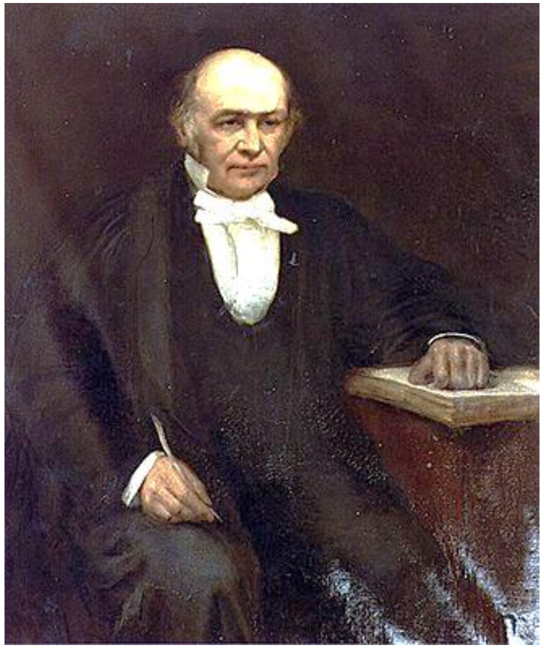
Sir William Rowan Hamilton (1805 - 1865)



Mathématicien, physicien et astronome irlandais. Il contribua au développement de l'optique, de la dynamique et de l'algèbre. Ses recherches se révélèrent importantes pour le développement de la mécanique quantique. Il découvre, en 1843, les quaternions alors qu'il cherche une façon d'étendre les nombres complexes à des dimensions supérieures à 2.

I. Le produit scalaire dans l'espace

Définition :

Le **produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace est le nombre réel noté $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v}}$

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2\right)$$

En particulier :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - CB^2\right)$$

Remarque :

On étend aux vecteurs de l'espace la définition du produit scalaire donnée dans le plan.

Propriétés :

❶ $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)}$

❷ Si H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$$

$$= \begin{cases} AB \times AH \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens} \\ -AB \times AH \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$$

Propriétés :

❶ Dans un repère orthonormé de l'espace :

$$\text{Si } \vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad \boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'}$$

❷ $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ $\qquad (k\vec{u}).\vec{v} = k \times \vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.(k\vec{v})$

$$\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$$

Définition :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **orthogonaux** lorsque $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = 0}$.

Exemple 1 :

Démontrer le Théorème d'Apollonius ou théorème de la médiane :

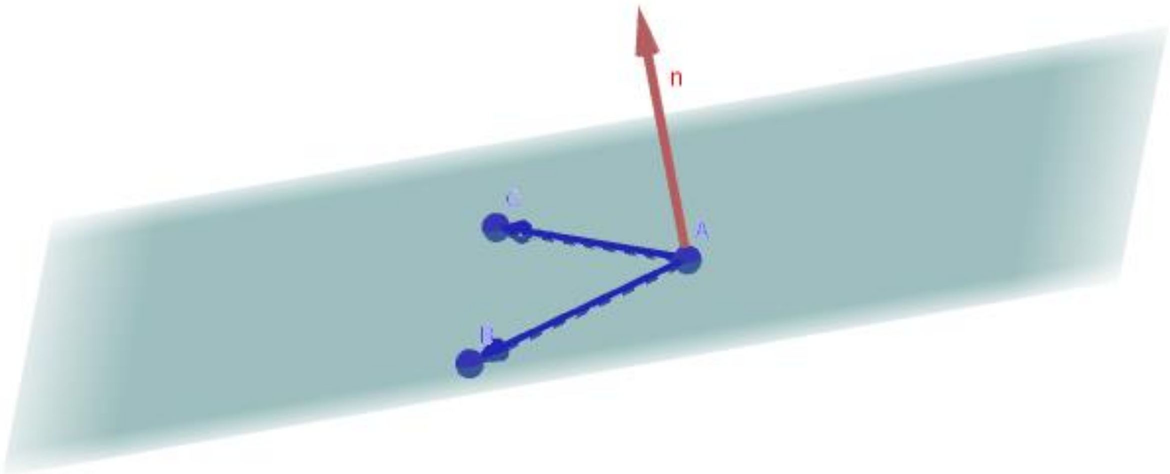
Soit ABM un triangle, si I est le milieu de $[AB]$ alors

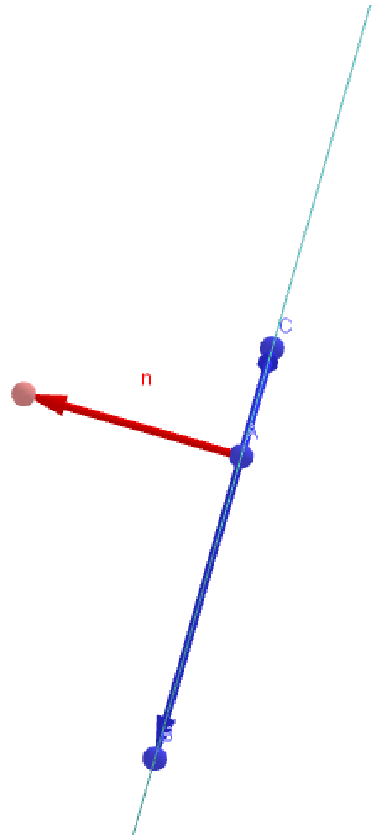
$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

II. Equations cartésiennes d'un plan

Propriété :
Deux droites d et d' de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonales si, et seulement si, $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Définition :
Un vecteur non nul $\vec{n}$ est **normal à un plan** $\mathcal{P}$ lorsque toute droite de vecteur directeur $\vec{n}$ est orthogonale au plan $\mathcal{P}$.


n
C
A
B


C
n

Propriété :
Soit A un point de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur non nul
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ est le plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Définition :
Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans de vecteur normaux respectifs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$
$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont **perpendiculaires** lorsque $\vec{n}.\overrightarrow{n'} = 0$.

Propriété : L'espace est muni d'un repère orthonormé

❶ Un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal non nul $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet une **équation cartésienne** de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$.

❷ Réciproquement a, b, c trois nombres réels non tous nuls et d un réel, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que

$ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Exemple 2.

1 Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par $A(2; 1; -3)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

2 Déterminer l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}'$ parallèle à $\mathcal{P}$ passant par $B(0; -1; 2)$.

1 L'équation est de la forme :

$$4x - 5y + 6z + d = 0$$

Or $A(2;1;-3) \in \mathcal{P}$ donc

$$4 \times 2 - 5 \times 1 + 6 \times (-3) + d = 0$$
$$\Leftrightarrow d = 15$$

$$\boldsymbol{4x - 5y + 6z + 15 = 0}$$

2 Déterminer l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}'$ parallèle à $\mathcal{P}$ passant par $B(0;-1;2)$.

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ étant parallèles, ont le même vecteur normal

L'équation est de la forme :

$$4x-5y+6z+d=0$$

Or $B(0;-1;2)\in\mathcal{P}'$ donc

$$5+12+d=0$$

$$\boldsymbol{4x-5y+6z-17=0}$$

Rappel :
Une droite est orthogonale à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toutes les droites du plan.

Propriété :
Une droite est orthogonale à toute droite d'un plan si, et seulement si, elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Exemple 3.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier chaque réponse.

Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - y + 3z + 1 = 0$ et la droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = -5 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

On donne les points $A(1; 1; 0)$, $B(3; 0; -1)$ et $C(7; 1; -2)$.

Proposition 1 :

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est

$$\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = -2 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Proposition 2 :

Les droites $\mathcal{D}$ et (AB) sont orthogonales.

Proposition 3 :

Les droites $\mathcal{D}$ et (AB) sont coplanaires.

Proposition 4 :

La droite $\mathcal{D}$ coupe le plan $\mathcal{P}$ au point E de coordonnées $(8;-3;-4)$.

Proposition 5 :

Les plans $\mathcal{P}$ et (ABC) sont parallèles.