Gaspard Monge (1746-1818)

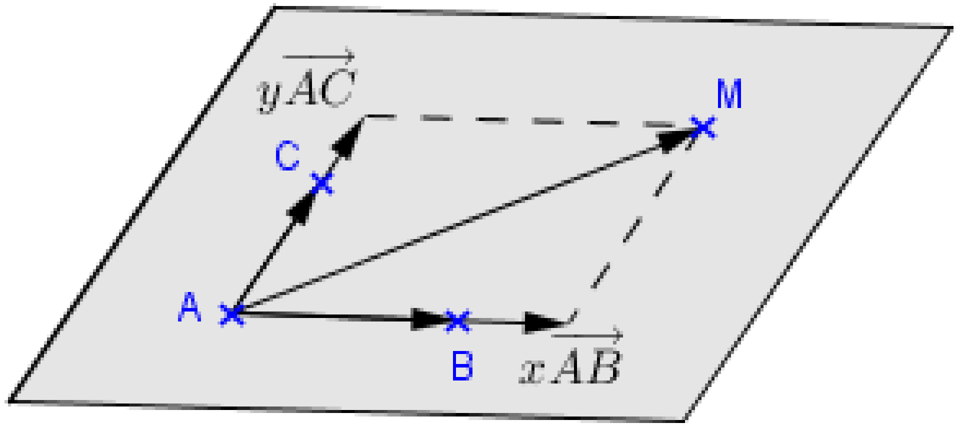
Mathématicien français dont l'œuvre considérable mêle géométrie descriptive, analyse infinitésimale et géométrie analytique. Il joue un grand rôle dans la Révolution française, tant du point de vue politique que du point de vue de l'instauration d'un nouveau système éducatif : il participe à la création de l'École normale et de l'École polytechnique.

I. Géométrie vectorielle

Un plan est généré par un point et deux directions différentes.

Propriété :

A, B et C sont trois points non alignés de l'espace, $\mathcal{P}$ est le plan (ABC). Le point ***M* appartient au plan $\mathcal{P}$** si, et seulement si, il existe deux nombres réels x et y tels que $\boldsymbol{\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}}$.



Remarque :

De façon générale, un plan est défini par **un point O et deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ non colinéaires**.

Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont des **vecteurs directeurs** de ce plan

$(O; \vec{i}; \vec{j})$ est un **repère** du plan.

Propriété :

Deux plans qui ont deux vecteurs directeurs en commun sont parallèles.

Définition :

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** lorsqu'il existe trois nombres réels x, y et z non tous nuls tels que $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0}$.

Remarque :

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors

$$x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{w} = -\frac{x}{z}\vec{u} - \frac{y}{z}\vec{v} \Leftrightarrow \vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

Théorème :

Quatre points A, B, C et D sont coplanaires si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Exemple 1 : Dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

▶1. On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\5\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}10\\-10\\8\end{pmatrix}$.

Existe-t-il deux réels a et b tels que $a\vec{u}+b\vec{v}=\vec{w}$? Que peut-on en déduire ?

▶2. On considère les points $A(-2;4;3)$, $B(1;0;-2)$, $C(7;-2;4)$ et $D(-5;2;-8)$.

Comparer $\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$. Que peut-on en déduire ?

Propriété :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace
Pour tout vecteur $\vec{t}$, il existe un unique triplet $(a; b; c)$ de nombres réel tels que $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$.

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ sont alors les **coordonnées du vecteur $\vec{t}$** dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

Définition :

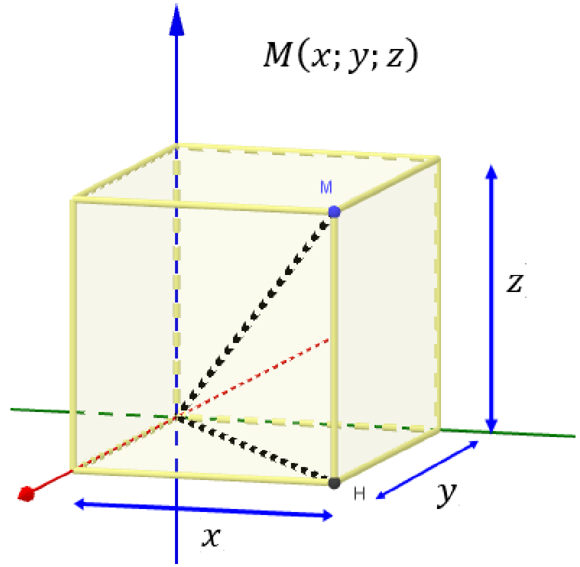
Un repère de l'espace noté $\left(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}\,; \vec{k}\,\right)$ est formé d'un point O et de trois vecteurs non coplanaires.

Propriété :

$\left(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}\,; \vec{k}\,\right)$ un repère de l'espace

Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ de nombres réels tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.

x est l'abscisse de M, y son ordonnée et z sa **cote**.



Calculs :

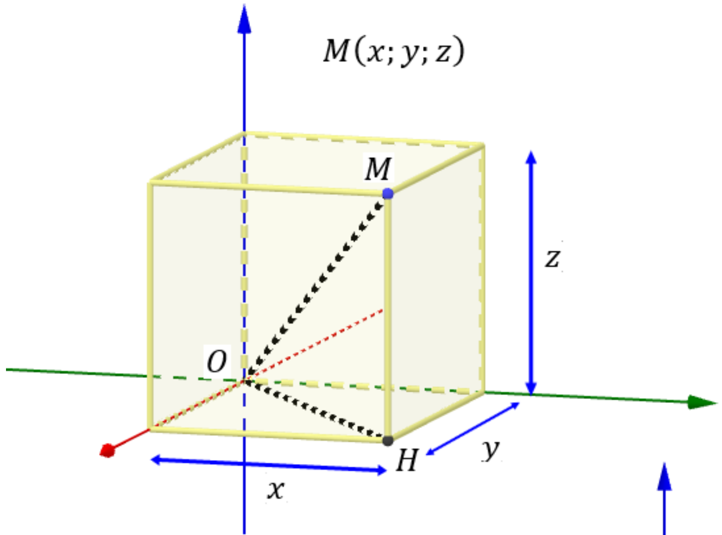
❶ Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$

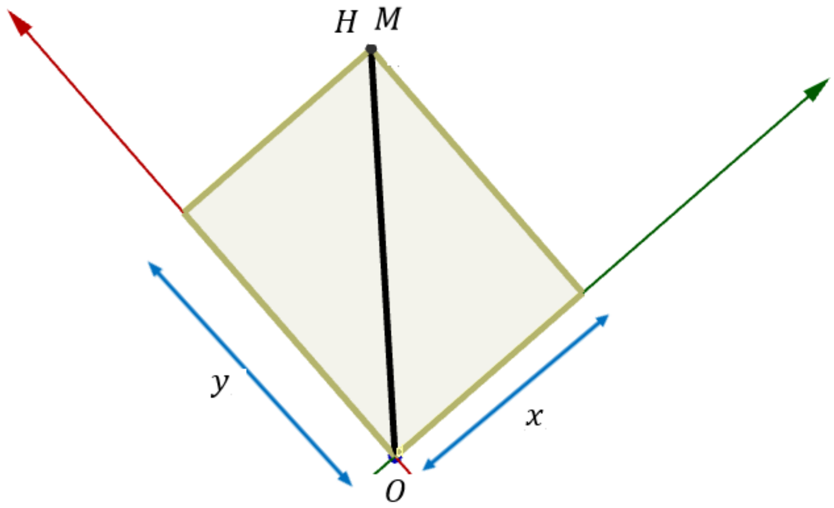
et $\lambda\vec{u}\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

et si le repère est orthonormé, $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

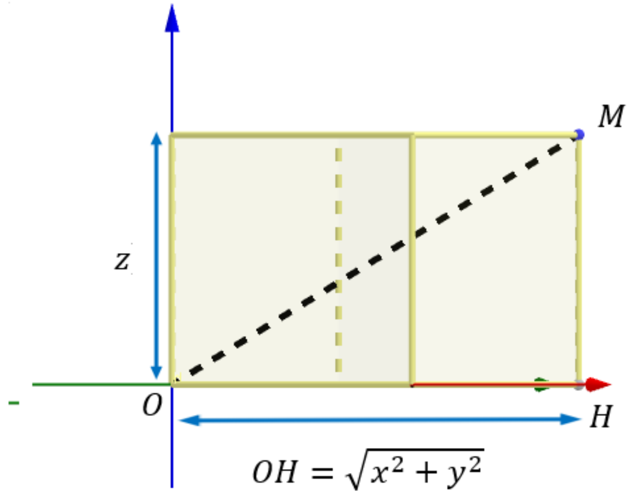
❷ Si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

et $I\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}; \frac{z_A+z_B}{2}\right)$ est le milieu de $[AB]$.





Par Pythagore : $OH = \sqrt{x^2+y^2}$



$OH = \sqrt{x^2+y^2}$

Par Pythagore : $OM = \sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

II. Représentations paramétriques

Théorème :

Soit Δ la droite passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. $M(x; y; z)$ appartient à la droite Δ si, et seulement si, il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = t\vec{u}\begin{pmatrix} ta \\ tb \\ tc \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$

Ce système est une **représentation paramétrique** de la droite Δ et t en est le paramètre.

Exemple n°2 : On considère la droite (d) définie par :

$$\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = -1 + t \quad \text{où} \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 6 + 3t \end{cases}$$

▶1. Déterminer quelques points de cette droite et quelques vecteurs directeurs.

▶2. Que peut-on dire de (d) et (d') où la droite (d') est définie par $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -1 + 2t \quad \text{où} \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 6 + 6t \end{cases}$?

Correction de l'exemple n°2 :

▶1. Pour chaque valeur de $t \in \mathbb{R}$, on obtient un point de la droite $(d)\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 6 + 3t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

Pour $t = 0$ $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = 6 \end{cases}$ $A(-1; -1; 6) \in (d)$

Pour $t = 1$ $\begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \\ z = 9 \end{cases}$ $B(-3; 0; 9) \in (d)$

Un vecteur directeur de la droite

$$(d)\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = -1 + t \quad \text{où } t \in \mathbb{R} \\ z = 6 + 3t \end{cases}$$

est $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (les coefficients de t)

Tous les autres vecteurs directeurs sont colinéaires à $\vec{u}$ donc, par exemple :

$\vec{v} = 2\vec{u} \Longrightarrow \vec{v}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ est aussi un vecteur directeur.

▶ 2. Soit la droite $(d')\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -1 + 2t \\ z = 6 + 6t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

Un vecteur directeur de la droite (d') est $\vec{v}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

Un vecteur directeur de la droite (d) est $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$

Puisque $\vec{v} = 2\vec{u}$, les vecteurs directeurs sont colinéaires, alors les droites sont parallèles.

III. Orthogonalité dans l'espace

Définition :

Le **produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace est le nombre réel noté $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v}}$

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2\right)$$

En particulier :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - CB^2\right)$$

Remarque :

On étend aux vecteurs de l'espace la définition du produit scalaire donnée dans le plan.

Propriétés :

❶ $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)}$

❷ Si H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$$

$$= \begin{cases} AB \times AH \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens} \\ -AB \times AH \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$$

Propriétés :

❶ Dans un repère orthonormé de l'espace :

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'}$

❷ $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ $(k\vec{u}).\vec{v} = k \times \vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.(k\vec{v})$

$\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

Définition :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **orthogonaux** lorsque $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = 0}$.

Exemple n°3 :
Démontrer le Théorème d'Apollonius ou théorème de la médiane :

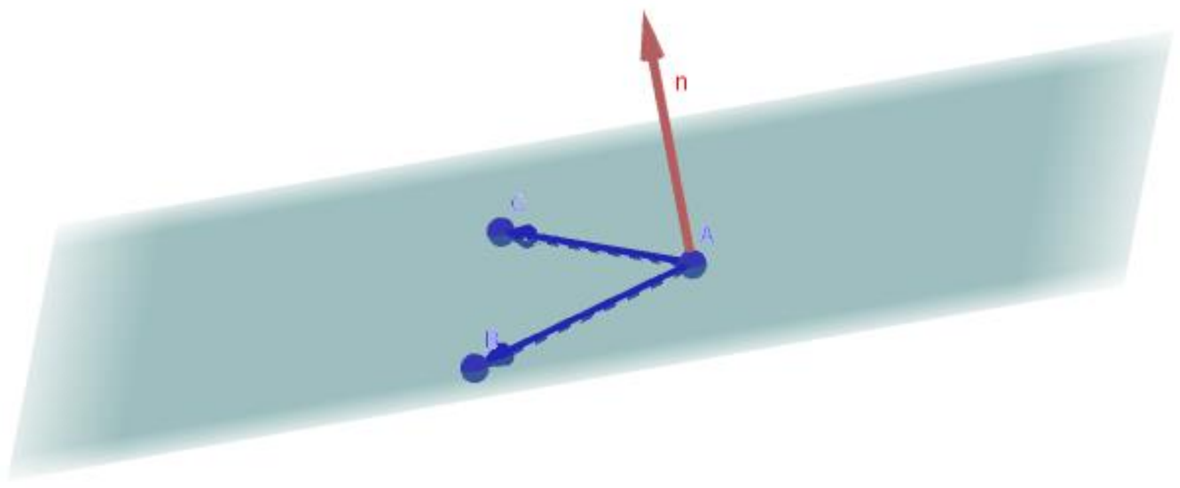
Soit ABM un triangle, si I est le milieu de $[AB]$ alors

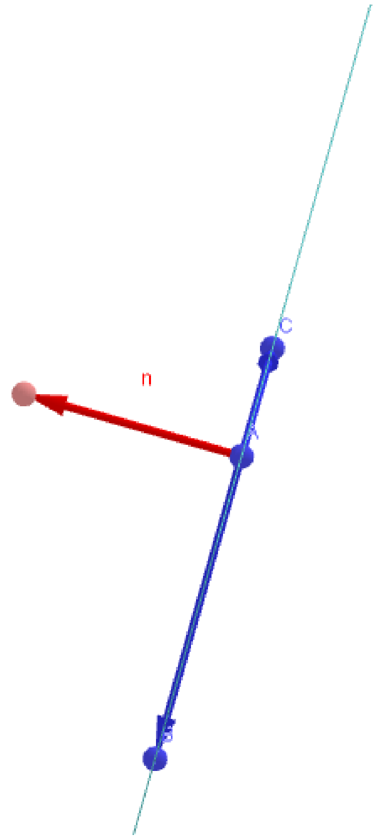
$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

IV. Equations cartésiennes d'un plan

Propriété :
Deux droites d et d' de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonales si, et seulement si, $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Définition :
Un vecteur non nul $\vec{n}$ est **normal à un plan** $\mathcal{P}$ lorsque toute droite de vecteur directeur $\vec{n}$ est orthogonale au plan $\mathcal{P}$.


n
C
A
B


n
C
A
B

Propriété :

Soit A un point de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur non nul

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ est le plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Définition :

Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans de vecteur normaux respectifs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont **perpendiculaires** lorsque $\vec{n}.\overrightarrow{n'} = 0$.

Propriété : L'espace est muni d'un repère orthonormé

❶ Un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal non nul $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet une **équation cartésienne** de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$.

❷ Réciproquement a, b, c trois nombres réels non tous nuls et d un réel, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Exemple n°4 :

1 Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par $A(2;1;-3)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-5\\6\end{pmatrix}$.

2 Déterminer l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}'$ parallèle à $\mathcal{P}$ passant par $B(0;-1;2)$.

1 L'équation est de la forme :

$$4x - 5y + 6z + d = 0$$

Or $A(2; 1; -3) \in \mathcal{P}$ donc

$$4 \times 2 - 5 \times 1 + 6 \times (-3) + d = 0$$
$$\Leftrightarrow d = 15$$

$$\boldsymbol{4x - 5y + 6z + 15 = 0}$$

2 Déterminer l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}'$ parallèle à $\mathcal{P}$ passant par $B(0; -1; 2)$.

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ étant parallèles, ont le même vecteur normal

L'équation est de la forme :

$$4x - 5y + 6z + d = 0$$

Or $B(0; -1; 2) \in \mathcal{P}'$ donc

$$5 + 12 + d = 0$$

$$\boldsymbol{4x - 5y + 6z - 17 = 0}$$

Rappel :

Une droite est orthogonale à un plan lorsqu’elle est orthogonale à toutes les droites du plan.

Propriété :

Une droite est orthogonale à toute droite d’un plan si, et seulement si, elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Exemple n°5 :

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier chaque réponse.

Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - y + 3z + 1 = 0$ et la droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = -5 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

On donne les points $A(1;1;0)$, $B(3;0;-1)$ et $C(7;1;-2)$.

Proposition 1 :

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est

$$\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = -2 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Proposition 2 :

Les droites $\mathcal{D}$ et (AB) sont orthogonales.

Proposition 3 :

Les droites $\mathcal{D}$ et (AB) sont coplanaires.

Proposition 4 :

La droite $\mathcal{D}$ coupe le plan $\mathcal{P}$ au point E de coordonnées $(8; -3; -4)$.

Proposition 5 :

Les plans $\mathcal{P}$ et (ABC) sont parallèles.