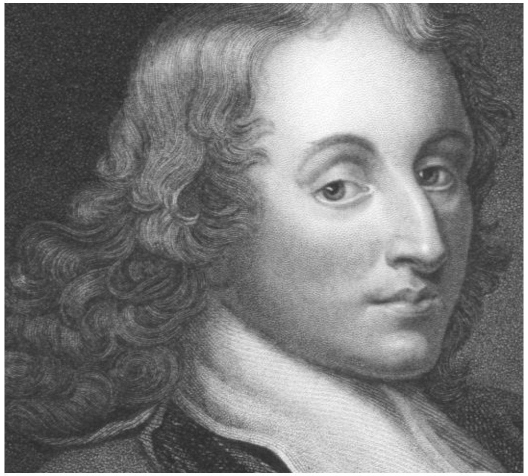
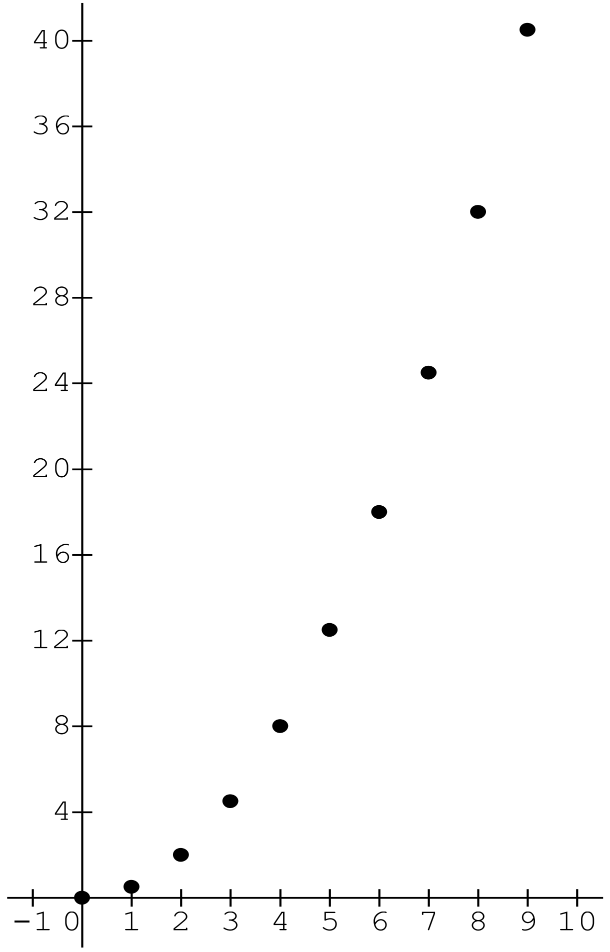
Blaise Pascal (1623 - 1662)



Mathématicien, physicien, inventeur, philosophe, moraliste et théologien français. Ses premiers travaux portent sur l'étude des fluides et les concepts de pression et de vide. À 19 ans, il invente la première machine à calculer, nommée « pascaline ». Plus tard, sa méthode de résolution du « problème des partis » donne naissance au calcul des probabilités. En 1665, il est le 1er à utiliser le raisonnement par récurrence.

I. Limite d'une suite

Nous étudions le comportement de la suite lorsque n tend vers $+\infty$.

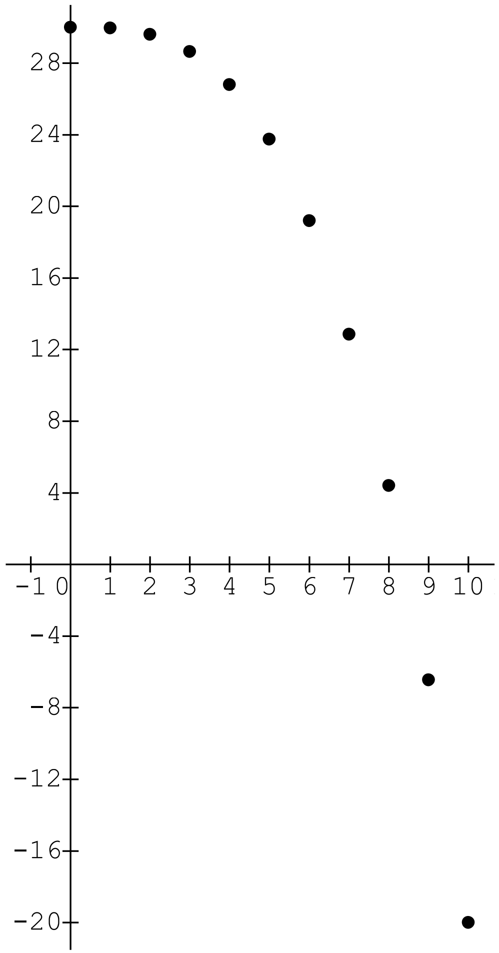


Définition

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

On note

lorsque $\forall A \in \mathbb{R}, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ n \geq N \Rightarrow u_n > A$



Définition

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle de la forme $]-\infty; A[$ avec $A \in \mathbb{R}$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

On note

lorsque $\forall A \in \mathbb{R}, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ n \geq N \Rightarrow u_n < A$

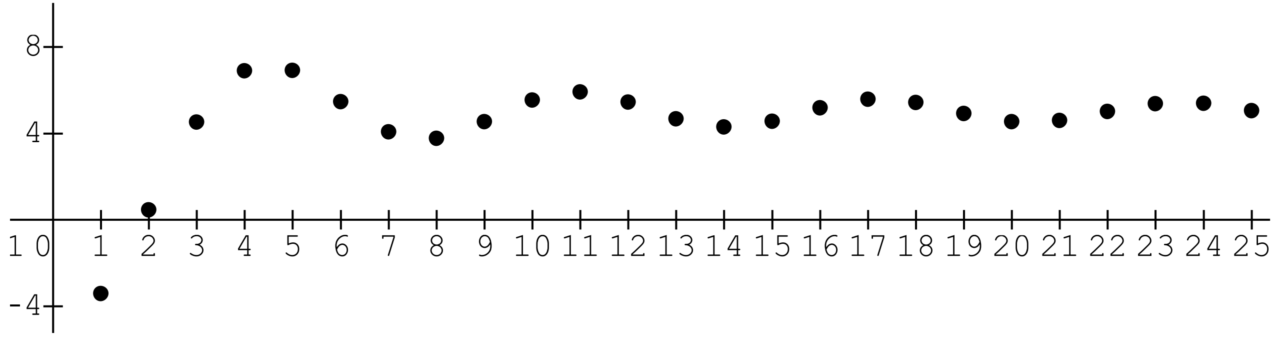
Exemple n°1 : à l'aide de la définition, déterminer :

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 = \cdots \qquad \lim_{n\to+\infty} n^3 = \cdots$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^4 = \cdots \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \lim_{n\to+\infty} n^k = \cdots$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2} - 5 = \cdots \qquad \lim_{n\to+\infty} 4\sqrt{n} - 5 = \cdots$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} a\,n + b = \cdots$$



Définition

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite le nombre réel L quand n tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

On note

lorsque $\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ n \geq N \Rightarrow u_n \in \,]L-\varepsilon; L+\varepsilon[$

Exemple n°2 : à l'aide de la définition, déterminer :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = \cdots$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{3}{n^2} = \cdots$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{-5}{n^3} + 1 = \cdots$$

Définition

On dit qu'une suite **diverge** lorsqu'elle n'a pas de limite ou qu'elle a une limite infinie.

On dit qu'une suite **converge** lorsqu'elle a une limite finie.

Exemple n°3 : La suite $(-1)^n$ est-elle convergente ?

II. Opérations et limites

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites, $L, L' \in \mathbb{R}$

Somme de suites.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	L	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} [u_n + v_n]$						

II. Opérations et limites

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites, $L, L' \in \mathbb{R}$

Somme de suites.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	L	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} [u_n + v_n]$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

Produit de suites.

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$	L	$L \neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$	L'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{n \to +\infty} [u_n \times v_n]$				

Produit de suites.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	L	$L \neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	L'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} [u_n \times v_n]$	$L \times L'$	$+\infty$ ou $-\infty$ selon la règle des signes	FI	$+\infty$ ou $-\infty$ selon la règle des signes

Quotient de suites avec $v_n \neq 0$ pour tout n

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	L	$L \neq 0$	L	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$L' \neq 0$	0^+ ou 0^-	$+\infty$ ou $-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	L'
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$						

Quotient de suites avec $v_n \neq 0$ pour tout n

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$	L	$L \neq 0$	L	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$	$L' \neq 0$	0^+ ou 0^-	$+\infty$ ou $-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	L'
alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$	$\dfrac{L}{L'}$	$+\infty$ ou $-\infty$ selon la règle des signes	0	FI	FI	$+\infty$ ou $-\infty$ selon la règle des signes

Exemple n°4 :

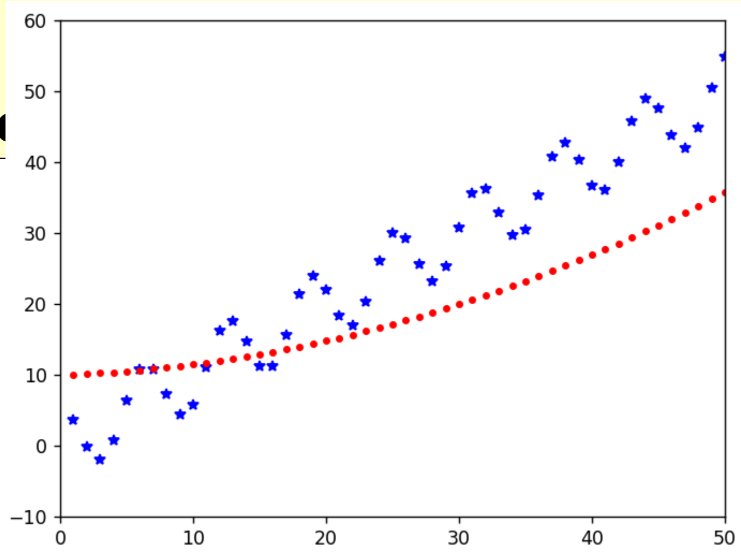
$$\lim_{n\to+\infty} 3n^2 + 2n - 1 = \cdots$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n^2+2} = \cdots$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^3 - n + 3 = \cdots$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n+5} = \cdots$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1} = \cdots$$



III. Comparaison de suites

Propriété : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites

Si, à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

Si, à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$ et

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Exemple n°5 :

Déterminer la limite de la suite définie par

a) $u_n = n + (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) $v_n = \cos(n) - 3n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Propriété

Si une suite est croissante et admet pour limite le nombre réel L, alors tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à L.

Théorème des gendarmes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites

Si, à partir d'un certain rang $v_n \leq u_n \leq w_n$

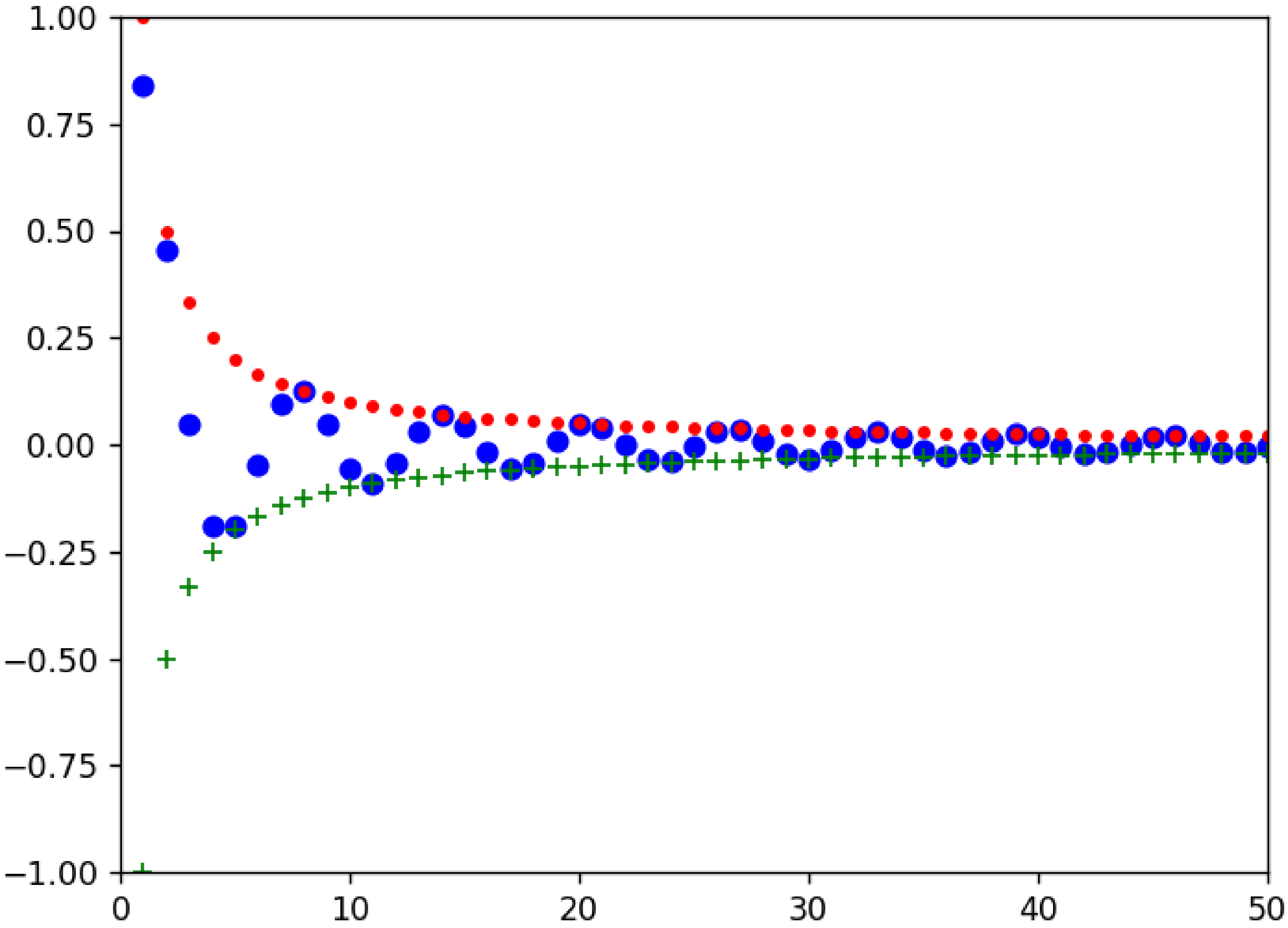
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = L$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$

Exemple n°6 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?


1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
0
10
20
30
40
50

Jean Dieudonné (1906 – 1992)

« Majorer et minorer sont des activités essentielles aux mathématiques »

Mathématicien français, il intègre l'École normale supérieure à l'âge de 18 ans. Il est reçu *cacique* à l'agrégation en 1927. Ses travaux concernent d'importants domaines de la topologie et de l'algèbre : espace paracompact et partition de l'unité, théorie des distributions, théorie de Galois des anneaux artiniens, théorie des groupes classiques sur un corps quelconque, Groupes de Lie.

IV. Raisonnement par récurrence

Axiome de récurrence

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété qui dépend de l'entier naturel n

Si la propriété $\mathcal{P}(n)$ vérifie les deux conditions suivantes :

- **Initialisation :** $\mathcal{P}(0)$ est vraie
- **Hérédité :** pour $n \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie aussi

alors la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple n°7 :

Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$, $2^n > 2n$.

V. Limite de la suite (q^n)

Propriété : limite de la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$

Soit $q \in \mathbb{R}$,

- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
- Si $q = 1$ alors la suite est constante égale à 1 donc
$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 1$$
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
- Si $q \leq -1$ alors la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite

Exemple n°8 : Démontrer la limite de la suite $u_n = 3^n - 5^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

VI. Suites majorées, minorées, bornées.

Définition

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée** lorsqu'il existe un réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$. M est alors un majorant.

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **minorée** lorsqu'il existe un réel m tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n$. m est alors un minorant.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

Théorème de convergence

Si une suite est croissante et majorée alors elle converge.

Si une suite est décroissante et minorée alors elle converge.

Exemple n°9 :

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 8}\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$$

En déduire la nature de la suite (u_n).