Karl Weierstrass (1815-1897)

Mathématicien allemand, il est souvent cité comme le « père de l'analyse moderne ». Il travailla sur les nombres irrationnels et les fonctions elliptiques. C'est lui qui le premier rendit public un exemple de fonction continue nulle part dérivable.

I. Calcul de dérivées

Rappel définition

Soit f définie sur I, $a \in I$ et $a + h \in I$ pour h proche de 0.

On dit que f est **dérivable en $\boldsymbol{a}$** lorsque la limite de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est finie quand h tend vers 0, cette limite est appelée **nombre dérivé de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$** et noté $\boldsymbol{f'(a)}$.

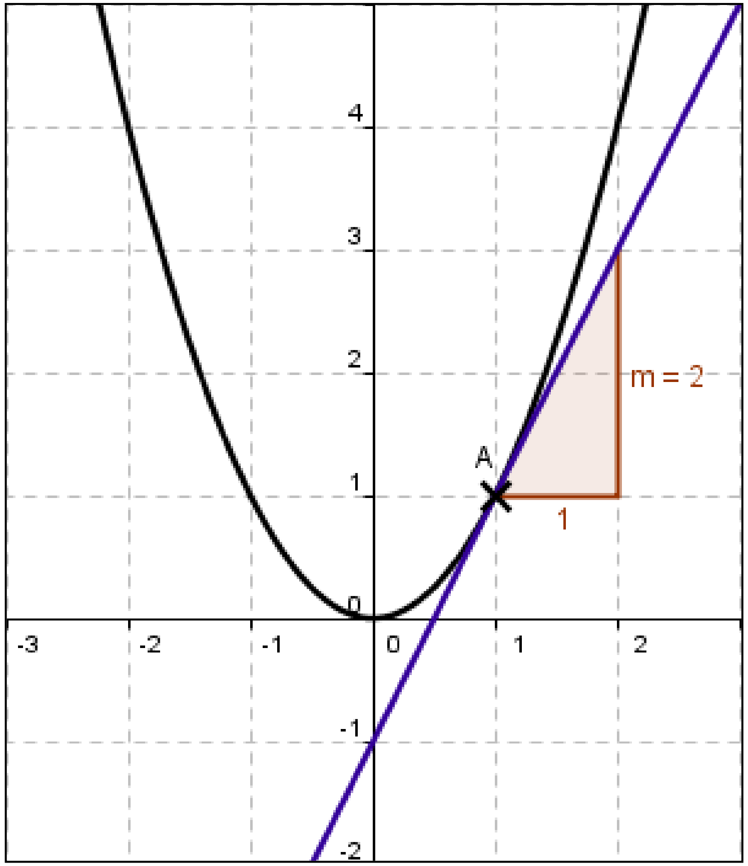
On dit que f est **dérivable** sur I lorsque f est **dérivable en tout point de** I.

Rappel interprétation graphique :

Soit c_f la courbe de f.

Soit $A \in \mathcal{C}_f$ tel que $A\big(a; f(a)\big)$

Si f est dérivable en a alors $\boldsymbol{f'(a)}$ est le **coefficient directeur de la tangente** à $\mathcal{C}_f$ au point A.



L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A est : $\boldsymbol{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$

Lycée Polyvalent Albert EINSTEIN

Rappel sur les variations d'une fonction

- Si, pour tout nombre x de I, on a $\boldsymbol{f'(x) > 0}$ alors f est **strictement croissante** sur I.
- Si, pour tout nombre x de I, on a $\boldsymbol{f'(x) < 0}$ alors f est **strictement décroissante** sur I.
- Si, pour tout nombre x de I, on a $\boldsymbol{f'(x) = 0}$ alors f est **constante** sur I.

Rappel dérivées des fonctions usuelles

Fonctions $f(x)$	Dérivées $f'(x)$	Ensemble de dérivabilité
a un nombre réel constant.	0	$\mathbb{R}$
$ax+b$	a	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^n où $n \in \mathbb{N} - \{0;1\}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$]-\infty;0[\,\cup\,]0;+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$

Rappel des règles de dérivation

u et v désignent deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$\boldsymbol{(uv)' = u'v + uv'}$$

$$(ku)' = ku'$$

$$\boldsymbol{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$$

Lycée Polyvalent Albert EINSTEIN

LA FONCTION EXPONENTIELLE
BILAN DES PROPRIETES

$e^0 = 1 \qquad e^1 = e \qquad (e^x)' = e^x$

$\forall a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, \quad e^{a+b} = e^a \times e^b$

$$e^{-a} = \frac{1}{e^a} \qquad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$\forall a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, \quad (e^a)^n = e^{na}$

Théorème :

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur l'intervalle $u(I)$ alors la fonction $v \circ u$ est dérivable sur l'intervalle I et

$$\boldsymbol{(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'}$$

$$x \longmapsto u(x) \longmapsto v\big(u(x)\big) = v \circ u(x)$$

Corollaire :

1 Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I où $u(x) > 0$ $\forall x \in I$, la fonction $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et ,

$$\boldsymbol{\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$$

2 Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I où $u(x) \neq 0$, $\forall x \in I$ et $n \in \mathbb{Z}^*$, la fonction $x \mapsto \left(u(x)\right)^n$ est dérivable sur I et

$$\boldsymbol{(u^n)' = n \times u^{n-1} \times u'}$$

3 Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et $\boldsymbol{(e^u)' = u'e^u}$

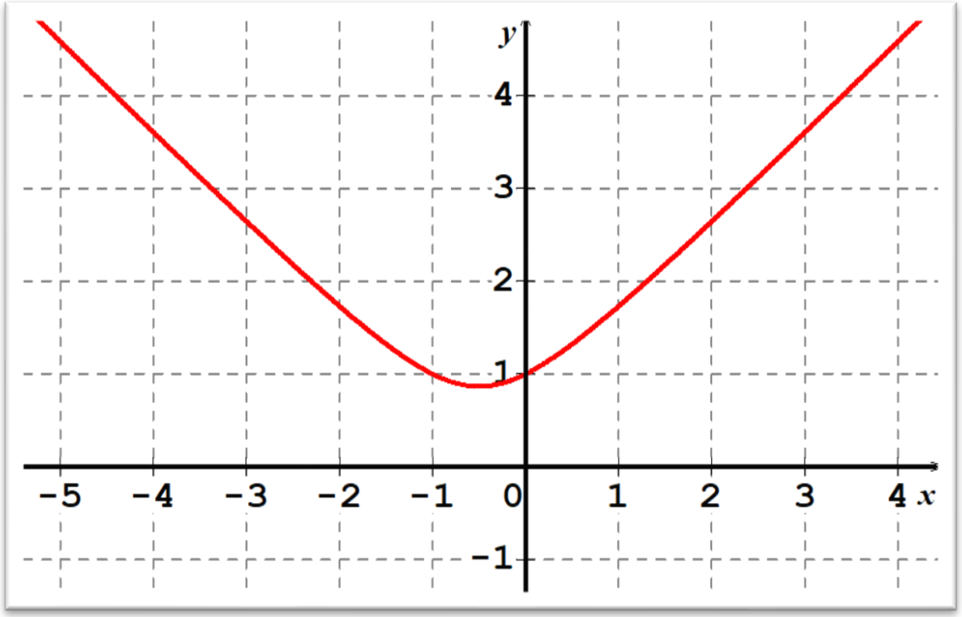
Lycée Polyvalent Albert EINSTEIN

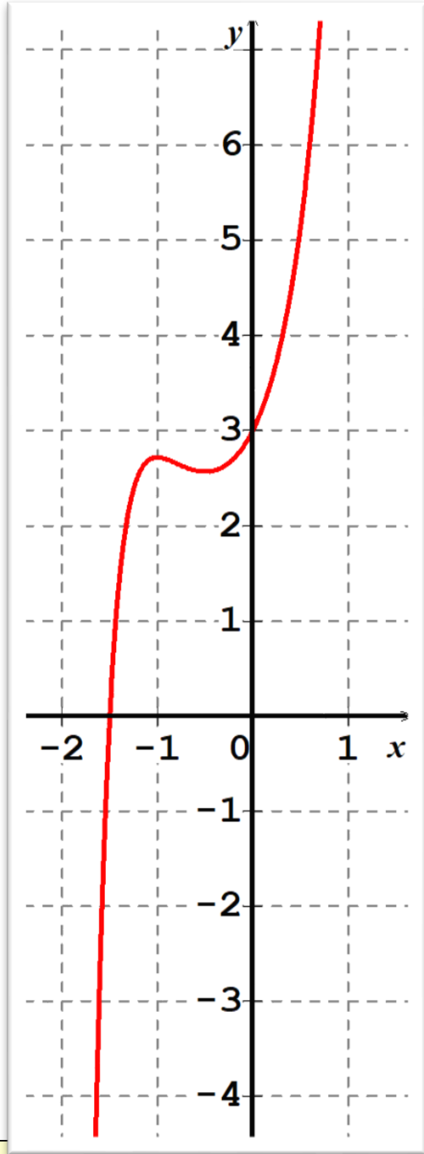
Exemple n°1 :

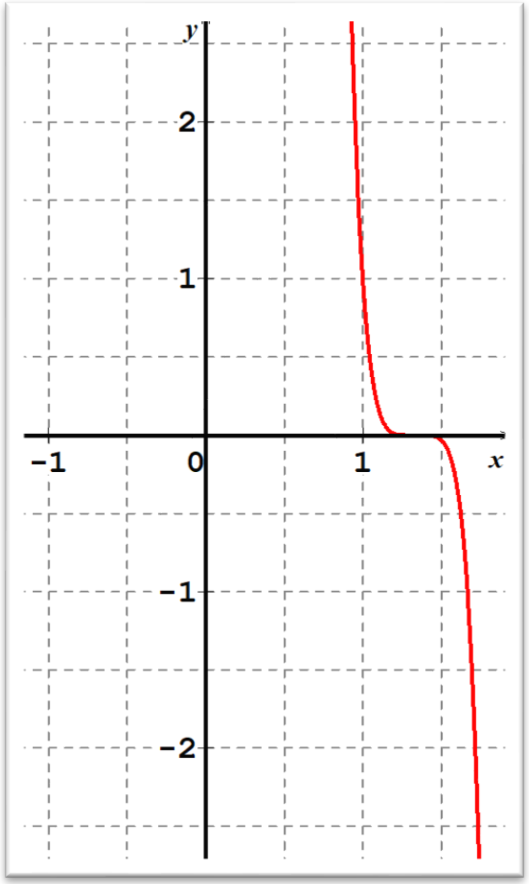
▶1. La fonction, définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = (4 - 3x)^5$ est-elle monotone ?

▶2. La fonction, définie sur $\mathbb{R}$, par $g(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ admet-elle un extremum ?

▶3. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $h(x) = (2x + 3)e^{x^2}$ puis donner une équation de la tangente à la courbe de h en 0.

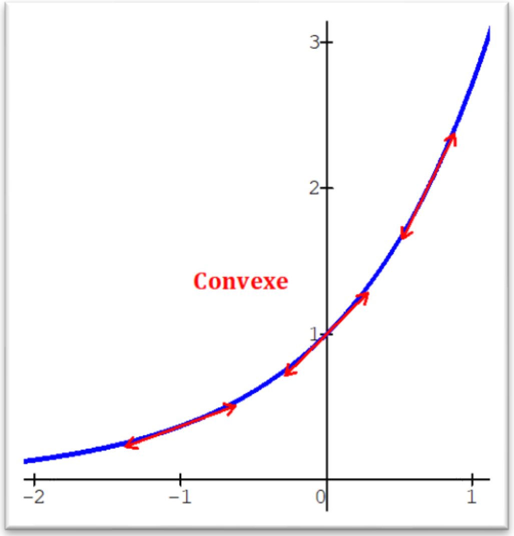

y
4
3
2
1
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
x
−1


y
6
5
4
3
2
1
−2
−1
0
1
x
−1
−2
−3
−4

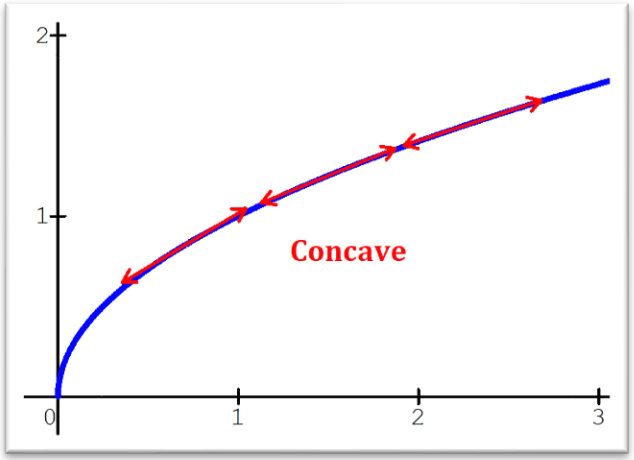

y
2
1
−1
0
1
x
−1
−2

Définition :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.



- La fonction f est **convexe** sur I lorsque sa courbe $\mathcal{C}_f$ est située entièrement au-dessus de chacune de ses tangentes.



- La fonction f est **concave** sur I lorsque sa courbe $\mathcal{C}_f$ est située entièrement au-dessous de chacune de ses tangentes.

Théorème :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

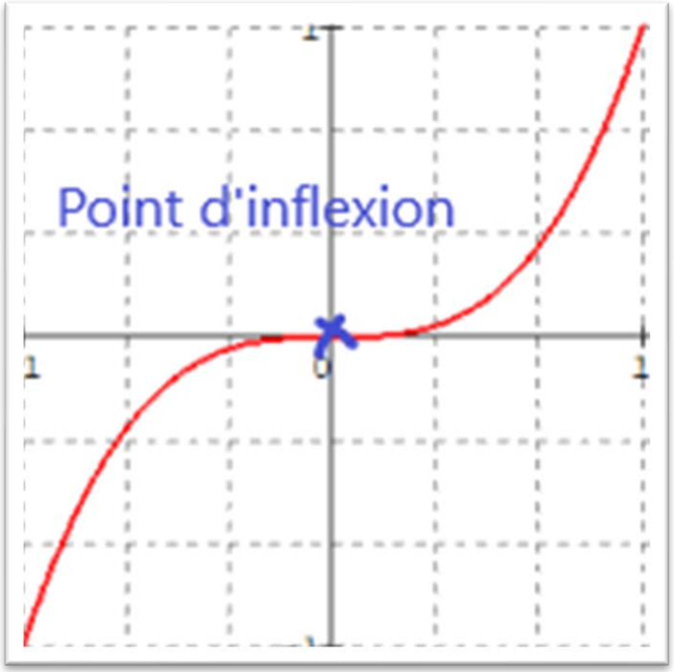
- f est convexe sur I si, et seulement si, sa dérivée f' est croissante.
- f est concave sur I si, et seulement si, sa dérivée f' est décroissante.

Corollaire :
Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I.

- f est convexe sur I si, et seulement si, sa dérivée seconde f'' est positive ou nulle.
- f est concave sur I si, et seulement si, sa dérivée seconde f'' est négative ou nulle.

Définition :

Un point où la dérivée seconde s'annule et change de signe est appelé **point d'inflexion**.

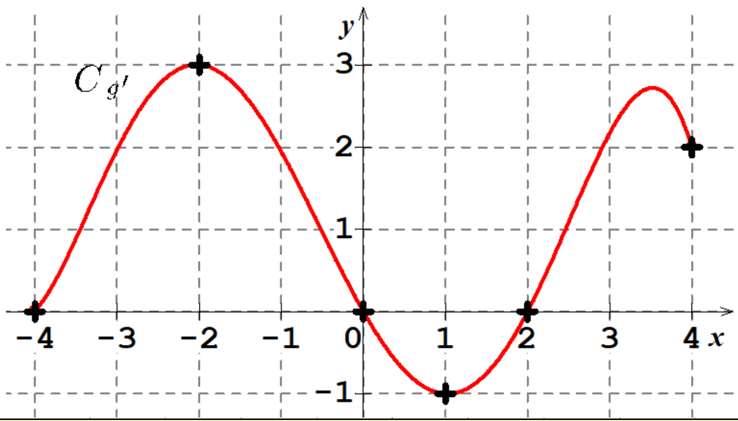


Exemple n°2 :

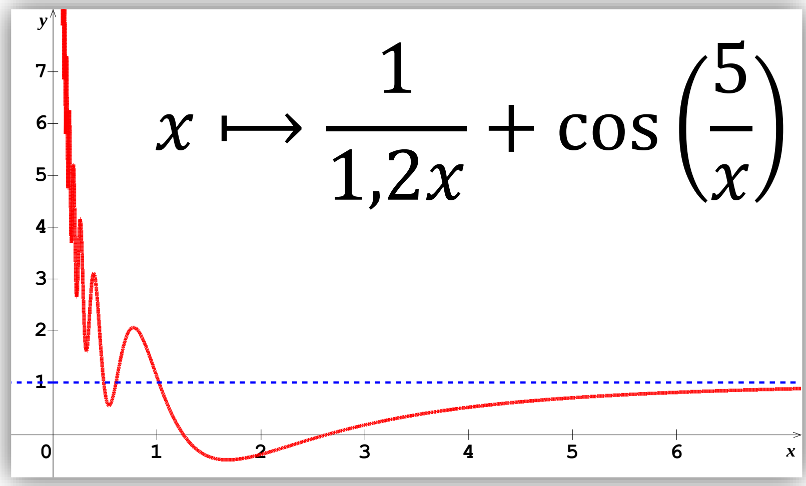
▶1. La courbe représentative de la fonction, définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = (2x^2 + 5x + 4)e^{-x}$ admet-elle un ou des point(s) d'inflexion ? Si oui, en donner l'abscisse.

▶2. On suppose que g est une fonction dérivable sur $[-4; 4]$. On donne la représentation graphique de sa fonction dérivée g'.

- g admet-elle un maximum en -2 ?
- g est-elle croissante sur $[1; 2]$?
- g est-elle convexe sur $[-4; -2]$?
- g admet-elle un point d'inflexion en 1 ?



II. Limites des fonctions



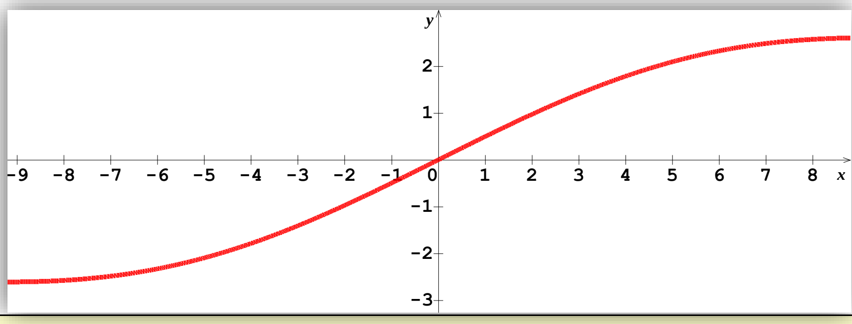
$$x \longmapsto \frac{1}{1{,}2x} + \cos\left(\frac{5}{x}\right)$$

Définition

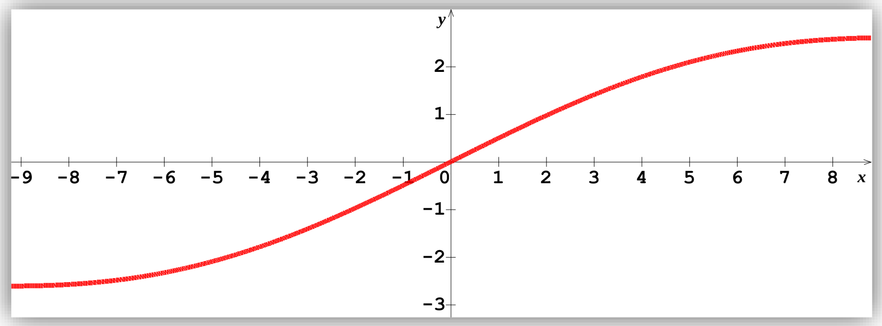
On dit que la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f admet une **asymptote horizontale** d'équation $\boldsymbol{y = L}$ lorsque

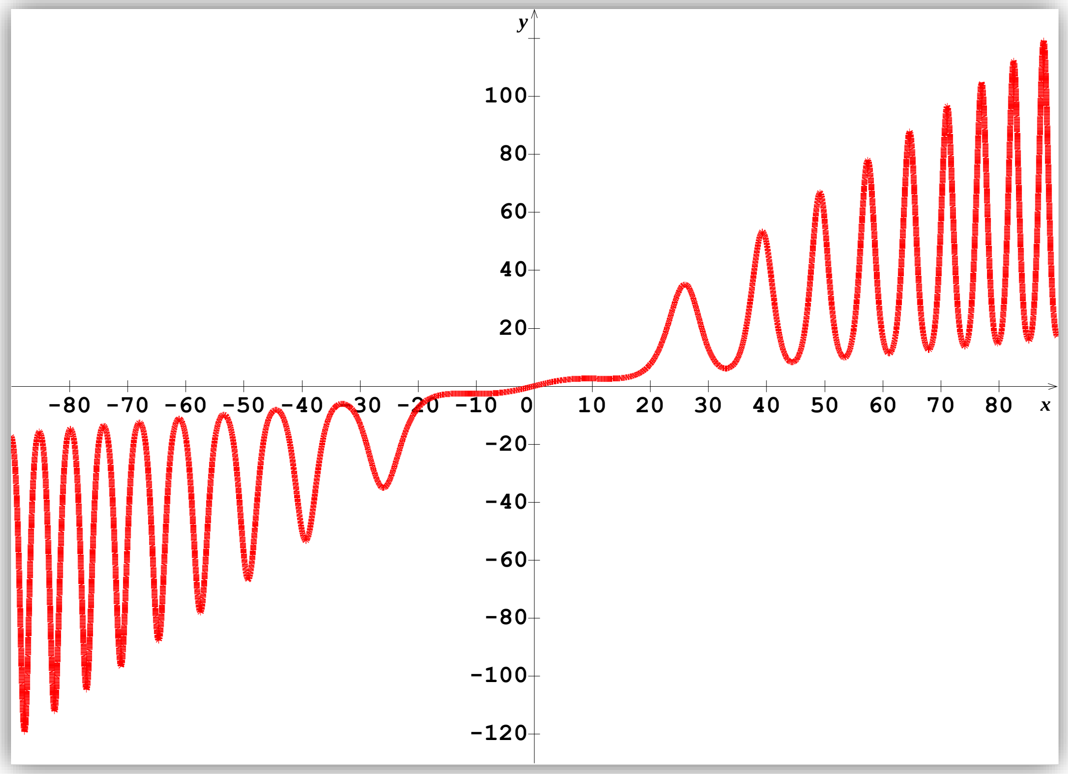
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

$$x \longmapsto \frac{x}{2} e^{-\sin(x^2/140)}$$



Pas d'asymptote …





Exemple n°3 :

Pour chaque fonction, déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition et on précisera les éventuelles asymptotes horizontales.

a) $f(x) = 3 - \frac{2}{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, g(x) = 5 + \frac{1}{x^n}$ définie sur $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$

c) $h(x) = x^2 - 5x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$

d) $k(x) = \frac{2x+1}{x+3}$ définie sur $[0; +\infty[$

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et $a \in I$

Définition

On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers a lorsque tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez proche de a.

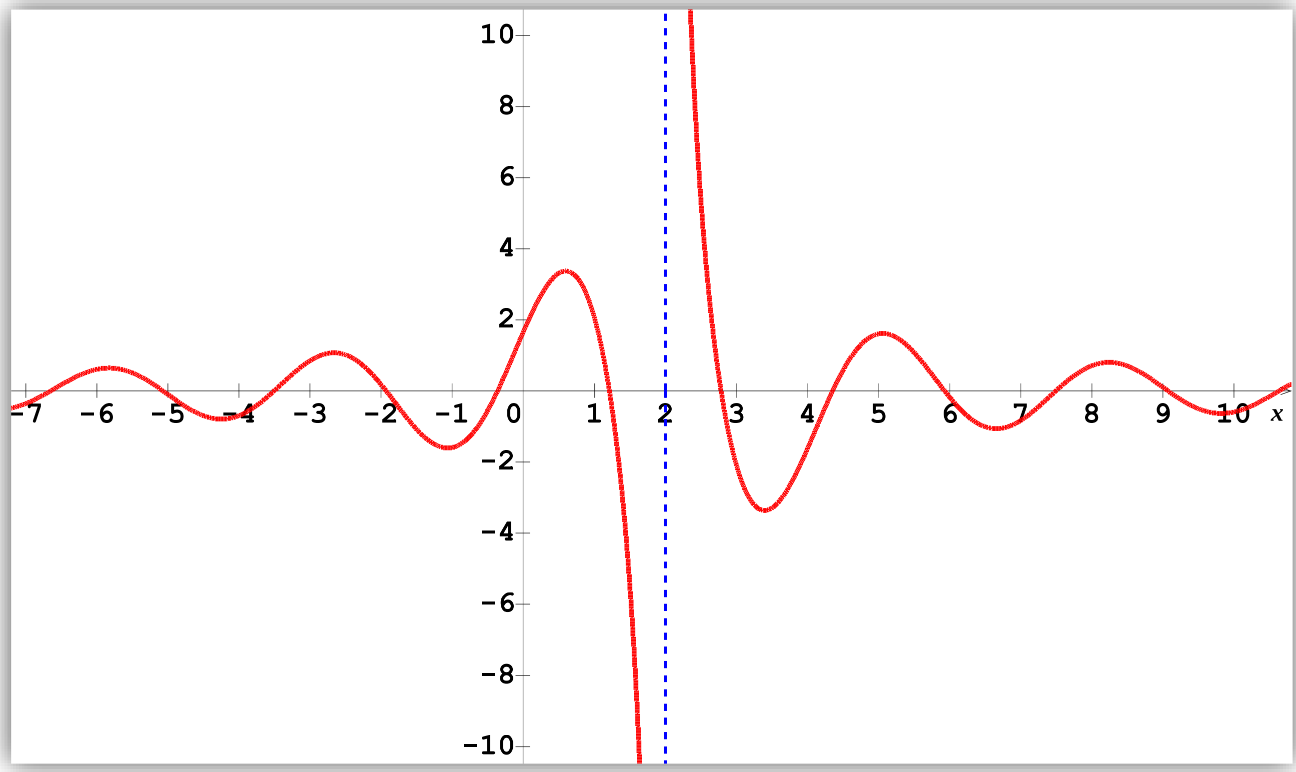
On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

lorsque $\forall A \in \mathbb{R}, \ \exists \eta > 0, \ \forall x \in I \quad |x - a| \leq \eta \Rightarrow f(x) > A$

Ecrire la définition de $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Définition

On dit que la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f admet une **asymptote verticale** d'équation $x = a$ lorsque



$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \text{ ou } \lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

Exemple n°4 :

① Pour chaque fonction, déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition :

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$

b) $g(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ définie sur $]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$

② Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \cdots \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \cdots$$

Soit f, g et h des fonctions définies sur un intervalle I, a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$ et $L \in \mathbb{R}$

Propriété :

① Si pour x voisin de a, $f(x) \geq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

② Si pour x voisin de a, $f(x) \geq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$

Théorème des gendarmes

Si pour x voisin de a, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = L$

alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

Exemple n°5 :

① Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin(x) - 2x$

② Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Théorème :

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

La courbe de l'exponentielle admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$$

Exemple n°6 :

① Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x - x^3)$

② Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 e^x$

III. Continuité d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$,

Définition :

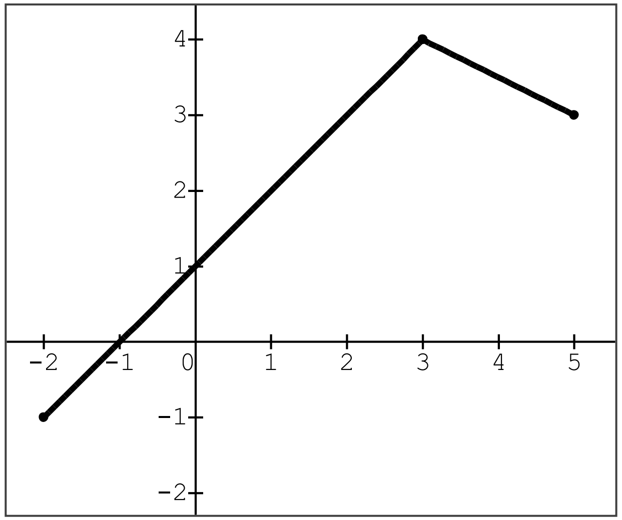
La fonction f est continue en a lorsque f a une limite en a égale à $f(a)$:

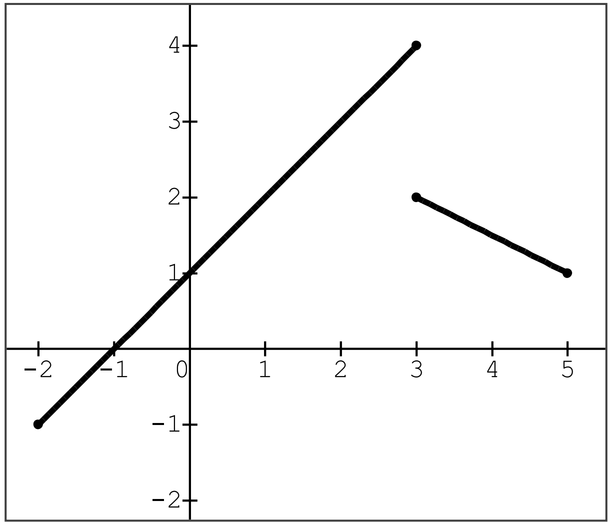
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

La fonction f est continue sur l'intervalle I lorsque f est continue en tout point de I.

Interprétation graphique :

La continuité de f sur un intervalle I se traduit par le fait que la courbe représentative de f sur I peut être tracée sans lever le crayon.





Remarque : On admet qu'une **fonction dérivable** sur un intervalle est **continue** sur cet intervalle.

Théorème :
Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I et (u_n) une suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si la suite (u_n) converge vers L alors $f(L) = L$.

Exemple n°6 :

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;-2[\,\cup\,]-2;+\infty[$ par :

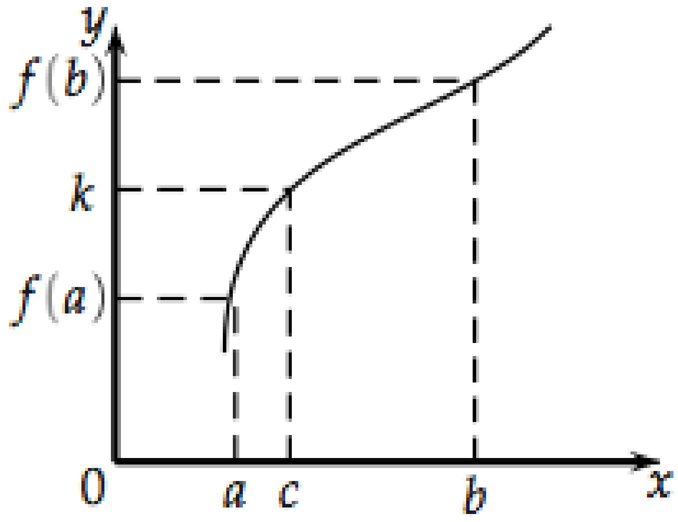
$$f(x)=\frac{4x+1}{x+2}$$

▶1. Etudier la fonction f (limites, asymptotes, variations)

▶2. On définit la suite (u_n) par $u_0=5$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=f(u_n)$

a) Démontrer, par récurrence, que $\forall n\in\mathbb{N}, 0\leq u_{n+1}\leq u_n\leq 5$

b) La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.



Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I et soit $a \in I$ et $b \in I$

Théorème des valeurs intermédiaires (admis) :

Pour tout nombre réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$,

il existe au moins un nombre réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

(On admet que ce théorème reste vrai lorsqu'au moins l'une des bornes de l'intervalle est infinie)

Théorème des fonctions continues strictement monotones :

Soit f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et soit $a \in I$ et $b \in I$

Pour tout nombre réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$,

il existe un **unique** nombre réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

(On admet que ce théorème reste vrai lorsqu'au moins l'une des bornes de l'intervalle est infinie)

Lycée Polyvalent Albert EINSTEIN

Exemple n°7 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 4 \text{ si } x \leq -3 \\ -(x+3)^3 + 1 \quad \text{si } x > -3 \end{cases}$$

▶ 1. La fonction f est-elle continue ? Justifier votre réponse.

▶ 2. On admet que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

a) Démontrer que l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution.

b) Donner un encadrement de cette solution entre deux entiers consécutifs.

Lycée Polyvalent
Albert EINSTEIN