– Terminale spécialité mathématiques
Peut-on inverser la fonction exponentielle ?

Activité n°1 : Equations de la forme $e^x = y$

▶ 1. Donner le tableau de variations de la fonction $x \longmapsto e^x$ avec les limites.

▶ 2. Résoudre les équations ci-dessous :

a) $e^x = 1$
b) $e^x = e$
c) $e^x = 2$
d) $e^x = -3$
e) $e^x = 0$
f) $e^x = y$ où $y \in \mathbb{R}$

Activité n°2 : Inversion de la fonction exponentielle

Définition.
La fonction **logarithme népérien**, notée ln, est la fonction définie sur $]0,+\infty[$ qui, à tout nombre réel $y > 0$, associe l'unique solution de l'équation $e^x = y$.

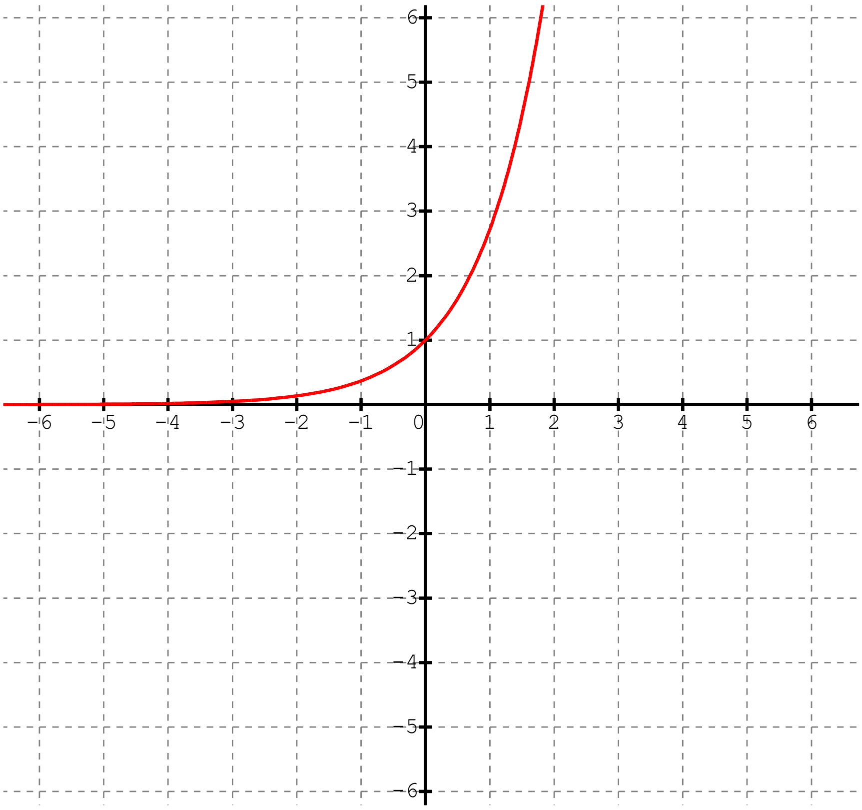
On note $x = \ln(y)$: $\ln \; : \;]0,+\infty[\to \mathbb{R}$

$$y \mapsto \mathbf{\ln(y) = x} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{y = e^x}$$

On dit que les fonctions exponentielle et logarithme népérien sont réciproques l'une de l'autre.

a) Déterminer $\ln(1)$, $\ln(e)$ et une valeur approchée de $\ln(2)$.

b) La fonction $x \longmapsto e^x$ a été tracée dans le repère ci-dessous. Tracer la courbe de la fonction $x \longmapsto \ln(x)$.



c) A l'aide du graphique, conjecturer le sens de variation de la fonction $x \longmapsto \ln(x)$ puis $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x)$.

Correction

Activité n°1 : Equations de la forme $e^x = y$

▶ 1. Tableau de variations de la fonction $x \longmapsto e^x$:

x	$-\infty$	$+\infty$
e^x	$+$	
e^x	0 $\nearrow$	$+\infty$

▶ 2. Résoudre les équations ci-dessous :

a) $e^x = 1 = e^0 \Leftrightarrow x = 0$ donc $\ln(1) = 0$

b) $e^x = e = e^1 \Leftrightarrow x = 1$ donc $\ln(e) = 1$

c) $e^x = 2$

La fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle y est donc continue.

$$e^0 = 1 < 2 \quad \text{et} \quad e^1 \approx 2{,}718 > 2$$

Donc, d'après le théorème de valeurs intermédiaires, $e^x = 2$ admet une unique solution qui vaut environ 0,6931.

d) $e^x = -3$ n'admet pas de solution puisque $\forall x \in \mathbb{R},\ \ e^x > 0$.

e) $e^x = 0$ n'admet pas de solution puisque $\forall x \in \mathbb{R},\ \ e^x > 0$.

f) $e^x = y$ où $y \in \mathbb{R}$

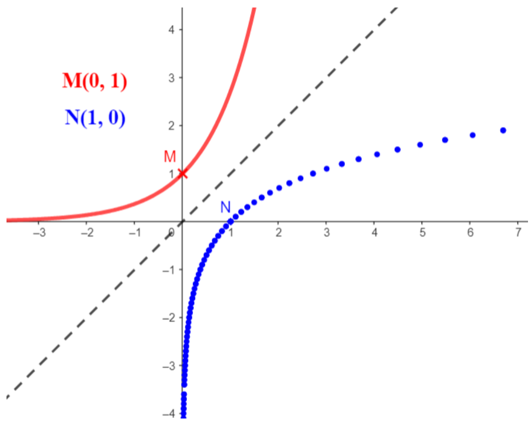
Si $y \leq 0$ alors l'équation $e^x = y$ n'admet pas de solution.

Si $y > 0$ alors l'équation $e^x = y$ admet une unique solution.

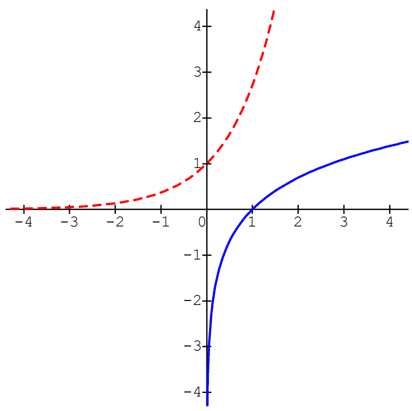
Activité n°2 : Inversion de la fonction exponentielle

a) Déterminer $\ln(1)$, $\ln(e)$ et une valeur approchée de $\ln(2)$.

$$e^x = 1 = e^0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ donc } \ln(1) = 0$$
$$e^x = e = e^1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ donc } \ln(e) = 1$$
$$e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2) \approx 0{,}69315$$



b) La courbe de la fonction $x \longmapsto \ln(x)$ s'obtient en inversant abscisse et ordonnée des points de la courbe de la fonction exponentielle.



c) A l'aide du graphique, on peut conjecturer

x	0	1	e	$+\infty$
$f(x) = \ln(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	0 $\nearrow$	1 $\nearrow$	$+\infty$