Terminale Spécialité Mathématiques
Activité
Quelles sont les propriétés de la fonction logarithme ?

Table des matières

Activité
Quelles sont les propriétés de la fonction logarithme ?
Enoncé de l'activité

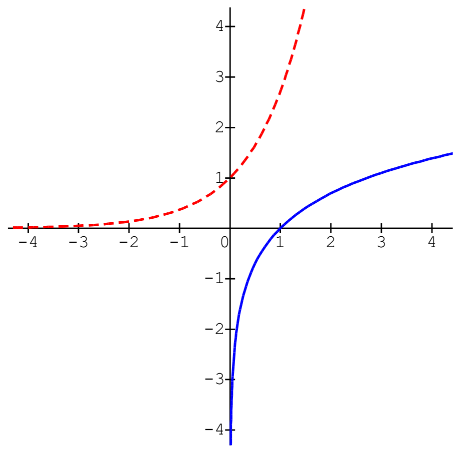
La fonction logarithme népérien

$\forall x \in]0;+\infty[$, le nombre $\ln(x)$ est définie comme étant l'unique solution de l'équation d'inconnue y : $e^y = x$.

Par conséquent, les fonctions exponentielle et logarithme népérien sont réciproques l'une de l'autre.

$$\forall \boldsymbol{x} \in]\mathbf{0};+\infty[\quad \boldsymbol{e}^{\ln(\boldsymbol{x})} = \boldsymbol{x}$$

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \quad \ln(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{x}$$



Les courbes des fonctions $y = e^x$ et $y = \ln(x)$ sont par conséquent, symétriques par rapport à l'axe $y = x$. Ce qui nous permet de conclure que **la fonction $\boldsymbol{x} \longmapsto \ln(\boldsymbol{x})$ est dérivable sur $]\mathbf{0};+\infty[$.**

Activité 1. Dérivabilité

▶1. Soit $x \in]0\,;+\infty[$, on définit la fonction $f(x) = e^{\ln(x)}$.

a) Déterminer de deux façons différentes la dérivée de la fonction f.

b) En déduire $(\ln(x))'$.

▶2. Soit u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et telle que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $u(x) > 0$.

Soit $x \in I$, on définit la fonction $f(x) = e^{\ln(u(x))}$.

a) Déterminer de deux façons différentes la dérivée de la fonction f.

b) En déduire $(\ln(u))'$.

Activité 2. Relation fonctionnelle

▶1. Soit $y \in \mathbb{R}^{+*}$ fixé arbitrairement,

$\forall x \in]0;+\infty[$, on définit $f(x) = \ln(x \times y) - \ln(x)$

a) Déterminer $f(1)$.

b) Déterminer la dérivée de la fonction f.

c) Que peut-on en déduire ?

▶2. Soit $x \in]0;+\infty[$ et $y \in]0;+\infty[$, démontrer que :

a) $\ln(x^2) = 2\ln(x)$

b) $\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln(y)$

c) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

d) $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)$

▶3. Soit $x \in]0;+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$, démontrer par récurrence que :

$$\ln(x^n) = n \times \ln(x)$$

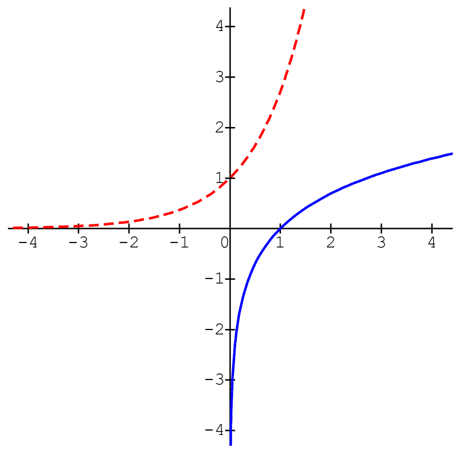
Activité
Quelles sont les propriétés de la fonction logarithme ?
Correction de l'activité

La fonction logarithme népérien

$\forall x \in]0;+\infty[$, le nombre $\ln(x)$ est définie comme étant l'unique solution de l'équation d'inconnue y : $e^y = x$.
Par conséquent, les fonctions exponentielle et logarithme népérien sont réciproques l'une de l'autre.

$$\forall \boldsymbol{x} \in]\mathbf{0};+\infty[\quad \boldsymbol{e^{\ln(x)} = x}$$

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \quad \boldsymbol{\ln(e^x) = x}$$



Les courbes des fonctions $y = e^x$ et $y = \ln(x)$ sont par conséquent, symétriques par rapport à l'axe $y = x$. Ce qui nous permet de conclure que **la fonction $\boldsymbol{x \longmapsto \ln(x)}$ est dérivable sur $]\mathbf{0};+\infty[$.**

Correction de l'activité 1. Dérivabilité

▶1. Soit $x \in]0\,;+\infty[$, on définit la fonction $f(x) = e^{\ln(x)}$.
a) Déterminer de deux façons différentes la dérivée de la fonction f.
b) En déduire $(\ln(x))'$.

▶2. Soit u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et telle que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $u(x) > 0$.
Soit $x \in I$, on définit la fonction $f(x) = e^{\ln(u(x))}$.
a) Déterminer de deux façons différentes la dérivée de la fonction f.
b) En déduire $(\ln(u))'$.

Exercice 1.	**1a.**	Soit $x \in]0\,;+\infty[$, $f(x) = e^{\ln(x)} = x$ donc $f'(x) = 1$ **D'autre part, on rappelle que : $\boldsymbol{(e^x)' = e^x}$ et $\boldsymbol{(e^u)' = u' \times e^u}$** $f'(x) = e^{\ln(x)} \times (\ln(x))' = x \times (\ln(x))'$
	1b.	On en déduit que $x \times (\ln(x))' = 1$ **et donc $\boldsymbol{(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}}$**
	2a.	$\forall x \in \mathrm{I}, \qquad u(x) > 0$ Soit $x \in I$, $f(x) = e^{\ln(u(x))} = u(x)$ $f'(x) = u'(x)$ **D'autre part, on rappelle que : $\boldsymbol{(e^u)' = u' \times e^u}$** $f'(x) = e^{\ln(u(x))} \times \big(\ln(u(x))\big)' = u(x) \times \big(\ln(u(x))\big)'$

	2b.	On en déduit que $u(x) \times \left(\ln\left(u(x)\right)\right)' = u'(x)$ donc $\left(\ln\left(u(x)\right)\right)' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ **et donc** $\boldsymbol{(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}}$

Correction de l'activité 2. Relation fonctionnelle

▶ 1. Soit $y \in \mathbb{R}^{+*}$ fixé arbitrairement,

$\forall x \in]0;+\infty[$, on définit $f(x) = \ln(x \times y) - \ln(x)$

a) Déterminer $f(1)$.

b) Déterminer la dérivée de la fonction f.

c) Que peut-on en déduire ?

▶ 2. Soit $x \in]0;+\infty[$ et $y \in]0;+\infty[$, démontrer que :

a) $\ln(x^2) = 2\ln(x)$

b) $\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln(y)$

c) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

d) $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)$

▶ 3. Soit $x \in]0;+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$, démontrer par récurrence que :

$$\ln(x^n) = n \times \ln(x)$$

Activité n°2.	**1a.**	Soit $y \in \mathbb{R}^{+*}$ fixé arbitrairement, $f(1) = \ln(1 \times y) - \ln(1)$ $f(1) = \ln(y) - 0$ $f(1) = \ln(y)$
	1b.	$\forall x \in]0;+\infty[$, $f(x) = \ln(x \times y) - \ln(x)$ $f'(x) = \dfrac{y}{x \times y} - \dfrac{1}{x}$ $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x}$ $f'(x) = 0$
	1c.	On en déduit que la fonction f est constante sur $]0;+\infty[$ or $f(1) = \ln(y)$ donc $\forall x \in]0;+\infty[\ f(x) = \ln(y)$ $\ln(x \times y) - \ln(x) = \ln(y)$ J'en déduis que $\boldsymbol{\forall x \in]0;+\infty[, \forall y \in]0;+\infty[,\ \ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)}$
	2a.	$\boldsymbol{\forall x \in]0;+\infty[, \forall y \in]0;+\infty[,\ \ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)}$ En posant $y = x$, on obtient $\ln(x \times x) = \ln(x) + \ln(x)$ $\boldsymbol{\ln(x^2) = 2\ln(x)}$

	2b.	$\forall \boldsymbol{x} \in]\mathbf{0}; +\infty[, \forall \boldsymbol{y} \in]\mathbf{0}; +\infty[,\ \mathbf{ln}(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) = \mathbf{ln}(\boldsymbol{x}) + \mathbf{ln}(\boldsymbol{y})$ En posant $x = \frac{1}{y}$, on obtient $\ln\left(\frac{1}{y} \times y\right) = \ln\left(\frac{1}{y}\right) + \ln(y)$ $\ln(1) = 0 = \ln\left(\frac{1}{y}\right) + \ln(y)$ $\mathbf{ln}\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{y}}\right) = -\mathbf{ln}(\boldsymbol{y})$
	2c.	$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x \times \frac{1}{y}\right)$ $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right)$ $\mathbf{ln}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}\right) = \mathbf{ln}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{ln}(\boldsymbol{y})$
	2d.	$\forall \boldsymbol{x} \in]\mathbf{0}; +\infty[, \forall \boldsymbol{y} \in]\mathbf{0}; +\infty[,\ \mathbf{ln}(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) = \mathbf{ln}(\boldsymbol{x}) + \mathbf{ln}(\boldsymbol{y})$ En posant $y = \sqrt{x}$, on obtient $\ln(\sqrt{x} \times \sqrt{x}) = \ln(\sqrt{x}) + \ln(\sqrt{x})$ $\ln(x) = 2\ln(\sqrt{x})$ $\mathbf{ln}(\sqrt{\boldsymbol{x}}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{ln}(\boldsymbol{x})$
	3.	Soit $x \in]0; +\infty[$, démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n) : \ln(x^n) = n \times \ln(x)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ **Initialisation** pour $n = 0$: $\ln(x^0) = \ln(1) = 0$ $0 \times \ln(x) = 0$ $\text{n}(x^0) = 0 \times \ln(x)$ **donc $\mathcal{P}(\mathbf{0})$ est vraie.** **Hérédité :** **On suppose que $\mathcal{P}(\boldsymbol{n})$** : $\ln(x^n) = n \times \ln(x)$ **est vraie** pour $n \in \mathbb{N}$ fixé $\ln(x^{n+1}) = \ln(x^n \times x)$ $\ln(x^{n+1}) = \ln(x^n) + \ln(x)$ $\ln(x^{n+1}) = n \times \ln(x) + \ln(x)$ $\ln(x^{n+1}) = (n+1) \times \ln(x)$ **donc $\mathcal{P}(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})$ est vraie** Par conséquent : $\mathcal{P}(\boldsymbol{n})$ est vraie pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ donc $\forall \boldsymbol{x} \in]\mathbf{0}; +\infty[, \forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \mathbf{ln}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}) = \boldsymbol{n} \times \mathbf{ln}(\boldsymbol{x})$