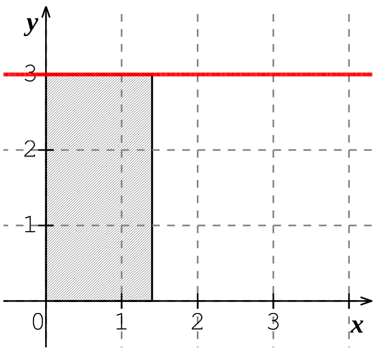
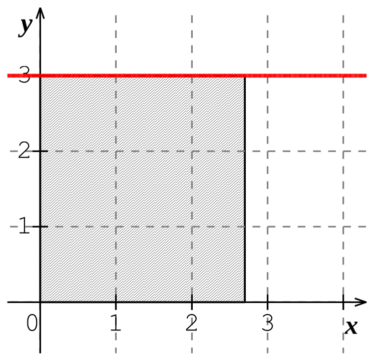
Calcul d'aires

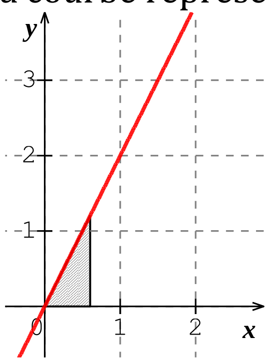
▶1. On considère la fonction constante $f(x) = 3$. Soit $t \in [0; +\infty[$, déterminer l'aire délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites $x = 0$ et $x = t$.



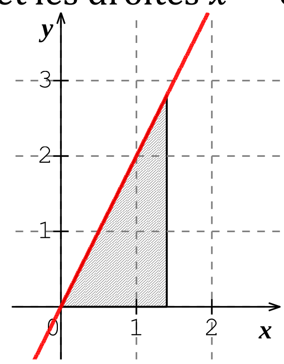
ou bien



▶2. On considère la fonction $g(x) = 2x$. Soit $t \in [0; +\infty[$, déterminer l'aire délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de g et les droites $x = 0$ et $x = t$.

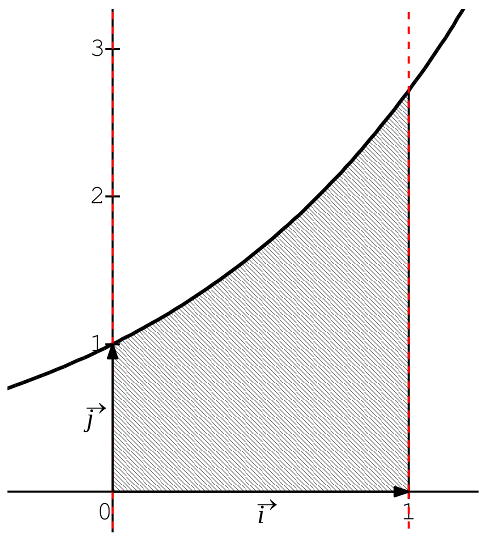


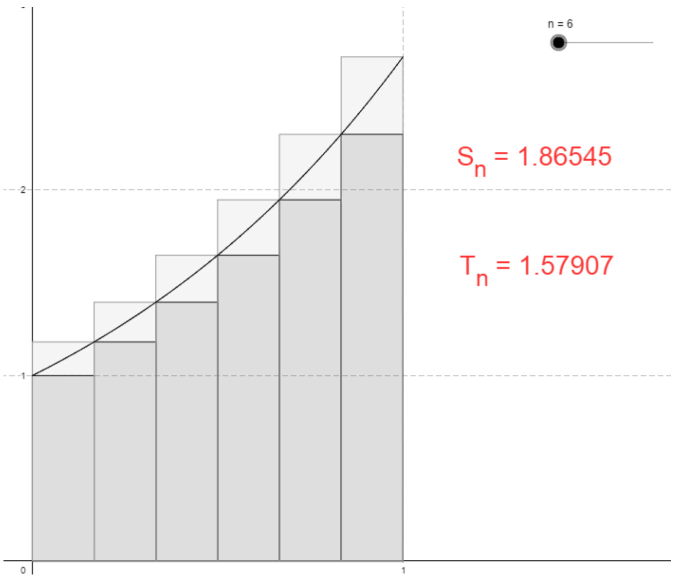
ou bien



▶3. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $f(x) = e^x$ dans le repère orthogonal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

Combien vaut l'aire $\mathcal{A}$ du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$?





Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on partage l'intervalle $[0; 1]$ en n intervalle de longueur $1/n$.

On note $\mathcal{A}$ l'aire cherchée

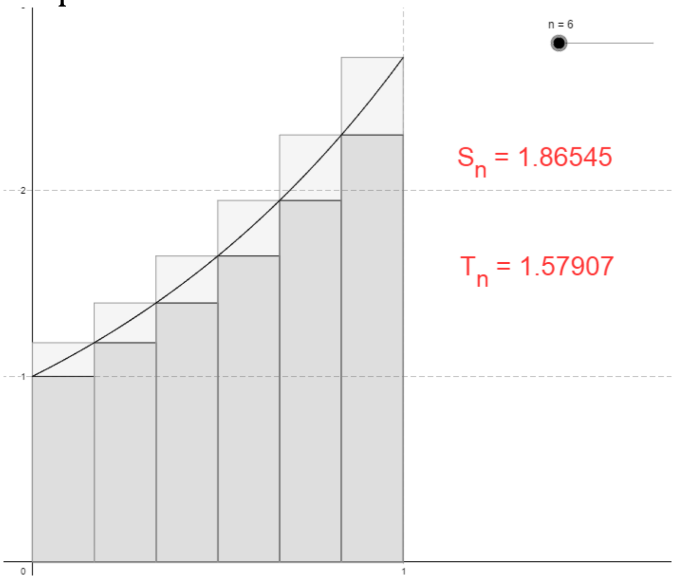
On peut alors écrire un encadrement …

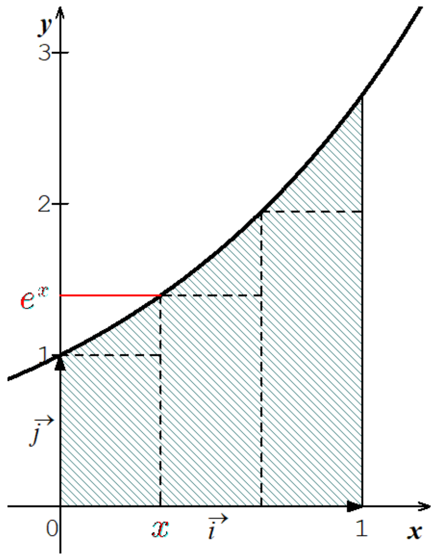
Solution de la 3e question :
Calcul de l'aire sous la courbe de la fonction exponentielle selon la méthode des rectangles (Somme de Riemann) :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,$ on partage l'intervalle $[0;1]$ en n intervalle de longueur $1/n$.

On note $\mathcal{A}$ l'aire cherchée

On peut alors écrire un encadrement : l'aire cherchée est entre la somme des rectangles gris foncé et la somme des rectangles « plus grands » gris foncé + gris clair.





$$\frac{1}{n}\times 1+\frac{1}{n}\times e^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\times e^{\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{n}\times e^{\frac{n-1}{n}} \leq \boldsymbol{\mathcal{A}} \leq \frac{1}{n}\times e^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\times e^{\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{n}\times e^{\frac{n}{n}}$$

$$\frac{1}{n}\times\left(1+e^{\frac{1}{n}}+\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^2+\cdots+\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}\right)\leq \mathcal{A} \leq \frac{1}{n}e^{\frac{1}{n}}\times\left(1+e^{\frac{1}{n}}+\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^2+\cdots+\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}\right)$$

$$\frac{1}{n}\times\frac{1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{1}{n}}}\leq \mathcal{A} \leq \frac{1}{n}\times e^{\frac{1}{n}}\times\frac{1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{1}{n}}}$$

$$\frac{1-e}{n\left(1-e^{\frac{1}{n}}\right)}\leq \mathcal{A} \leq e^{\frac{1}{n}}\times\frac{1-e}{n\left(1-e^{\frac{1}{n}}\right)}$$

$$\text{or } \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=e^0=1$$

car la fonction exponentielle est dérivable en 0 et sa dérivée est elle − même

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{1/n}-1}{1/n} = 1 = \lim_{n\to+\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$$

$$\text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1-e}{n\left(1-e^{\frac{1}{n}}\right)} = \frac{1-e}{(-1)} = e-1$$

$$\text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}} \times \frac{1-e}{n\left(1-e^{\frac{1}{n}}\right)} = 1 \times \frac{1-e}{(-1)} = e-1$$

D’après le théorème des gendarmes, les deux suites qui encadrent $\mathcal{A}$ tendent vers $e-1$ on en déduit alors que $\mathcal{A} = e-1$.