Blaise Pascal (1623-1662)

Mathématicien, physicien, philosophe, moraliste et théologien français, il publie un traité de géométrie projective à seize ans ; ensuite il développe, en 1654, une méthode de résolution du « problème des partis » qui, donne naissance au cours du XVIII^{e} siècle au calcul des probabilités.

I. Principe additif ou multiplicatif ?

Définitions :

- On appelle **cardinal d'un ensemble fini** E le nombre d'éléments de E. On note : $\text{card}(E)$.
- Par convention, l'ensemble vide $\emptyset$ a pour cardinal 0.
- On dit que deux ensembles E et F sont **disjoints** lorsque
$$E \cap F = \emptyset$$

Dénombrer, c'est compter le nombre d'éléments que contient un ensemble fini donc d'en déterminer le cardinal.

Principe additif (nombre d'éléments d'une réunion d'ensembles deux à deux disjoints)

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

Si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont des ensembles finis deux à deux disjoints, alors

$$\operatorname{card}(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{card}(E_k)$$

Exemple :

Dans votre groupe, il y a 12 filles et 16 garçons.

Le nombre total d'élèves est $12 + 16 = 28$.

Remarque :
Si les ensembles ne sont pas disjoints, on a

$$\text{card}(E_1 \cup E_2) = \text{card}(E_1) + \text{card}(E_2) - \text{card}(E_1 \cap E_2)$$

Exemple :
Dans un jeu de 32 cartes, R est l'ensemble des rois et C est l'ensemble composée des cœurs.
Quel est le cardinal de $\boldsymbol{R \cup C}$?

Définition du produit cartésien :

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont des ensembles finis,

Le produit cartésien de E_1 et E_2, noté $E_1 \times E_2$, est l'ensemble des **couples** $(a; b)$ où $a \in E_1$ et $b \in E_2$.

Le produit cartésien de E_1, E_2 et E_3, noté $E_1 \times E_2 \times E_3$, est l'ensemble des **triplets** $(a; b; c)$où $a \in E_1$, $b \in E_2$ et $c \in E_3$.

Le produit cartésien de E_1, E_2 … E_n, noté $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$, est l'ensemble des ***n*-uplets** $(a_1 ; a_2 ; \ldots ; a_n)$ où $\forall i \in \{1 ; 2 ; \ldots ; n\}$ $a_i \in E_i$

Principe multiplicatif (nombre d'éléments d'un produit cartésien)

$$\text{card}(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n) = \prod_{k=1}^{n} \text{card}(E_k)$$

Exemples :

▶1. $C = \{\clubsuit; \diamondsuit; \spadesuit; \heartsuit\}$ et $F = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; \text{V}; \text{D}; \text{R}, \text{A}\}$
Que forme $C \times F$ et quel est son cardinal ?

▶2. Un menu de restaurant propose 3 entrées, 2 plats et 3 desserts au choix. Combien cela fait-il de possibilités ?

Remarque
Si on effectue un produit cartésien d'un ensemble E sur lui-même, on note $E \times E = E^2$ et dans le cas général, E^n est le produit cartésien de n ensembles E.

Exemple n°1 :
Antoine Gombaud, dit le « chevalier de Méré », est un écrivain français, né en Angoumois en 1607 et mort le 29 décembre 1684 au château de Beaussais. En tant que mathématicien amateur, le chevalier de Méré a posé à Blaise Pascal plusieurs problèmes sur les jeux de hasard. L'un d'entre eux est appelé le ***paradoxe du Chevalier de Méré****.*

Albert EINSTEIN

Est-il plus avantageux, lorsqu'on joue au dé, de parier sur l'apparition d'un 6 en lançant 4 fois le dé ou bien de parier sur l'apparition d'un double-six, quand on lance 24 fois deux dés ?

Le chevalier de Méré, qui était un grand joueur, avait remarqué que le premier jeu était avantageux. Se laissant abuser par un raisonnement faux, le chevalier croyait démontrer que les deux évènements sont équiprobables, il voyait donc là un paradoxe. Le chevalier de Méré était un noble de la cour de Louis XIV. Selon une lettre de Pascal à Fermat (datant du 29/07/1654), il "*avait très bon esprit, mais n'était pas géomètre*". **Les deux propositions du chevalier de Méré sont-elles équiprobables ?**

Définition des p-uplets :

Considérons un ensemble E composé de n objets numérotés de 1 à n et $p \leq n$. On choisit au hasard **p objets** parmi les n **en les remettant** au fur et à mesure et en **tenant compte de l'ordre** dans lequel on les choisit.

Exemple : $E = \{1,2,3\}$ les 2-uplets possibles sont :

$$(1,1)\ (1,2)\ (1,3)\quad (2,1)\ (2,2)\ (2,3)\quad (3,1)\ (3,2)\ (3,3)$$

Propriété :

Le nombre de tirage possible de ce type est n^p.

Exemple n°2 :

▶1. Un code PIN de smartphone est un code confidentiel composé de 4 chiffres.
Combien y a-t-il de codes PIN différents ?

▶2. Une adresse IPv4 est représentée sous la forme de quatre nombres entiers séparés par des points comme 193.43.55.67.
Chacun des nombres représente un octet (8 bits).
a) Combien de nombres peut-on représenter avec un octet ?
b) Combien d'adresse IPv4 peut-on former ?

II. Permutation, arrangement, combinaison

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Définition :
On appelle factorielle n le produit de tous les nombres entiers de 1 à n, on note :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$$

Par convention $0! = 1$.

Définition des permutations :
Considérons un ensemble E composé de n objets numérotés de 1 à n. On choisit au hasard **tous les objets** les uns après les autres **sans les remettre**.

Exemple : les permutations de l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$ sont

$$(1, 2, 3) \quad (1, 3, 2) \quad (2, 1, 3) \quad (2, 3, 1) \quad (3, 1, 2) \quad (3, 2, 1)$$

Deux permutations ne diffèrent que par l'ordre dans lequel les n objets sont rangés.

Propriété :

Le nombre de permutations est $n!$

Exemple n°3 :

Combien peut-on former d'anagrammes du mots « arts » ?
Parmi eux, combien ont un sens ?

Définition des arrangements :
Considérons un ensemble E composé de n objets numérotés de 1 à n et $p \leq n$. On choisit au hasard ***p* objets** parmi les n **sans les remettre** en **tenant compte de l'ordre** dans lequel les objets sont choisis.

Exemple : $E = \{1,2,3,4\}$ les arrangements possibles de 2 objets parmi 4 sont :

$$(1,2)\ (2,1)\ (1,3)\ (3,1)\ (1,4)\ (4,1)$$
$$(2,3)\ (3,2)\ (2,4)\ (4,2)\ (3,4)\ (4,3)$$

Remarque :
Deux arrangements diffèrent par l'ordre dans lequel les p objets sont rangés et dans le choix des p objets.

Propriété :
Le nombre d'arrangements est

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)$$

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemple n°4 :
Combien existe-t-il de **quartés dans l'ordre** possibles lorsqu'il y a 12 chevaux au départ ?

Définition des combinaisons :
Considérons un ensemble E composé de n objets numérotés de 1 à n et $p \leq n$. On choisit au hasard ***p* objets** parmi les n **sans les remettre et sans tenir compte de l'ordre** dans lequel les objets sont choisis.

Exemple : $E = \{1,2,3,4\}$ les combinaisons possibles de 2 objets parmi 4 sont :

$$(1,2)\ (1,3)\ (1,4)\ (2,3)\ (2,4)\ (3,4)$$

Remarque :
Deux combinaisons ne diffèrent que dans le choix des p objets.

Propriété :
Le nombre de combinaisons est

$$\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Théorème :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}, p \leq n$

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$$

$$\binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1}$$

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Triangle de Pascal : $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}$

n \ k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Exemple n°5 :

▶1. En Première générale, un élève doit choisir trois spécialités parmi les douze proposées. **Combien de triplettes possibles y a-t-il ?**

▶2. Un joueur de poker possède 5 cartes d’un jeu de 52 cartes distribuées au hasard.
Quelle est la probabilité qu’il ait au moins un as ?

Définition :
Soit E un ensemble, on dit que F est une partie de E lorsque F est un sous-ensemble de E, c'est-à-dire $F \subset E$.

Théorème :
Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}$, le nombre de parties est égal à 2^n.

Exemple : $E = \{a; b\}$

$$\mathcal{P}(E) = \left\{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{a; b\}\right\}$$

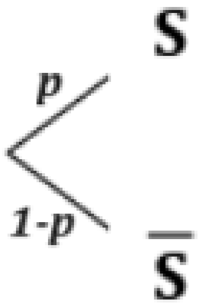
Déterminer l'ensemble des parties de $G = \{a; b; c\}$

III. Loi binomiale

Définition :

Soit $p \in]0,1[$

Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p est une expérience aléatoire qui ne comporte que deux issues : le succès ou l'échec. Le réel p représente la probabilité d'un succès. La probabilité d’un échec est donc $1 - p$.



Exemple n°6

Pour chaque programme, quelles sont vos chances de gagner ?

PROGRAMME n°1	PROGRAMME n°2	PROGRAMME n°3

from random import *
a=int(input("Quel nombre entre 0 et 36 choisissez-vous ? "))
b=randint(0,36)
if a==b:
   print("Gagné !")
else:
   print("Perdu !")
	from random import *
	a=randint(1,6)
	b=randint(1,6)
	if a>=5 or b>=5:
	   print("Gagné !")
	else:
	   print("Perdu !")
		from random import *
		a=randint(0,1)
		b=randint(0,1)
		c=randint(0,1)
		if a==b and b==c:
		   print("Gagné !")
		else:
		   print("Perdu !")

Définition et propriété :

Soit $p \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

On considère **une épreuve de Bernoulli** dans laquelle la **probabilité d'un succès est p**. On **répète n fois** cette épreuve de Bernoulli de façon identique et indépendante.

Soit X la variable aléatoire qui **compte le nombre de succès obtenus**. X prend toutes les valeurs entières entre 0 et n.

X suit une **loi binomiale** de paramètres n et p.

Cette loi est notée $B(n;p)$.

Pour tout entier $0 \leq k \leq n$

$$\boldsymbol{P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}}$$

Propriété

La **moyenne ou espérance** d'une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale $B(n; p)$ est

$$\boldsymbol{E(X) = n \times p}.$$

L'**écart type** de X est

$$\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}}.$$

Exemple n°7 :

Partie A.

Le chikungunya est une maladie virale transmise d'un être humain à l'autre par les piqûres de moustiques femelles infectées. Un test a été mis au point pour le dépistage de ce virus. Le laboratoire fabriquant ce test fournit les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'une personne atteinte par le virus ait un test positif est de 0,98 ;
- la probabilité qu'une personne non atteinte par le virus ait un test positif est de 0,01.

On procède à un test de dépistage systématique dans une population « cible ». Un individu est choisi au hasard dans cette population. On appelle M l'évènement : « L'individu choisi est atteint du chikungunya » et T l'évènement : « Le test de l'individu choisi est positif ». Soit $p \in [0;1]$, on note p la proportion de personnes atteintes par la maladie dans la population cible.

►1. Exprimer $P(T)$ en fonction de p.

►2. a. Démontrer que la probabilité de M sachant T est donnée par f définie sur $[0;1]$ par $f(p) = \frac{98p}{97p+1}$.

b. Étudier les variations de la fonction f.

►3. On considère que le test est fiable lorsque la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit réellement atteinte du chikungunya est supérieure à 0,95.

A partir de quelle proportion p de malades dans la population le test est-il fiable ?

Partie B

Le laboratoire mène une étude sur un échantillon de 20 personnes. On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard soit malade est égale à 0,1. On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes malades parmi les 20.

▶1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?

▶2. Quelle est la probabilité qu'exactement 5 des 20 personnes soient malades ? qu'au moins une personne soit malade ?

▶3. Combien peut-on espérer avoir de personnes malades, en moyenne, parmi les 20 personnes prises au hasard ?