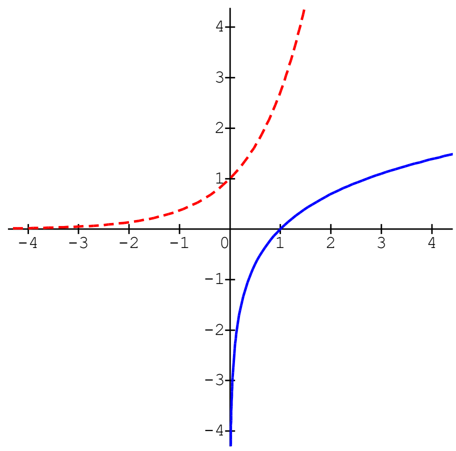
LYCEE Polyvalent Albert EINSTEIN

– Terminale spécialité mathématiques
Quelles sont les propriétés de la fonction logarithme ?

La fonction logarithme népérien

$\forall x \in]0;+\infty[$, le nombre $\ln(x)$ est définie comme étant l'unique solution de l'équation d'inconnue y : $e^y = x$.

Par conséquent, les fonctions exponentielle et logarithme népérien sont réciproques l'une de l'autre.



$$\boldsymbol{\forall x \in]0;+\infty[\quad e^{\ln(x)} = x}$$

$$\boldsymbol{\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln(e^x) = x}$$

Les courbes des fonctions $y = e^x$ et $y = \ln(x)$ sont par conséquent, symétriques par rapport à l'axe $y = x$. Ce qui nous permet de conclure que **la fonction $\boldsymbol{x \longmapsto \ln(x)}$ est dérivable sur $\boldsymbol{]0;+\infty[}$.**

Activité n°1 : Dérivabilité

▶ 1. Soit $x \in]0\,;+\infty[$, on définit la fonction $f(x) = e^{\ln(x)}$.

a) Déterminer de deux façons différentes la dérivée de la fonction f.

b) En déduire $(\ln(x))'$.

▶ 2. Soit u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et telle que pour tout $x \in \mathrm{I},\ u(x) > 0$.

Soit $x \in I$, on définit la fonction $f(x) = e^{\ln(u(x))}$.

a) Déterminer de deux façons différentes la dérivée de la fonction f.

b) En déduire $(\ln(u))'$.

Activité n°2 : Relation fonctionnelle

▶ 1. Soit $y \in \mathbb{R}^{+*}$ fixé arbitrairement,

$\forall x \in]0;+\infty[$, on définit $f(x) = \ln(x \times y) - \ln(x)$

a) Déterminer $f(1)$.

b) Déterminer la dérivée de la fonction f.

c) Que peut-on en déduire ?

▶ 2. Soit $x \in]0;+\infty[$ et $y \in]0;+\infty[$, démontrer que :

a) $\ln(x^2) = 2\ln(x)$

b) $\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln(y)$

c) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

d) $\ln\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}\ln(x)$

▶ 3. Soit $x \in]0;+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$, démontrer par récurrence que :

$$\ln(x^n) = n \times \ln(x)$$