John Neper (1550 - 1617)

Théologien, physicien, astronome et mathématicien écossais. Il établit quelques formules de trigonométrie sphérique, popularisa l'usage du point pour la notation anglo-saxonne des nombres décimaux mais surtout inventa les logarithmes. Son objectif était de simplifier les calculs trigonométriques nécessaires en astronomie.

I. Le logarithme népérien

Définition.

La fonction **logarithme népérien**, notée ln, est la fonction définie sur $]0,+\infty[$ qui, à tout nombre réel $y>0$, associe l'unique solution de l'équation $e^x=y$. On note $x=\ln(y)$.

$$\begin{aligned} \ln\ :\ &]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ & y \mapsto \boldsymbol{\ln(y)=x \quad \Leftrightarrow \quad y=e^x} \end{aligned}$$

Exemple 1.

Calculer $\ln(1)$, $\ln(e)$ et $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$

Propriété.

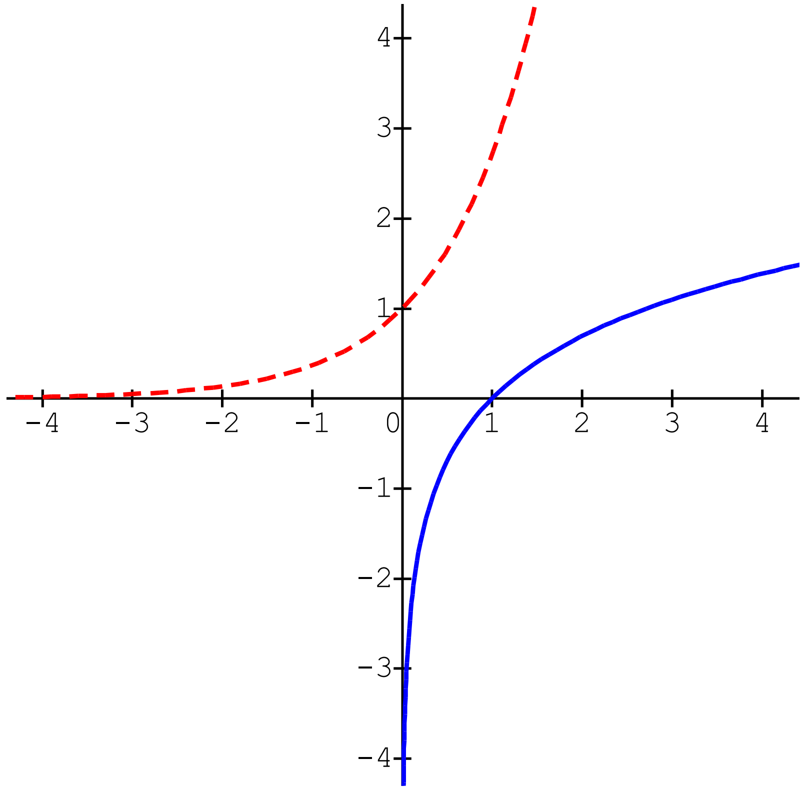
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\ln(e^x) = x}$.

Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\boldsymbol{e^{\ln(x)} = x}$.

On dit que les fonctions exp et ln sont ***réciproques*** *l'une de l'autre.*

Conséquence graphique :

Dans un repère orthonormé, les courbes des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.



Théorème.

La fonction logarithme est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

Conséquences.

Pour tous nombres réels a et b, $a>0$ et $b>0$

$$\ln(a)=\ln(b) \Leftrightarrow a=b$$
$$\ln(a)\leq\ln(b) \Leftrightarrow a\leq b$$
$$\ln(a)<\ln(b) \Leftrightarrow a<b$$

Exemple 2.

Résoudre

$$a)\ \ln(x)=-3$$
$$b)\ \ e^{x}=4$$
$$c)\ \ \ln(2x+1)<2$$

II. Relation fonctionnelle

Théorème.

Pour tout $a > 0$ et $b > 0$, $\mathbf{ln}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \mathbf{ln}(\boldsymbol{a}) + \mathbf{ln}(\boldsymbol{b})$

i.e. $x \mapsto \ln(x)$ transforme un produit en somme.

Propriétés.

Pour tout $a > 0$, $b > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathbf{ln}\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{b}}\right) = -\mathbf{ln}(\boldsymbol{b}) \qquad \mathbf{ln}\left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right) = \mathbf{ln}(\boldsymbol{a}) - \mathbf{ln}(\boldsymbol{b}),$$

$$\mathbf{ln}(\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}) = \boldsymbol{n} \times \mathbf{ln}(\boldsymbol{a}) \quad \text{et} \quad \mathbf{ln}\left(\sqrt{\boldsymbol{a}}\right) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \times \mathbf{ln}(\boldsymbol{a})$$

Exemple 3.

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $\ln(x+2) + \ln(x+10) \leq 2\ln(3)$

III. Etude de la fonction ln

Propriété :

La fonction ln est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$
et pour tout $x > 0$

$$\boldsymbol{(\ln(x))' = \frac{1}{x}}$$

Théorème : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

$x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe de $x \mapsto \ln(x)$.

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x) = \frac{1}{x}$		$+$		
$f(x) = \ln(x)$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

IV. Fonction $x \mapsto \ln(u(x))$

Théorème (admis)

Si u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et telle que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $u(x) > 0$

Alors la fonction $x \longmapsto \ln(u(x))$ notée $\ln u$ est définie et dérivable sur I et

$$\boldsymbol{(\ln(u))' = \frac{u'}{u}}$$

Exemple 4.

Soit $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 5)$ définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer $f'(x)$.

V. Croissance comparée

Théorème de croissance comparée.

Soit $x \in]0;+\infty[$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^+} x^n \times \ln(x) = 0$$

Exemple 5.

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln(x)} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x-2} \qquad \lim_{x \to 0^+} x^2 \ln(x)$$

VI. D'autres logarithmes …

Définition.

On appelle **fonction logarithme décimal** la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $\boldsymbol{\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln 10}}$

$$\log(1) = \cdots \qquad \log(10) = \cdots$$

$$\log(10^2) = \cdots \qquad \log(10^3) = \cdots \qquad \log(10^4) = \cdots$$

Plus généralement : $\boldsymbol{\log(10^p) = p}$ **pour tout** $\boldsymbol{p \in \mathbb{Z}}$