Explication de la définition :

Soit $x \in]0;+\infty[$, le cherche un antécédent à x par la fonction exponentielle.
La fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle y est donc continue.

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 < x \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty > x$$

x	$-\infty$	$+\infty$
e^x		$+$
e^x	0 $\nearrow$	$+\infty$

Donc, d'après le théorème de valeurs intermédiaires, le nombre x admet un unique antécédent par la fonction exponentielle. On note cet antécédent $\ln(x)$.

$$\mathbf{\ln(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y}$$

Exemple 1.

Calculer $\ln(1)$, $\ln(e)$ et $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$.

a) $e^x = 1 = e^0 \Leftrightarrow x = 0$ donc $\ln(1) = 0$
b) $e^x = e = e^1 \Leftrightarrow x = 1$ donc $\ln(e) = 1$
c) $e^x = \frac{1}{e} = e^{-1} \Leftrightarrow x = -1$ donc $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$

Exemple 2.

Résoudre

a) $\ln(x) = -3 \Leftrightarrow x = e^{-3}$
b) $e^x = 4 \Leftrightarrow x = \ln(4)$
c) $\ln(2x+1) < 2 \Leftrightarrow 2x+1 < e^2 \Leftrightarrow 2x < e^2 - 1 \Leftrightarrow x < \dfrac{e^2-1}{2}$

Exemple 3.

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $\ln(x+2) + \ln(x+10) \leq 2\ln(3)$

$$\ln(x+2) + \ln(x+10) \leq 2\ln(3)$$
$$\ln[(x+2)(x+10)] \leq \ln(3^2)$$
$$\Leftrightarrow \ln[(x+2)(x+10)] \leq \ln(9)$$
$$\Leftrightarrow (x+2)(x+10) \leq 9$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 10x + 2x + 20 - 9 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 12x + 11 \leq 0$$

$$\Delta = 12^2 - 4 \times 11 = 100 > 0$$
$$x_1 = \frac{-12+10}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \text{ou} \quad x_1 = \frac{-12-10}{2} = \frac{-22}{2} = -11$$

Puisque, de plus, $a = 1 > 0$,

x	$-\infty$		-11		-1		1
$x^2+12x+11$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'équation n'est pas définie pour toutes les valeurs de x :

$$x + 2 > 0 \quad \text{et} \quad x + 10 > 0$$
$$\Leftrightarrow x > -2 \quad \text{et} \quad x > -10$$

L'ensemble de définition est donc $\mathcal{D}_f =]-2;+\infty[$

L'ensemble des solutions est alors :

$$\mathcal{D}_f \cap [-11;-1] =]-2;-1]$$