Gaspard Monge (1746-1818)

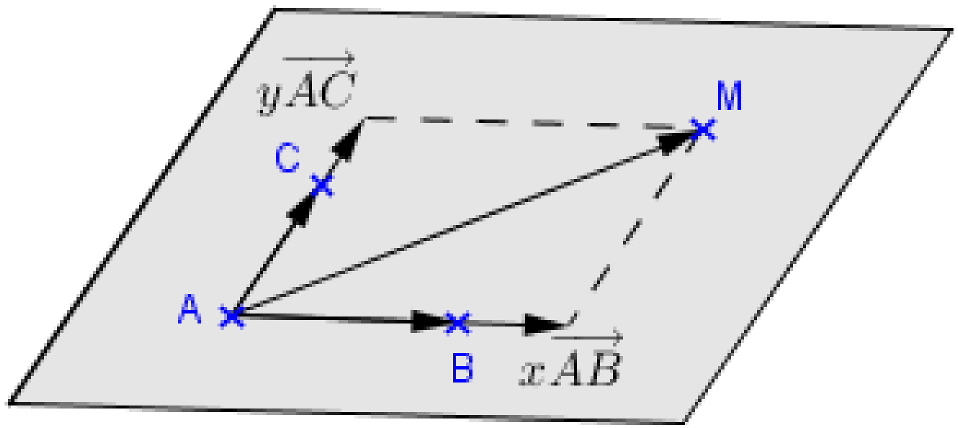
Mathématicien français dont l'œuvre considérable mêle géométrie descriptive, analyse infinitésimale et géométrie analytique. Il joue un grand rôle dans la Révolution française, tant du point de vue politique que du point de vue de l'instauration d'un nouveau système éducatif : il participe à la création de l'École normale et de l'École polytechnique.

I. Géométrie vectorielle

Un plan est généré par un point et deux directions différentes.

Propriété :

A, B et C sont trois points non alignés de l'espace, $\mathcal{P}$ est le plan (ABC). Le point ***M* appartient au plan $\mathcal{P}$** si, et seulement si, il existe deux nombres réels x et y tels que $\boldsymbol{\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}}$.



Remarque :

De façon générale, un plan est défini par **un point O et deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ non colinéaires**.

Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont des **vecteurs directeurs** de ce plan

$(O; \vec{i}; \vec{j})$ est un **repère** du plan.

Propriété :

Deux plans qui ont deux vecteurs directeurs en commun sont parallèles.

Définition :

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** lorsqu'il existe trois nombres réels x, y et z non tous nuls tels que $x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}=\vec{0}$.

Remarque :

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors

$$x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{w}=-\frac{x}{z}\vec{u}-\frac{y}{z}\vec{v} \Leftrightarrow \vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$$

où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

Théorème :

Quatre points A, B, C et D sont coplanaires si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Exemple 1 :

▶ 1. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\5\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}10\\-10\\8\end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?

▶ 2. Les points $A(-2; 4; 3)$, $B(1; 0; -2)$, $C(7; -2; 4)$ et $D(-11; 4; -14)$ sont-ils coplanaires ?

Propriété :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace

Pour tout vecteur $\vec{t}$, il existe un unique triplet $(a; b; c)$ de nombres réel tels que $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$.

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ sont alors les **coordonnées du vecteur $\vec{t}$** dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

Définition :

Un repère de l'espace noté $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\,; \vec{k}\,\right)$ est formé d'un point O et de trois vecteurs non coplanaires.

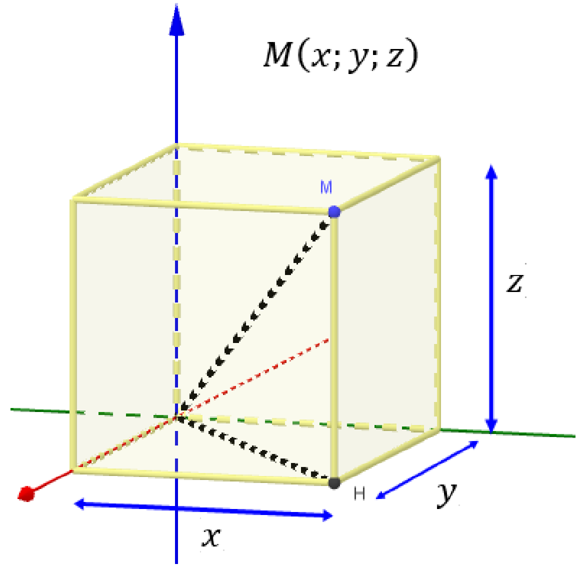
Propriété :

$(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ un repère de l'espace

Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x;y;z)$ de nombres réels tels que $\overrightarrow{OM}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$.

x est l'abscisse de M, y son ordonnée et z sa **cote**.

Calculs :



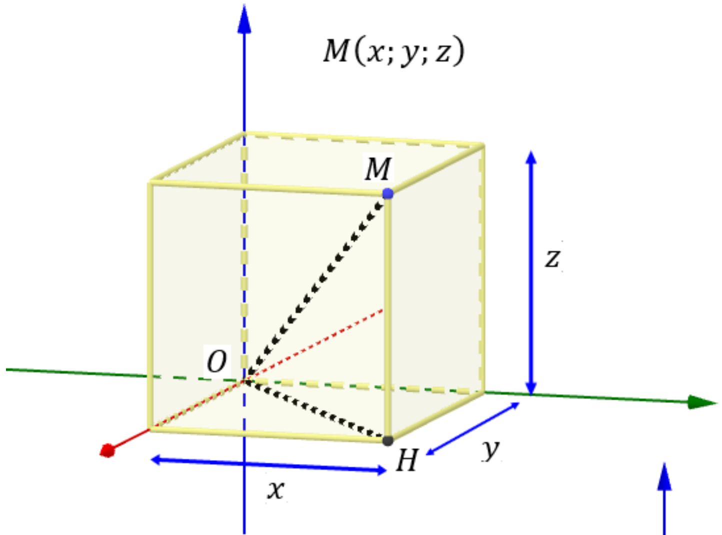
❶ Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix}$

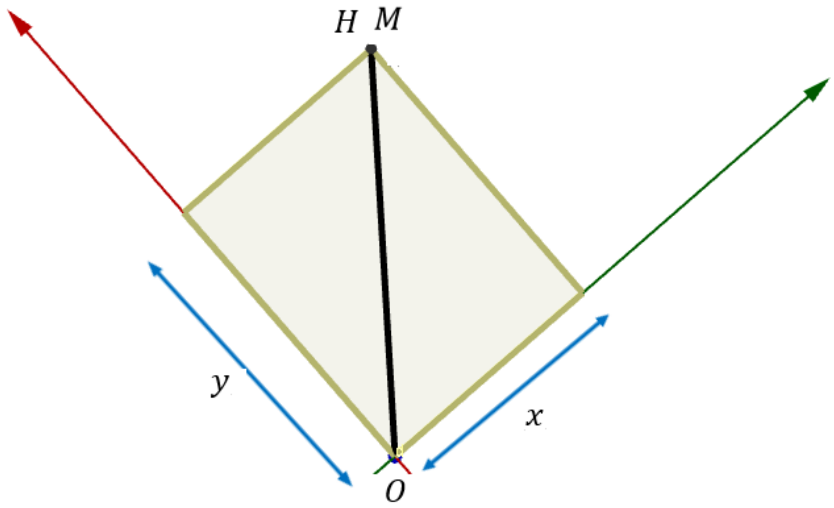
et $\lambda\vec{u}\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\\\lambda z\end{pmatrix}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

et si le repère est orthonormé, $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

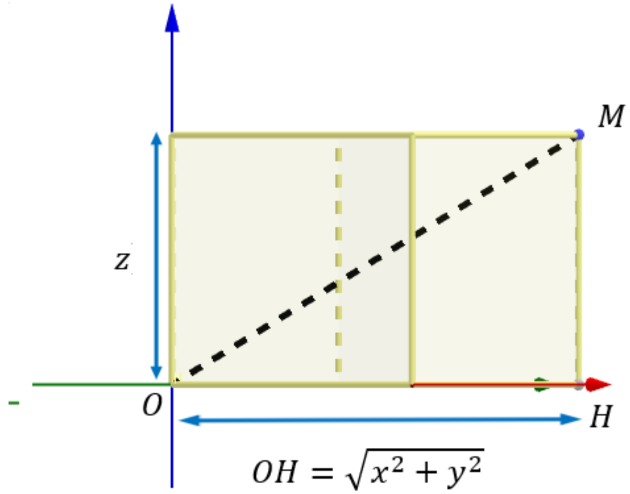
❷ Si $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$

et $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$ est le milieu de $[AB]$.





Par Pythagore : $OH = \sqrt{x^2+y^2}$



$OH = \sqrt{x^2+y^2}$

Par Pythagore : $OM = \sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

II. Représentations paramétriques

Théorème :

Soit Δ la droite passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. $M(x; y; z)$ appartient à la droite Δ si, et seulement si, il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = t\vec{u}\begin{pmatrix} ta \\ tb \\ tc \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$

Ce système est une **représentation paramétrique** de la droite Δ et t en est le paramètre.

Exemple n°2 : On considère la droite (d) définie par :

$$\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = -1 + t \quad \text{où} \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 6 + 3t \end{cases}$$

▶1. Déterminer quelques points de cette droite et quelques vecteurs directeurs.

▶2. Que peut-on dire de (d) et (d') où la droite (d') est définie par $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -1 + 2t \quad \text{où} \quad t \in \mathbb{R}\,? \\ z = 6 + 6t \end{cases}$

Correction de l'exemple n°2 :

▶1. Pour chaque valeur de $t \in \mathbb{R}$, on obtient un point de la droite $(d)\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 6 + 3t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

Pour $t = 0$ $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = 6 \end{cases}$ $A(-1; -1; 6) \in (d)$

Pour $t = 1$ $\begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \\ z = 9 \end{cases}$ $B(-3; 0; 9) \in (d)$

Un vecteur directeur de la droite

$$(d)\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 6 + 3t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

est $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (les coefficients de t)

Tous les autres vecteurs directeurs sont colinéaires à $\vec{u}$ donc, par exemple :

$\vec{v} = 2\vec{u} \Longrightarrow \vec{v}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ est aussi un vecteur directeur.

▶ 2. Soit la droite $(d')\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -1 + 2t \\ z = 6 + 6t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

Un vecteur directeur de la droite (d') est $\vec{v}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

Un vecteur directeur de la droite (d) est $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$

Puisque $\vec{v} = 2\vec{u}$, les vecteurs directeurs sont colinéaires, alors les droites sont parallèles.