Révision Suites numériques
Terminale ➡ Préparation du Contrôle
Spécialité Mathématiques

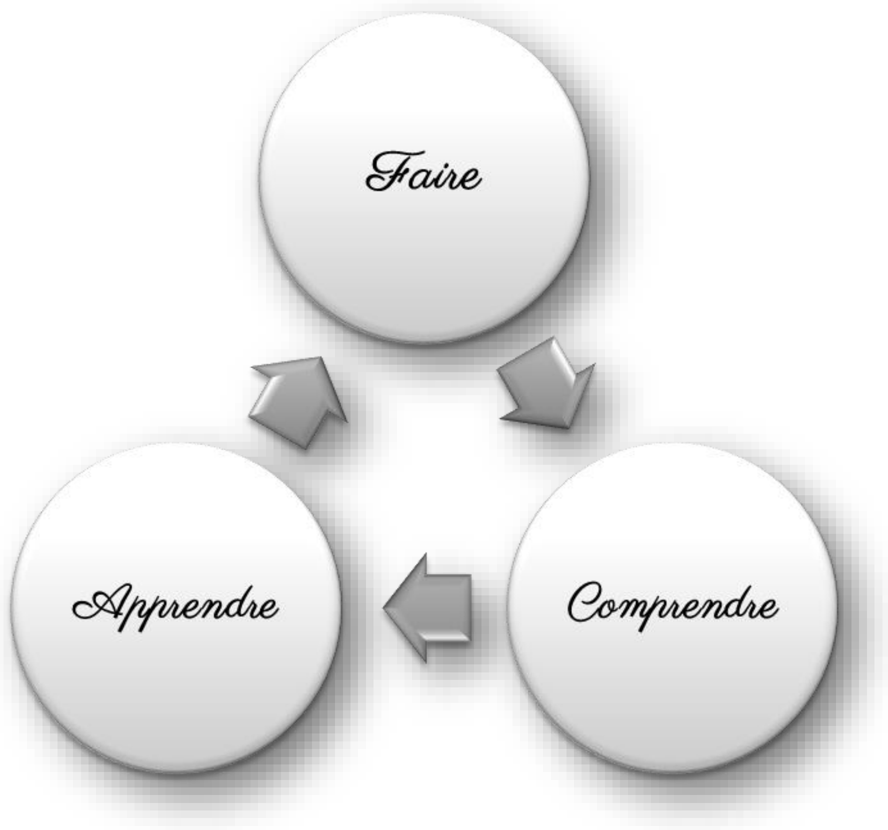

Table des matières

Terminale ➡ Préparation du Contrôle
Spécialité Mathématiques

Enoncé du sujet

Exercice 1. Python, Suite géométrique

On étudie la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_{n+1} = 2 - \frac{1}{2}u_n \text{ et } u_0 = 0.$$

▶ 1. A quoi sert l'algorithme ci-dessous ?

```
u=0
n=0
for i in range(5):
    u=2-0.5*u
    n=n+1
    print(u)
```

▶ 2. On définit la suite (v_n), pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n - \frac{4}{3}$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique, on précisera ses éléments caractéristiques.

b) En déduire, pour tout n, l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n.

c) Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

Exercice 2. Limite par opération, FI

Déterminer, en justifiant, la limite de la suite (u_n) dans les cas ci-dessous :

▶ 1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3n^3 - 2n + 1$

▶ 2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 5n + \dfrac{\sqrt{n+1}}{4} - 1$

▶ 3. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3n + 4\sin(n)$

▶ 4. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{3n^2 - 1}{5n + 1}$

Exercice 3. Limite par définition, FI

▶ 1. La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 5 - \dfrac{4}{n}$.

Démontrer, **à l'aide de la définition**, la limite de la suite (u_n).

▶ 2. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? On justifiera sa réponse.

Affirmation :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites, si (u_n) converge et (v_n) diverge alors la suite (w_n) définie, pour tout n, par $w_n = u_n \times v_n$ diverge.

▶ 3. La suite (v_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n - \sqrt{(n+1)(n+2)}$. Etudier la convergence de cette suite. ***Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.***

Exercice 4. Python, Suite géométrique

<pre>def u(n):
    u=3
    for i in range(n):
        u=2/(1+u)
    return u
for n in range(10):
    print(n,u(n))</pre>
	<pre>0 3
	1 0.5
	2 1.3333333333333333
	3 0.8571428571428572
	4 1.0769230769230769
	5 0.9629629629629631
	6 1.0188679245283017</pre>

▶ 1. En utilisant la fonction Python ci-dessus, comment la suite (u_n) est-elle définie ?

▶ 2. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \neq -2$. On considère la suite (v_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

Démontrer que la suite (v_n) est géométrique, on précisera sa raison et son 1er terme.

▶ 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer v_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite (v_n).

▶ 4 a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2} \Leftrightarrow u_n = \dfrac{2v_n + 1}{1 - v_n}$.

b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 5. Python, Suite arithmétique

On définit la suite (u_n), pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 2} \text{ et } u_0 = 1$$

Posons $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n^2$.

▶ 1 a) A l'aide du programme ci-dessous, que pouvez-vous conjecturer ?

<pre>from math import sqrt
def u(n):
    u=1
    for i in range(n):
        u=sqrt(u**2+2)
    return u
def v(n):
    return u(n)**2
 	
for n in range(10):
     print(n,round(u(n),1),round(v(n),1))</pre>
	<pre>0 1 1
	1 1.7 3.0
	2 2.2 5.0
	3 2.6 7.0
	4 3.0 9.0
	5 3.3 11.0
	6 3.6 13.0
	7 3.9 15.0
	8 4.1 17.0
	9 4.4 19.0</pre>

b) Démontrez votre conjecture.

c) En déduire l'expression de v_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

▶ 2 a) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire la limite de la suite (u_n).

Terminale ➡ Préparation du Contrôle
Spécialité Mathématiques
Correction du sujet

Correction de l'exercice 1.

On étudie la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_{n+1} = 2 - \frac{1}{2}u_n \text{ et } u_0 = 0.$$

▶ 1. A quoi sert l'algorithme ci-dessous ?

```
u=0
n=0
for i in range(5):
    u=2-0.5*u
    n=n+1
    print(u)
```

▶ 2. On définit la suite (v_n), pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n - \frac{4}{3}$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique, on précisera ses éléments caractéristiques.

b) En déduire, pour tout n, l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n.

c) Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

Exercice 1.	**1.**	Cet algorithme permet d'afficher les 5 premières valeurs de la suite (u_n).
	2a.	$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{4}{3}$ $v_{n+1} = 2 - \frac{1}{2}u_n - \frac{4}{3}$ $v_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + \frac{2}{3}$ $v_{n+1} = -\frac{1}{2}\left(u_n - \frac{4}{3}\right)$ $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n$ (v_n) est donc géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et de 1^{er} terme $v_0 = -\frac{4}{3}$
	2b.	$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \boldsymbol{v_0 \times q^n} = -\frac{4}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ $v_n = u_n - \frac{4}{3} \Leftrightarrow u_n = v_n + \frac{4}{3}$ et donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -\frac{4}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{4}{3}$
	2c.	$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $\left\lvert -\frac{1}{2} \right\rvert < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{4}{3}$

Correction de l'exercice 2.

Déterminer, en justifiant, la limite de la suite (u_n) dans les cas ci-dessous :

▶ 1. $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = 3n^3 - 2n + 1$

▶ 2. $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = 5n + \dfrac{\sqrt{n+1}}{4} - 1$

▶ 3. $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = 3n + 4\sin(n)$

▶ 4. $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = \dfrac{3n-1}{5n^2+1}$

<table>
<tr>
<td rowspan="3">Exercice 2.</td>
<td>1.</td>
<td>
$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} 3n^3 = +\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty} -2n+1 = -\infty\end{array}\right\}\text{alors par addition, la forme est indéterminée}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ u_n = 3n^3 - 2n + 1$

$u_n = n^3\left(3 - \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{1}{n^3}\right)$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty} 3 - \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{1}{n^3} = 3\end{array}\right\}\text{alors par produit } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$
</td>
</tr>
<tr>
<td>2.</td>
<td>
$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} 5n = +\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}}{4} - 1 = +\infty\end{array}\right\}\text{alors par addition, } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$
</td>
</tr>
<tr>
<td>3.</td>
<td>
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$-1 \leq \sin(n) \leq 1$$
$$\Leftrightarrow -4 \leq 4\sin(n) \leq 4$$
$$\Leftrightarrow 3n - 4 \leq 3n + 4\sin(n) \leq 3n + 4$$
$$\text{donc}\quad 3n - 4 \leq u_n$$
$$\text{or } \lim\limits_{n\to+\infty} 3n - 4 = +\infty$$
$$\text{donc, par comparaison, } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$
</td>
</tr>
</table>

	4.	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} 3n-1=+\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 5n^2+1=+\infty\end{array}\right\}$ alors par quotient, la forme est indéterminée $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \ u_n=\dfrac{3n-1}{5n^2+1}$ $u_n=\dfrac{n\left(3-\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(5+\frac{1}{n^2}\right)}$ $u_n=\dfrac{3-\frac{1}{n}}{n\left(5+\frac{1}{n^2}\right)}$ $u_n=\dfrac{3-\frac{1}{n}}{5n+\frac{1}{n}}$ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} 3-\dfrac{1}{n}=3 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 5n+\dfrac{1}{n}=+\infty\end{array}\right\}$ alors par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$

Correction de l'exercice 3.

▶1. La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=5-\dfrac{4}{n}$.
Démontrer, **à l'aide de la définition**, la limite de la suite (u_n).

▶2. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? On justifiera sa réponse.
Affirmation :
Soit (u_n) et (v_n) deux suites, si (u_n) converge et (v_n) diverge alors la suite (w_n) définie, pour tout n, par $w_n=u_n\times v_n$ diverge.

▶3. La suite (v_n) est définie, pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $u_n=n-\sqrt{(n+1)(n+2)}$. Etudier la convergence de cette suite. ***Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.***

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Exercice 3.</td>
<td>1.</td>
<td>Soit $\varepsilon > 0$, $\quad 5-\varepsilon < u_n = 5-\frac{4}{n} < 5+\varepsilon$
$$\Leftrightarrow -\varepsilon < -\frac{4}{n} < \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow \varepsilon > \frac{4}{n} > 0 > -\varepsilon$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < \frac{n}{4} \text{ car } x \longmapsto \frac{1}{x} \text{ est décroissante sur }]0;+\infty[$$
$$\Leftrightarrow \ n > \frac{4}{\varepsilon}$$
posons $N = \text{Ent}\left(\frac{4}{\varepsilon}\right) + 1$,
$\forall\, n \in \mathbb{N}$ avec $n > N > \frac{4}{\varepsilon}$
donc $\quad 5-\varepsilon < u_n < 5+\varepsilon$
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5$</td>
</tr>
<tr>
<td>2.</td>
<td>L'affirmation est fausse.
Prenons pour suites (u_n) et (v_n) les suites définies par,
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{n+1} \quad \text{donc } \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, v_n = (-1)^n \quad \text{donc } (v_n) \text{ diverge}$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = u_n \times v_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{n+1} \leq w_n \leq \frac{1}{n+1}$$
$$\text{or } \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$
$$\text{donc } \lim_{n\to+\infty} w_n = 0$$</td>
</tr>
</table>

	3.	$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{(n+1)(n+2)}=+\infty\end{array}\right\}$ alors FI, par soustraction, $\forall n\in\mathbb{N},\ \ u_n=n-\sqrt{(n+1)(n+2)}$ $u_n=\dfrac{\left(n-\sqrt{(n+1)(n+2)}\right)\left(n+\sqrt{(n+1)(n+2)}\right)}{n+\sqrt{(n+1)(n+2)}}$ $u_n=\dfrac{n^2-(n+1)(n+2)}{n+\sqrt{(n+1)(n+2)}}$ $u_n=\dfrac{n^2-(n^2+2n+n+2)}{n+\sqrt{(n+1)(n+2)}}=\dfrac{n^2-n^2-3n-2}{n+\sqrt{(n+1)(n+2)}}$ $u_n=\dfrac{-3n-2}{n+\sqrt{(n+1)(n+2)}}=\dfrac{-3n-2}{n+\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}}$ $u_n=\dfrac{n\left(-3-\frac{2}{n}\right)}{n\left(1+\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}\right)}$ $u_n=\dfrac{-3-\frac{2}{n}}{1+\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}}$ $\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} -3-\dfrac{2}{n}=-3 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1+\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}=2\end{array}\right\}$ alors par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\dfrac{3}{2}$

Correction de l'exercice 4.

`def u(n):`
`    u=3`
`    for i in range(n):`
`        u=2/(1+u)`
`    return u`
`for n in range(10):`
`    print(n,u(n))`
	0 3
	1 0.5
	2 1.3333333333333333
	3 0.8571428571428572
	4 1.0769230769230769
	5 0.9629629629629631
	6 1.0188679245283017

▶1. En utilisant la fonction Python ci-dessus, comment la suite (u_n) est-elle définie ?

▶2. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \neq -2$. On considère la suite (v_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

Démontrer que la suite (v_n) est géométrique, on précisera sa raison et son 1er terme.

▶3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer v_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite (v_n).

▶4 a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2} \Leftrightarrow u_n = \dfrac{2v_n + 1}{1 - v_n}$.

b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Exercice 4.</td>
<td>1.</td>
<td>$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{1 + u_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>2.</td>
<td>Pour tout $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2}$
$$v_{n+1} = \frac{\dfrac{2}{1 + u_n} - 1}{\dfrac{2}{1 + u_n} + 2}$$
$$v_{n+1} = \frac{\dfrac{2 - 1 - u_n}{1 + u_n}}{\dfrac{2 + 2 + 2u_n}{1 + u_n}}$$
$$v_{n+1} = \frac{1 - u_n}{\cancel{1 + u_n}} \times \frac{\cancel{1 + u_n}}{4 + 2u_n}$$
$$v_{n+1} = \frac{1 - u_n}{4 + 2u_n}$$
$$v_{n+1} = \frac{-(u_n - 1)}{2(u_n + 2)}$$
$$v_{n+1} = -\frac{1}{2} \times \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$
$$v_{n+1} = -\frac{1}{2} v_n$$
La suite (v_n) est donc géométrique de raison $-0{,}5$ et $v_0 = \frac{3-1}{3+2} = \frac{2}{5}$.</td>
</tr>
</table>

	3.	On en déduit alors que pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2}{5\times(-2)^n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ car la raison est $-0{,}5 \in]-1;1[$
	4a.	$\forall n \in \mathbb{N}$, $$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$ $$\Leftrightarrow v_n(u_n + 2) = u_n - 1$$ $$\Leftrightarrow v_n u_n + 2v_n = u_n - 1$$ $$\Leftrightarrow u_n v_n - u_n = -2v_n - 1$$ $$\Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = -2v_n - 1$$ $$\Leftrightarrow u_n = \frac{-2v_n - 1}{v_n - 1}$$ $$\Leftrightarrow u_n = \frac{2v_n + 1}{1 - v_n}$$
	4b.	On en déduit alors que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2v_n + 1}{1 - v_n}$ $u_n = \dfrac{2 \times \dfrac{2}{5\times(-2)^n} + 1}{1 - \dfrac{2}{5\times(-2)^n}}$ $u_n = \dfrac{\dfrac{4 + 5\times(-2)^n}{5\times(-2)^n}}{\dfrac{5\times(-2)^n - 2}{5\times(-2)^n}}$ $u_n = \dfrac{4 + 5\times(-2)^n}{\cancel{5\times(-2)^n}} \times \dfrac{\cancel{5\times(-2)^n}}{5\times(-2)^n - 2}$ $u_n = \dfrac{4 + 5\times(-2)^n}{5\times(-2)^n - 2}$
	4c.	Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2v_n + 1}{1 - v_n} = 1$

Correction de l'exercice 5.

On définit la suite (u_n), pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 2} \text{ et } u_0 = 1$$

Posons $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n^2$.

▶1 a) A l'aide du programme ci-dessous, que pouvez-vous conjecturer ?

<pre>from math import sqrt
def u(n):
    u=1
    for i in range(n):
        u=sqrt(u**2+2)
    return u
def v(n):
    return u(n)**2
 	
for n in range(10):
     print(n,round(u(n),1),round(v(n),1))</pre>
	<pre>0 1 1
	1 1.7 3.0
	2 2.2 5.0
	3 2.6 7.0
	4 3.0 9.0
	5 3.3 11.0
	6 3.6 13.0
	7 3.9 15.0
	8 4.1 17.0
	9 4.4 19.0</pre>

b) Démontrez votre conjecture.
c) En déduire l'expression de v_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

▶2 a) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
b) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 5.	**1a.**	L'algorithme affiche les premières valeurs des suites (u_n) et (v_n). On peut conjecturer que (v_n) est arithmétique.
	1b.	$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n^2$. $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = u_{n+1}^2 - u_n^2$ $= \left(\sqrt{u_n^2+2}\right)^2 - u_n^2$ $= u_n^2 + 2 - u_n^2$ $v_{n+1} - v_n = 2$ On en déduit que la suite (v_n) est arithmétique de raison 2 et $v_0 = u_0^2 = 1^2 = 1$
	1c.	On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \boldsymbol{v_0 + n \times r} = 1 + 2n$.
	2a	On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 = v_n = 1 + 2n$ donc $u_n = \sqrt{1+2n}$.
	2b	D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1+2n} = +\infty$