - t + t^2 = \frac{2}{4}$$

$$\Leftrightarrow 3t^2 - 3t + \frac{3}{4} = 0$$

$$\Delta = 9 - 4 \times 3 \times \frac{3}{4} = 0$$

$$t = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Il n'y a qu'un seul point d'intersection entre la sphère de centre M et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et la droite (AG), il s'agit du point $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

On en déduire que la sphère et la droite (AG) sont tangentes.