Quelle est l'espérance de la somme de VA ?

Activité n°1 : Transformation de VA

Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart-type σ.

On considère les variables aléatoire $Y = 4X - 1$ et $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$
Déterminer l'espérance et l'écart-type de Y et de Z.

Rappel

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$,

1. $E(aX + b) = aE(X) + b$

2. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

3. $V(aX + b) = a^2V(X)$

4. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes alors
$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

Activité n°2 : Somme et moyenne de VA

Pour tout entier naturel n non nul, un échantillon de taille n d'une loi de probabilité est une liste $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de ***n* variables aléatoires indépendantes** suivant cette loi d'espérance μ et d'écart-type σ.

▶ 1. On note la somme $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
Déterminer $E(S_n)$, $V(S_n)$ puis $\sigma(S_n)$.

▶ 2. On note la moyenne $M_n = \frac{S_n}{n}$.
Déterminer $E(M_n)$, $V(M_n)$ puis $\sigma(M_n)$.

Activité n°3 : Application à la loi binomiale

Pour tout entier naturel n non nul, soit $(X_1, X_2, \dots X_n)$ un échantillon de taille n de la loi de Bernoulli de paramètre p.

▶ 1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $E(X_n)$, $V(X_n)$ puis $\sigma(X_n)$.

▶ 2. On note la somme $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
a) Déterminer la loi de S_n.
b) Déterminer $E(S_n)$, $V(S_n)$ puis $\sigma(S_n)$.