Chap 6. Comment calcule-t-on l'aire sous une courbe ? Terminale G

Bernhard Riemann (1826-1866)

Mathématicien allemand, influent sur le plan théorique, il a apporté une contribution importante à l'analyse et à la géométrie différentielle. Il a travaillé notamment sur les complexes, les intégrales …

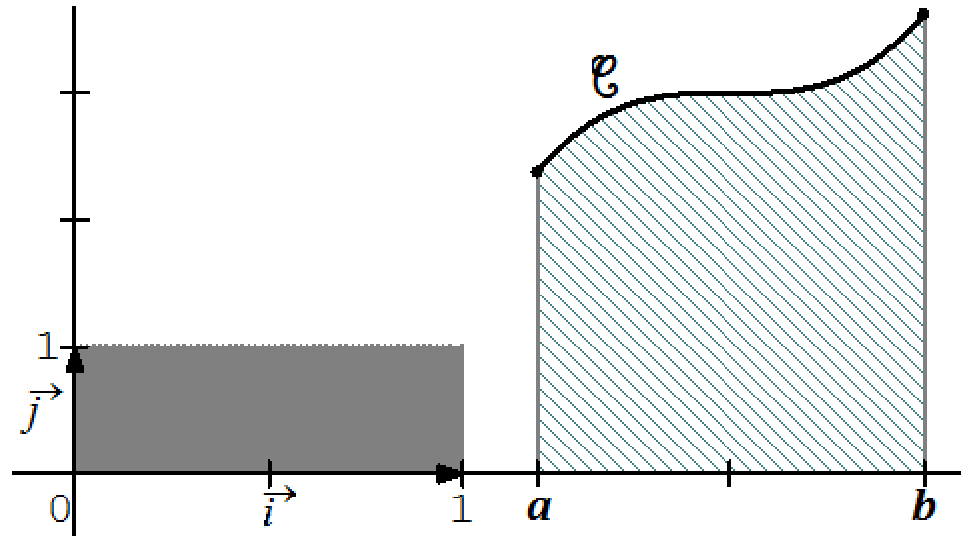
I. Intégrale d'une fonction continue et positive

Définition.

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

On appelle **intégrale de a à b de la fonction f** l'aire, en unités d'aire, du domaine situé sous la courbe $\mathcal{C}$ et limité par l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

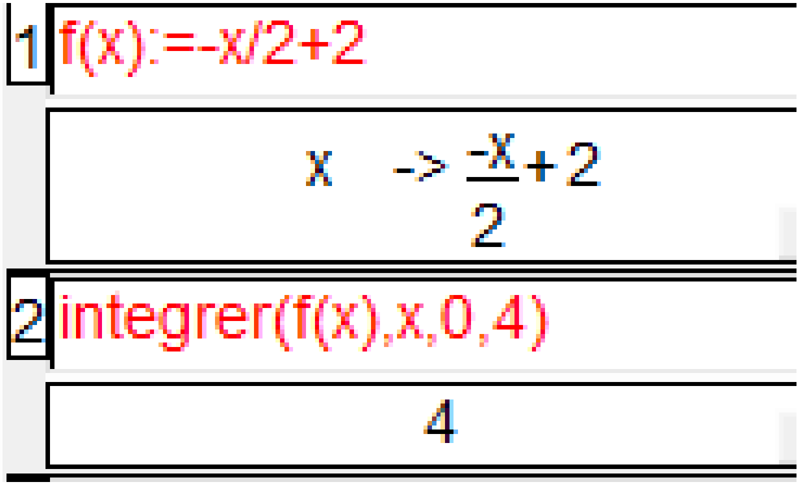
On la note $\displaystyle \int_a^b f(x)dx$

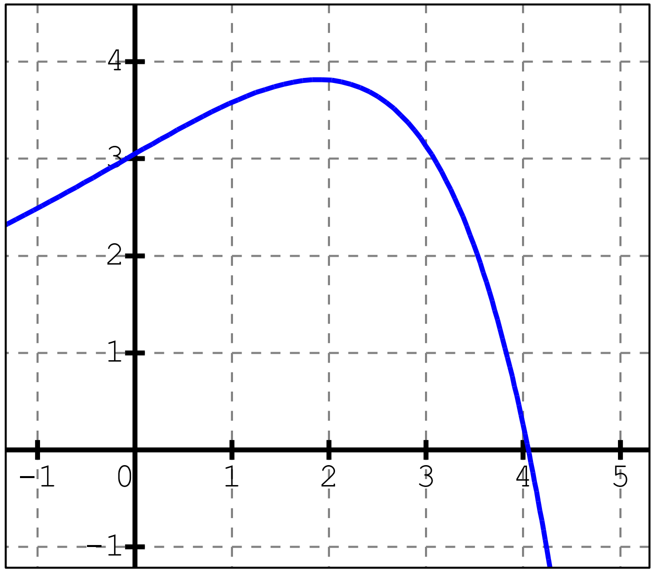


Exemple 1.

① Calculez $\int_{-1}^{3} 2dx$

② Justifiez la capture d'écran ci-contre :



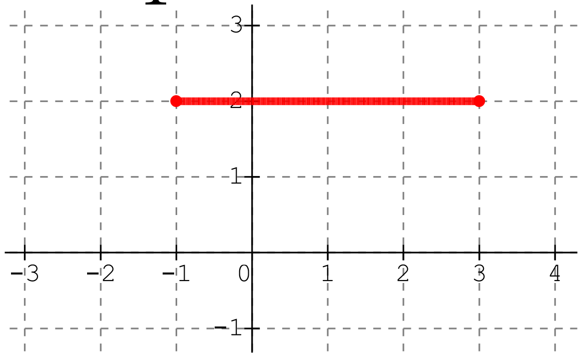


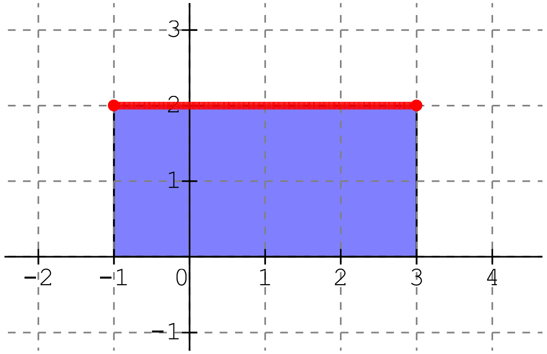
③ La figure ci-contre donne la courbe représentative d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$. Donnez une estimation de

$$I = \int_{0}^{3} g(x)dx$$

Exemple 1.

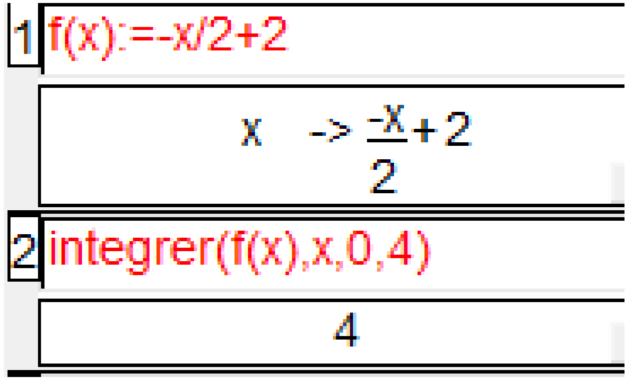
① Calculez $\int_{-1}^{3} 2dx$





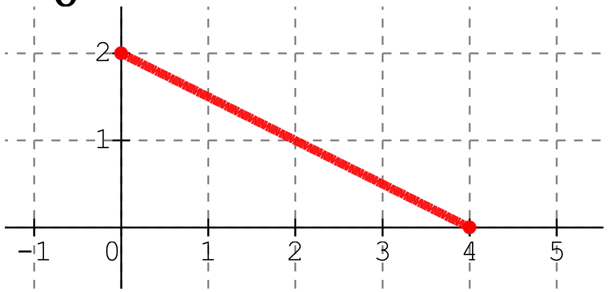
L'aire recherchée est ici un rectangle de longueur 4 et de largeur 2, donc :

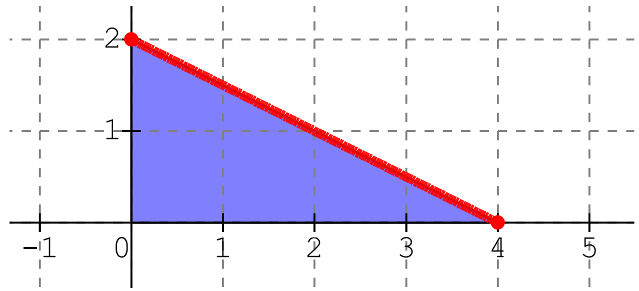
$$\int_{-1}^{3} 2dx = 4 \times 2 = 8 \text{ unités d'aire}$$



② Sur l'écran ci-contre, le logiciel calcule l'intégrale suivante :

$$\int_0^4 f(x)dx \quad \text{où} \quad f(x) = -\frac{x}{2} + 2$$





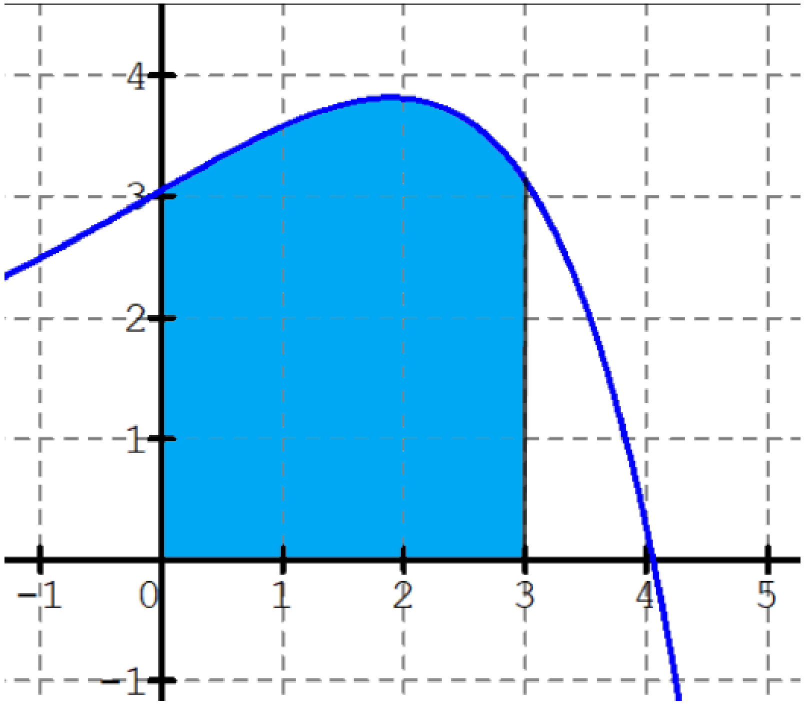
L'aire recherchée est ici un triangle de base 4 et de hauteur 2, donc :

$$\int_0^4 f(x)dx = \frac{4 \times 2}{2} = 4$$

③ La figure ci-contre donne la courbe représentative d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$. Une estimation de

$$I = \int_0^3 g(x)dx$$

L'intégrale I correspond à l'aire du domaine situé entre la courbe de la fonction g et l'axe des abscisses, et, les droites $x = 0$ et $x = 3$.
Une unité d'aire ici correspond à une carreau, donc $I \approx 10{,}5$ ua



II. Notion de primitives

Théorème fondamental :
Si f est une fonction continue et positive sur $[a, b]$, la fonction F définie sur $[a, b]$ par $F : x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a, b]$ et a pour dérivée f.

Définition :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I,
La fonction F est une **primitive** de f sur I lorsque F est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Exemple 2.

❶ Déterminer une primitive de :

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 1 \text{ définie sur } \mathbb{R}$$

$$g(x) = 3\cos x + \sin(\pi x) \text{ définie sur } \mathbb{R}$$

$$h(x) = \frac{2}{\sqrt{2x+1}} \text{ définie sur } \left]-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$$

$$k(x) = (5x-1)^6 \text{ définie sur } \mathbb{R}$$

$$l(x) = \frac{x}{x^2+1} \text{ définie sur } \mathbb{R}$$

❷ $F(x) = x\ln(x) - x$ est une primitive de quelle fonction ?

Exemple 2

❶ $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$

$$F(x) = 2\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - x$$

$$F(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 - x$$

Formules de dérivée : $(x^n)' = x^{n-1}$

Formule de primitive : x^n a pour primitive $\frac{x^{n+1}}{n+1}$

$g(x) = 3\cos x + \sin(\pi x)$ définie sur $\mathbb{R}$

$$G(x) = 3\sin x - \frac{\cos(\pi x)}{\pi} = 3\sin x - \frac{1}{\pi}\cos(\pi x)$$

Formules de dérivée :

$$(\sin(ax+b))' = \cos(ax+b) \times a$$
$$(\cos(ax+b))' = -\sin(ax+b) \times a$$

Formule de primitive :

$$\cos(ax+b) \text{ a pour primitive } \sin(ax+b) \times \frac{1}{a}$$
$$\sin(ax+b) \text{ a pour primitive } -\cos(ax+b) \times \frac{1}{a}$$

$h(x) = \frac{2}{\sqrt{2x+1}} = 2 \times \frac{2}{2\sqrt{2x+1}}$ définie sur $\left]-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$

$H(x) = 2 \times \sqrt{2x+1}$

Formules de dérivée :

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Formule de primitive :

$$\frac{u'}{2\sqrt{u}} \text{ a pour primitive } \sqrt{u}$$

$k(x) = (5x-1)^6$ définie sur $\mathbb{R}$

$$K(x) = \frac{(5x-1)^7}{7 \times 5} = \frac{1}{35}(5x-1)^7$$

Formules de dérivée :

$$(\boldsymbol{u^n})' = \boldsymbol{n\, u^{n-1}} \times \boldsymbol{u'}$$

Formule de primitive :

$$\boldsymbol{u^n \times u'} \ \textbf{a pour primitive} \ \frac{\boldsymbol{u^{n+1}}}{\boldsymbol{n+1}}$$

$l(x) = \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$

$$L(x) = \frac{1}{2} \times \ln(x^2 + 1)$$

Formules de dérivée :

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$$

Formule de primitive :

$$\frac{u'}{u} \text{ a pour primitive } \ln(u)$$

❷ $F(x) = x\ln(x) - x$,

on dérive F avec $(uv)' = u'v + uv'$

$$F'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1$$
$$F'(x) = \ln(x)$$

donc F est une primitive de la fonction $\ln(x)$

Propriétés :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, qui admet une primitive F sur I,

❶ La fonction G définie sur I est une primitive de f sur I si, et seulement si pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

❷ Il existe une unique primitive de f sur I prenant la valeur y_0 en x_0 où x_0 et y_0 sont des réels fixés.

Exemple 3.

❶ Déterminer les primitives de $f(x) = 5e^{-x} - \frac{4}{x}$.

❷ Déterminer la primitive de $g(x) = \sin x \cos x$ qui vaut 0 en π.

❸ Déterminer la primitive de $h(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $]0; +\infty[$ qui vaut 0

en 1

Exemple 3.

❶ $f(x) = 5e^{-x} - \frac{4}{x} = 5e^{-x} - 4 \times \frac{1}{x}$

$F(x) = 5 \times \frac{e^{-x}}{-1} - 4 \times \ln(x) = -5e^{-x} - 4\ln(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$

Formules de dérivée :

$$(e^u)' = u' \times e^u \quad \text{et} \quad (\ln(u))' = \frac{u'}{u}$$

Formule de primitive :

$u'e^u$ **a pour primitive** e^u

$\frac{u'}{u}$ **a pour primitive** $\ln(u)$

❷ Déterminer la primitive de $g(x) = \sin x \cos x$ qui vaut 0 en $\pi/2$. $g(x) = \sin x \cos x = \boldsymbol{u \times u'}$ où $u = \sin x$

$$G(x) = \frac{\sin^2(x)}{2} + k \text{ or } G(\pi/2) = \frac{\sin^2(\pi)}{2} + k = \frac{1}{2} + k$$

$$\text{donc } G(x) = \frac{\sin^2(x)}{2} - \frac{1}{2}$$

Formules de dérivée :

$$\boldsymbol{(u^2)' = 2\,u^{2-1} \times u' = 2\,u^1 \times u' = 2uu'}$$

Formule de primitive :

$$\boldsymbol{u \times u' \text{ a pour primitive } \frac{u^2}{2}}$$

❸ La primitive de $h(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $]0;+\infty[$ qui vaut 1 en 1

$$h(x) = \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} \times \ln(x) = \boldsymbol{u' \times u} \quad \text{où} \quad u = \ln(x)$$

$$H(x) = \frac{\ln^2(x)}{2} + k \text{ or } H(1) = \frac{\ln^2(1)}{2} + k = k = 1$$

$$\text{donc } H(x) = \frac{\ln^2(x)}{2} + 1$$

Formules de dérivée : $\boldsymbol{(u^2)' = 2uu'}$

Formule de primitive :

$$\boldsymbol{u \times u'} \textbf{ a pour primitive } \boldsymbol{\frac{u^2}{2}}$$

Théorème.
Toute fonction f continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Remarque :
La fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet donc des primitives mais on ne connaît pas de primitive « explicite ».

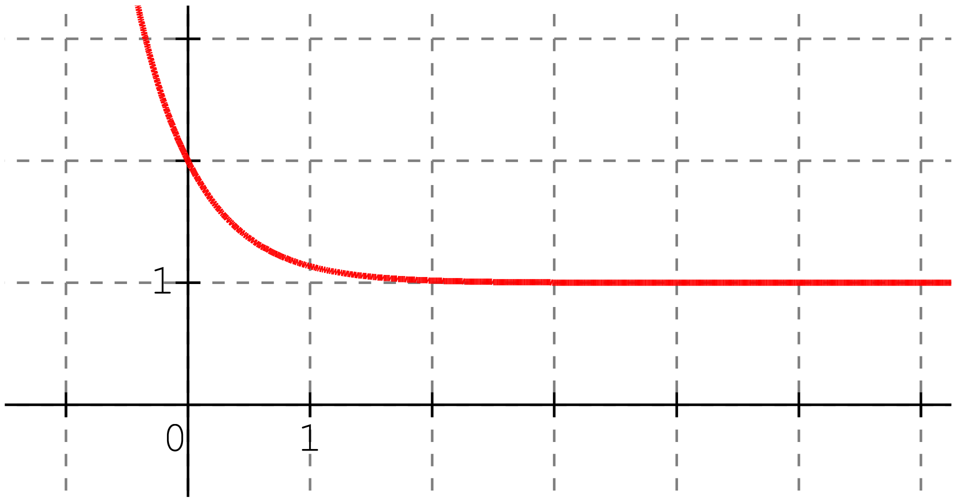
Théorème :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et F une primitive de f sur $[a;b]$

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Exemple 4.

❶ Calculez $I = \int_0^3 (e^{-2x} + 1)dx$ et hachurer l'aire représentée par I.

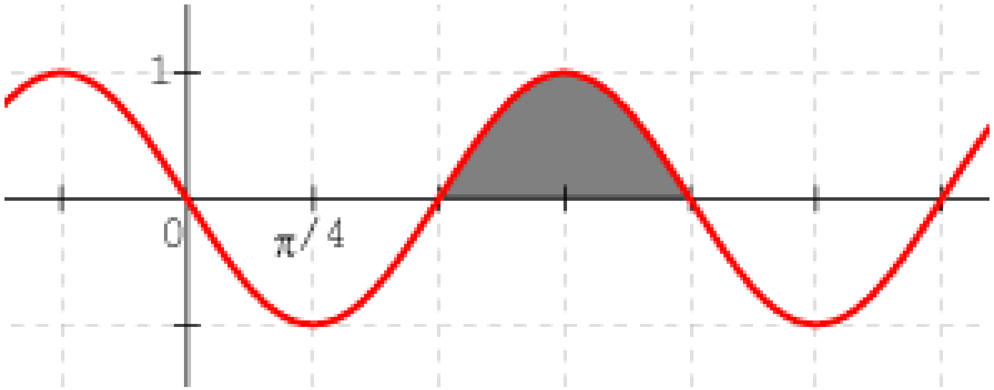


❷ On a représenté la fonction

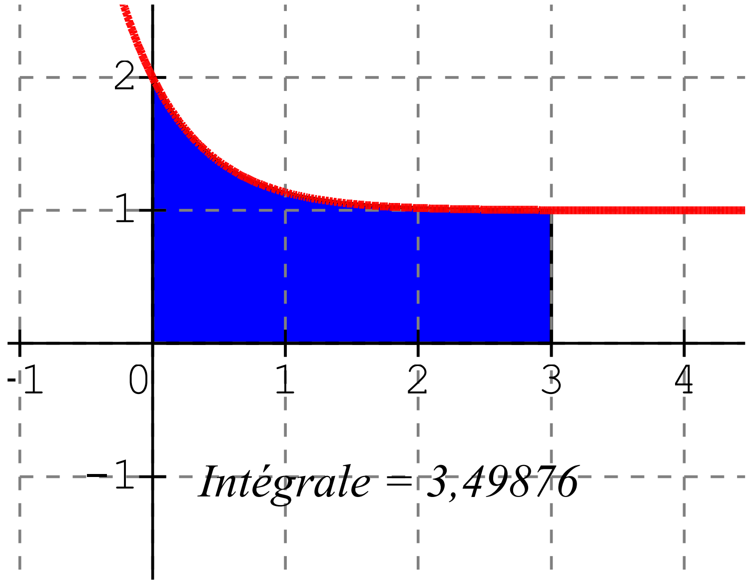
$g(x) = \sin(2x - \pi)$.

Déterminer l'aire de la surface

coloriée.



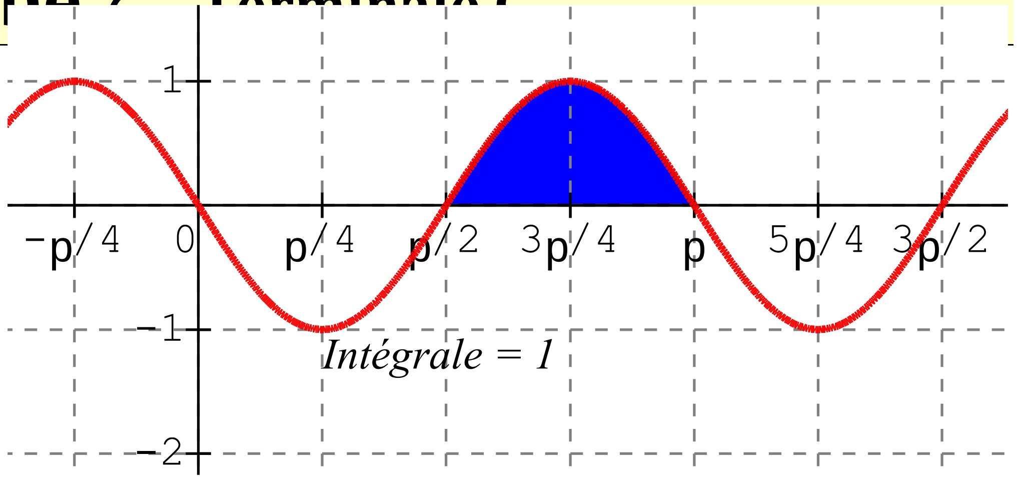
Exemple 4.



❶ $I = \int_0^3 (e^{-2x} + 1)dx$

$$I = \left[\underbrace{\frac{e^{-2x}}{-2} + x}_{\text{une primitive}}\right]_0^3$$

$$I = \underbrace{\left(\frac{e^{-6}}{-2} + 3\right)}_{\text{on remplace } x \text{ par } 3} - \underbrace{\left(\frac{e^{0}}{-2} + 0\right)}_{\text{on remplace } x \text{ par } 0} = \frac{-e^{-6}}{2} + 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} - \frac{e^{-6}}{2}$$



❷ $g(x) = \sin(2x - \pi)$.

$$J = \int_{\frac{2\pi}{4}}^{\frac{4\pi}{4}} \sin(2x - \pi)\,dx$$

$$J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(2x - \pi)\,dx = \left[\underbrace{-\frac{\cos(2x - \pi)}{2}}_{\text{une primitive}}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \underbrace{\left(-\frac{\cos(\pi)}{2}\right)}_{\text{on remplace } x \text{ par } \pi} - \underbrace{\left(-\frac{\cos(0)}{2}\right)}_{\text{on remplace } x \text{ par } \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

III. Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

Définition :

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$

L'**intégrale de $\boldsymbol{a}$ à $\boldsymbol{b}$ de la fonction $\boldsymbol{f}$** est le nombre $\boldsymbol{F(b) - F(a)}$

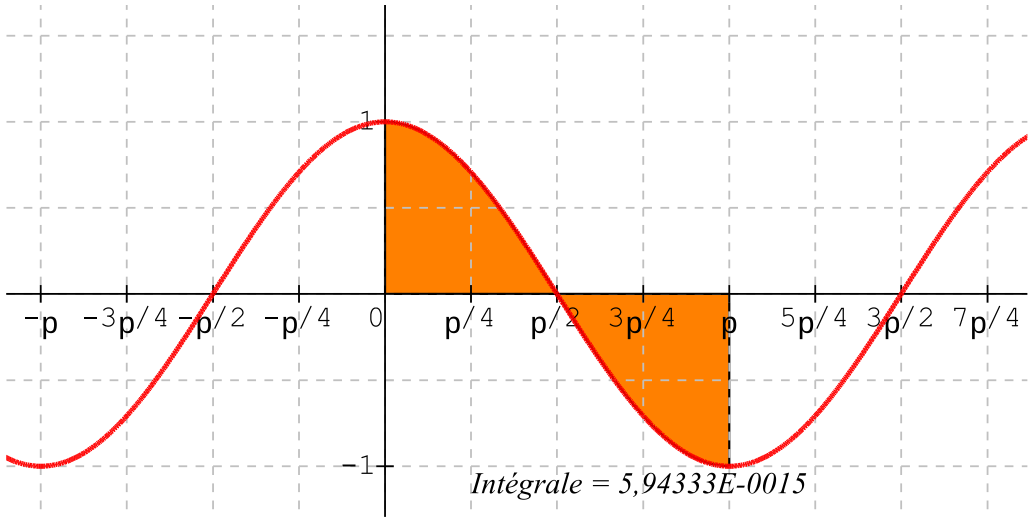
où F est une primitive de f sur $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[\underbrace{F(x)}_{F \text{ est une primitive de } f}\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exemple 5. Calculez $\int_0^{\pi} \cos t \, dt$ et $\int_1^{-1} \frac{x+1}{x^2+2x+2} \, dx$

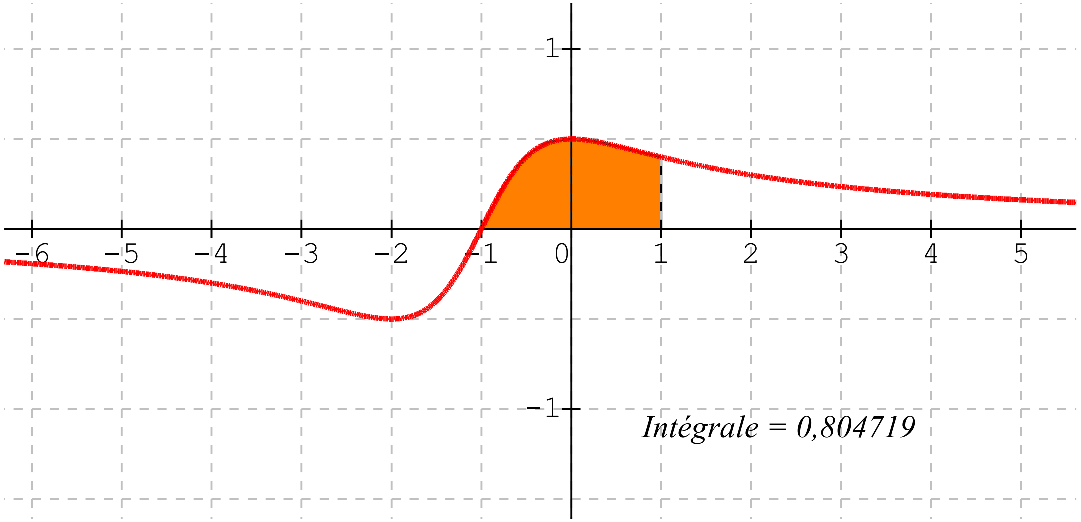
$$I = \int_0^{\pi} \cos t \, dt$$

$$I = [\sin t]_0^{\pi}$$
$$I = \sin \pi - \sin 0$$
$$I = 0 - 0 = 0$$



$$J = \int_{1}^{-1} \frac{x+1}{x^2+2x+2}\,dx$$

$$J = \int_{1}^{-1} \frac{1}{2} \times \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx$$



$$J = \left[\frac{1}{2} \times \ln(x^2+2x+2)\right]_{1}^{-1}$$

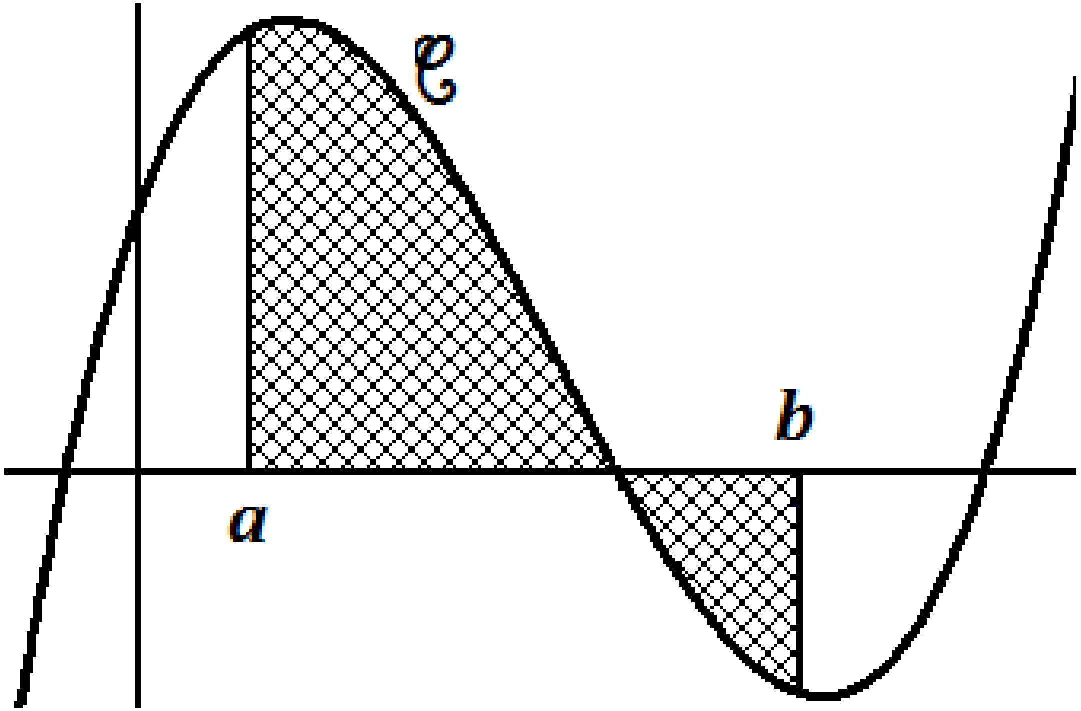
$$= \frac{1}{2} \times \ln(1-2+2) - \frac{1}{2} \times \ln(1+2+2)$$

$$= \frac{1}{2} \times \ln(1) - \frac{1}{2} \times \ln(5) = \frac{-1}{2} \times \ln(5) \approx -0{,}8$$

Interprétation graphique :

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ de signe quelconque

$\int_a^b f(x)dx$ est l'aire algébrique du domaine situé sous la courbe C et limité par l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$.



Elle est positive lorsque f est positive et négative lorsque f est négative sur $[a, b]$.

Conséquence :

Si f une fonction continue sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

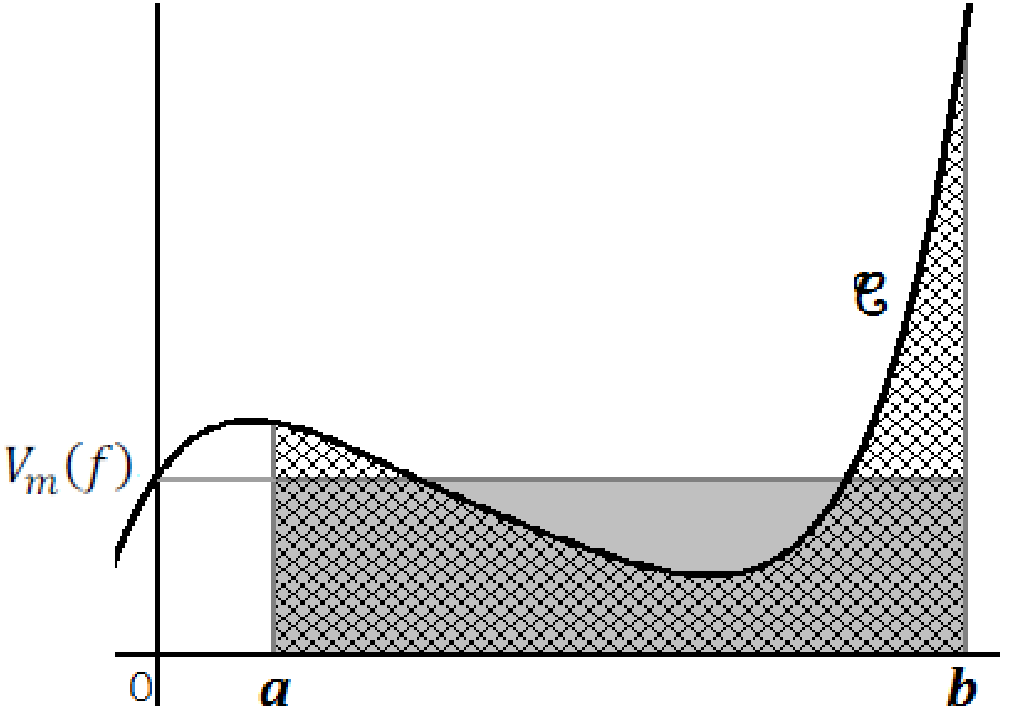
Définition de la valeur moyenne :

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ avec $a < b$

La valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est $V_m(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Interprétation graphique :

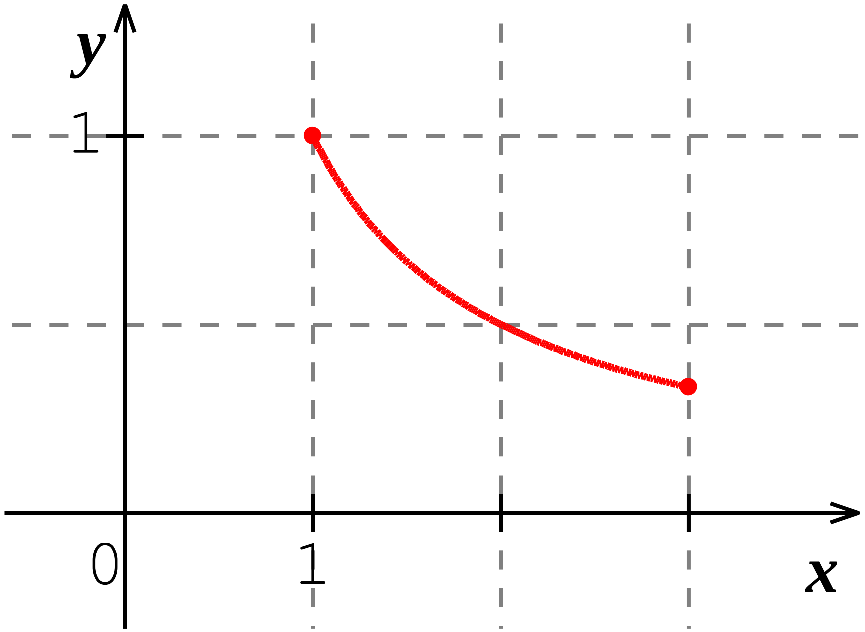
L'aire du domaine hachuré située sous la courbe C est égale à l'aire du rectangle gris de dimensions $(b-a)$ et $V_m(f)$.



Exemple 6.

Calculer la valeur moyenne de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ sur l'intervalle } [1; 3].$$



Intégrations par parties

Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur $[a, b]$ telles que u' et v' sont aussi dérivables sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b \boldsymbol{u'(x) \times v(x) dx} = [\boldsymbol{u(x) \times v(x)}]_a^b - \int_a^b \boldsymbol{u(x) \times v'(x) dx}$$

$$\int \boldsymbol{u' v} = [\boldsymbol{u\, v}] - \int \boldsymbol{u\, v'}$$

Exemple 7.

Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_{-1}^{1} (2x+1)\, e^{-x}\, dx \qquad J = \int_{1}^{3} x \ln(x)\, dx \quad \text{et} \quad K = \int_{0}^{1} x^2\, e^{x}\, dx$$

$$I = \int_{-1}^{1} (2x+1)\, e^{-x}\, dx$$

$$u' = e^{-x} \qquad u = -e^{-x}$$
$$v = 2x+1 \qquad v' = 2$$

$$I = \left[-(2x+1)\, e^{-x}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} -2\, e^{-x}\, dx$$

$$I = -3\, e^{-1} + (-1)\, e^{1} - \left[2\, e^{-x}\right]_{-1}^{1}$$

$$I = -3\, e^{-1} - e - (2\, e^{-1} - 2\, e^{1})$$

$$I = -5\, e^{-1} + e$$

$$I = \frac{-5 + e^{2}}{e}$$

$$J = \int_1^3 x \ln(x)\, dx \qquad u' = x \qquad u = \frac{x^2}{2}$$

$$J = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^3 - \int_1^3 \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x}\, dx \qquad v = \ln(x) \qquad v' = \frac{1}{x}$$

$$J = \frac{9}{2}\ln(3) - \int_1^3 \frac{x}{2}\, dx$$

$$J = \frac{9}{2}\ln(3) - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^3$$

$$J = \frac{9}{2}\ln(3) - \left(\frac{9}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{9}{2}\ln(3) - 2$$

$u' = e^x \quad u = e^x$

$v = x^2 \quad v' = 2x$

$$K = \int_0^1 x^2\, e^x\, dx$$

$$K = [x^2\, e^x\,]_0^1 - \int_0^1 2x\, e^x\, dx$$

$$K = e - \int_0^1 2x\, e^x\, dx$$

$u' = e^x \quad u = e^x$

$v = 2x \quad v' = 2$

$$K = e - \left([2x\, e^x\,]_0^1 - \int_0^1 2\, e^x\, dx \right)$$

$$K = e - (2e - [2\, e^x\,]_0^1)$$

$$K = e - \left(2e - (2\, e^1 - 2\, e^0)\right)$$

$$K = e - (2e - 2e + 2) = e - 2$$

IV. Equations différentielles

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue n'est pas un nombre, mais une fonction.
Par exemple, résoudre l'équation différentielle $f' = f$ consiste à rechercher toutes les fonctions égales à leur dérivée.
Notation : par convention, on note y au lieu de f ce qui donne $y' = y$.

Théorème : Equation différentielle homogène du premier ordre
Les solutions de l'équation différentielle $\boldsymbol{y' = ay}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto Ce^{ax}$ où C est une constante réelle.

Exemple 8.

1 Résoudre l'équation différentielle $2y' + 3y = 0$.

2 On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$(E)\ y' = 2y + 3.$$

a) Trouver une solution particulière à (E) notée φ.
b) Résoudre l'équation homogène associée $(E_0)\ y' = 2y$.
c) Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, $f - \varphi$ est solution de (E_0).
d) En déduire toutes les solutions de (E).
e) Donner la solution f de (E) qui vérifie $f'(0) = 1$.

Théorème : Equation différentielle du premier ordre

1 Soient a et b deux constantes réelles, $a \neq 0$, les solutions de l'équation différentielle $\boldsymbol{y' = ay + b}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ où C est une constante réelle.

2 Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et f une fonction, les solutions de l'équation différentielle $\boldsymbol{y' = ay + f}$ sont obtenues en ajoutant une solution particulière à la solution générale de l'équation homogène associée.

Exemple 9.

Soit l'équation différentielle (E) $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$

▶1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation différentielle homogène associée à (E).

▶2. Déterminer une fonction C, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que, pour tout x de $\mathbb{R}$, la fonction $h(x) = C(x)e^{-x}$ soit solution particulière de l'équation (E).

▶3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

▶4. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1 + \ln(2)$.