Révision Suites-Fonctions
Terminale ➡ Préparation du Contrôle
Spécialité Mathématiques

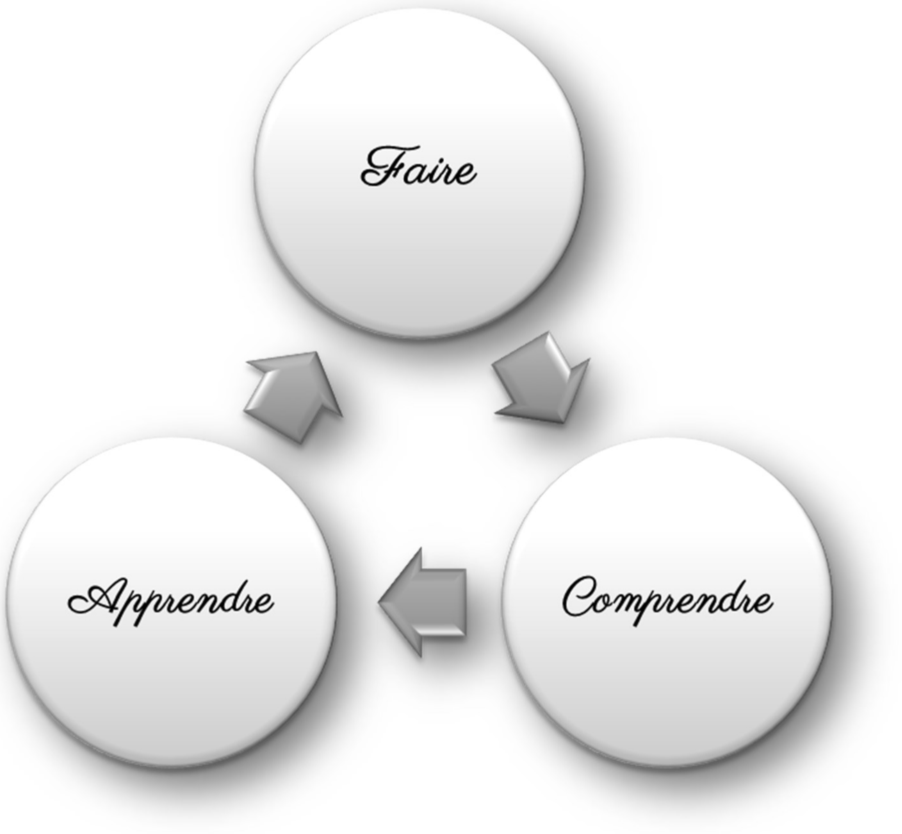


Table des matières

Terminale ⇨ Préparation du Contrôle

Spécialité Mathématiques

Enoncé du sujet

Exercice 1.

En 2010, une entreprise comptait 4000 employés. D'une année sur l'autre, 10% de l'effectif est parti à la retraite, et, pour compenser cette perte, l'entreprise a embauché 180 jeunes chaque année. Pour tout entier n, on appelle u_n le nombre d'employés l'année $2010 + n$.

```
def rang(m):
    n=0
    u=4000
    while u>=m:
        u=0.9*u+180
        n=n+1
    return n
```

▶1. Donner u_0, puis justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 180.$$

▶2. Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 1800 + 2200 \times 0{,}9^n.$$

▶3. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

▶4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

▶5. On donne la fonction ci-contre en Python.

a. Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de `rang(2000)` ?

b. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2.

On étudie la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2n - 1$ et $u_0 = 1$.

▶1. Démontrer que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 1.

▶2. Démontrer, par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 3 : u_n \geq n$.

▶3. En déduire la limite de la suite (u_n).

▶4. Conjecturer puis démontrer une expression de u_n en fonction de n.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	1	0	1	4	9	16	25	36	49

Exercice 3.

▶1. On étudie la fonction $f(x) = (3 - 2x)^4$ définie sur $\mathbb{R}$.

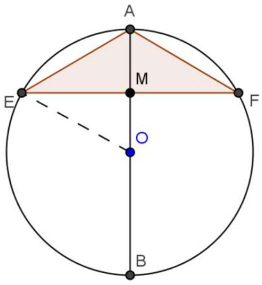
Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f.

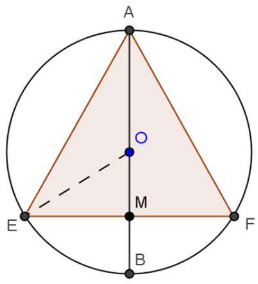
▶2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^3}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction h.

Exercice 4.

On considère le cercle de centre O et de diamètre $[AB]$ où $AB = 12$ cm. Le point M est un point mobile sur le diamètre $[AB]$ et on pose $AM = x$ où $x \in [0; 12]$. La perpendiculaire au segment $[AB]$ passant par M coupe le cercle en deux point E et F. Pour tout $x \in [0; 12]$, notons $f(x)$ l'aire du triangle AEF.





▶1. Démontrer que $f(x) = x\sqrt{12x - x^2}$ cm², pour tout $x \in [0; 12]$.

▶2. Existe-t-il une position de M qui donne une aire maximale ? Si oui, combien vaut cette aire maximale et quelle est la nature du triangle dans ce cas là ?

Terminale ➡ Préparation du Contrôle

Spécialité Mathématiques

Correction du sujet

Correction de l'exercice 1.

En 2010, une entreprise comptait 4000 employés. D'une année sur l'autre, 10% de l'effectif est parti à la retraite, et, pour compenser cette perte, l'entreprise a embauché 180 jeunes chaque année. Pour tout entier n, on appelle u_n le nombre d'employés l'année $2010 + n$.

▶1. Donner u_0, puis justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 180.$$

▶2. Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 1800 + 2200 \times 0{,}9^n.$$

▶3. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

▶4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

▶5. On donne la fonction ci-contre en Python.

```
def rang(m):
    n=0
    u=4000
    while u>=m:
        u=0.9*u+180
        n=n+1
    return n
```

a. Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de `rang(2000)` ?

b. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Exercice 1.	**1.**	$u_0 = 4000$ u_n le nombre d'employés l'année $2010 + n$, l'année d'après 10% de l'effectif est parti à la retraite, il reste donc 90% des employés soit $0{,}9u_n$ et pour compenser, l'entreprise embauche 180 personnes. Le nombre d'employés l'année $2010 + (n+1)$ est donc $u_{n+1} = 0,9u_n + 180$
	2.	Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$: $u_n = 1800 + 2200 \times 0{,}9^n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. **Initialisation** pour $n = 0$: $u_0 = 4000$ or $1800 + 2200 \times 0{,}9^0 = 1800 + 2200 = 4000$ donc $u_0 = 1800 + 2200 \times 0{,}9^0$ **donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.** **Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose que $\mathcal{P}(n)$** : $u_n = 1800 + 2200 \times 0{,}9^n$ est vraie $u_{n+1} = 0,9u_n + 180$ Je substitue u_n par $1800 + 2200 \times 0{,}9^n$ $u_{n+1} = 0,9(1800 + 2200 \times 0{,}9^n) + 180$ Je distribue 0,9 $u_{n+1} = 0,9 \times 1800 + 0,9 \times 2200 \times 0{,}9^n + 180$ $u_{n+1} = 1620 + 2200 \times 0{,}9^{n+1} + 180$ $u_{n+1} = 1800 + 2200 \times 0{,}9^{n+1}$ **donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie** Par conséquent, d'après le principe de récurrence : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1800 + 2200 \times 0{,}9^n$
	3.	Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 1800 + 2200 \times 0{,}9^{n+1} - (1800 + 2200 \times 0{,}9^n)$ $= 1800 + 2200 \times 0{,}9^{n+1} - 1800 - 2200 \times 0{,}9^n$

3.

$$
\begin{aligned}
&= 2200 \times 0{,}9^{n+1} - 2200 \times 0{,}9^{n}\\
&= 2200 \times 0{,}9^{n} \times (0{,}9 - 1)\\
&= 2200 \times 0{,}9^{n} \times (-0{,}1)
\end{aligned}
$$

Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} - u_n \leq 0$ et donc, la suite (u_n) est décroissante.

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}9^n = 0$ car $|0{,}9| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1800$

5a.

```
def rang(m):
    n=0
    u=4000
    while u>=m:
        u=0.9*u+180
        n=n+1
        print(u,"|",n)
    return n

rang(2000)
```

```
3780.0 | 1
3582.0 | 2
3403.8 | 3
3243.42 | 4
3099.078 | 5
2969.1702 | 6
2852.25318 | 7
2747.0278620000004 | 8
2652.3250758000004 | 9
2567.0925682200004 | 10
2490.3833113980004 | 11
2421.3449802582004 | 12
2359.2104822323804 | 13
2303.2894340091425 | 14
2252.960490608228 | 15
2207.6644415474057 | 16
2166.8979973926653 | 17
2130.208197653399 | 18
2097.187377888059 | 19
2067.468640099253 | 20
2040.721776089328 | 21
2016.649598480395 | 22
1994.9846386323557 | 23
```

5b. En 2033, le nombre d'employés dans l'entreprise sera inférieur à 2000 personnes.

Correction de l'exercice 2.

On étudie la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = u_n + 2n - 1$ et $u_0 = 1$.

▶ 1. Démontrer que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 1.
▶ 2. Démontrer, par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$: $u_n \geq n$.
▶ 3. En déduire la limite de la suite (u_n).
▶ 4. Conjecturer puis démontrer une expression de u_n en fonction de n.

$\boldsymbol{n}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\boldsymbol{u_n}$	1	0	1	4	9	16	25	36	49

Exercice 2.	**1.**	Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = u_n + 2n - 1 - u_n = 2n - 1$ or $n \geq 1 \Leftrightarrow 2n \geq 2 \Leftrightarrow 2n - 1 \geq 1$ donc $u_{n+1} - u_n = 2n - 1 \geq 1 > 0$ La suite (u_n) est donc croissante, à partir du rang 1.
	2.	Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$: $u_n \geq n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. **Initialisation** pour $n = 3$: $u_0 = 1$ $u_1 = u_0 + 2 \times 0 - 1 = 1 - 1 = 0$ $u_2 = u_1 + 2 - 1 = 0 + 1 = 1$ $u_3 = u_2 + 2 \times 2 - 1 = 1 + 2 \times 2 - 1 = 4$ or $4 \geq 3$ donc $u_3 = 4 \geq 3$ **donc $\mathcal{P}(3)$ est vraie.** **Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, on suppose que $\mathcal{P}(n)$** : $u_n \geq n$ est vraie $u_n \geq n$ J'ajoute $2n - 1$ de chaque côté $\Leftrightarrow u_n + 2n - 1 \geq n + 2n - 1$ $\Leftrightarrow u_{n+1} \geq 3n - 1$ or $\underbrace{(3n-1)-(n+1)}_{\text{Je cherche le signe de ce que j'ai obtenu moins ce que je veux avoir}} = 3n - 1 - n - 1 = 2n - 2$ et puisque $n \geq 3$ $2n \geq 6 \Leftrightarrow 2n - 3 \geq 3 > 0$ d'où $3n - 1 > n + 1$ et donc $u_{n+1} \geq 3n - 1 > n + 1$ **donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie** Par conséquent, par le principe de récurrence : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \quad u_n \geq n$
	3.	$\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ Donc, par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

	4.	Je conjecture que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n-1)^2$ Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$: $u_n = (n-1)^2$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. **Initialisation** pour $n = 0$: $(0-1)^2 = 1 = u_0$ **donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.** **Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n)$** : $u_n = (n-1)^2$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$ fixé $u_{n+1} = u_n + 2n - 1$ $u_{n+1} = (n-1)^2 + 2n - 1$ $u_{n+1} = n^2 - 2n + 1 + 2n - 1$ $u_{n+1} = n^2$ **donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie** Par conséquent : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (n-1)^2$

Correction de l'exercice 3.

▶1. On étudie la fonction $f(x) = (3-2x)^4$ définie sur $\mathbb{R}$.
Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f.

▶2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^3}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.
Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction h.

Exercice 3.

1.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (3-2x)^4 = \boldsymbol{u^4}$

$$\boldsymbol{u = 3 - 2x \quad u' = -2}$$

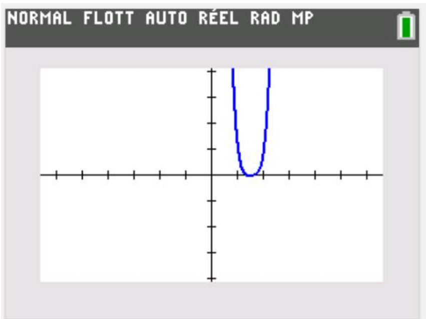
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \boldsymbol{4u^3 \times u'}$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 4 \times (3-2x)^3 \times (-2) = -8(3-2x)^3$

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow -8(3-2x)^3 > 0 \\ &\Leftrightarrow (3-2x)^3 < 0 \\ &\Leftrightarrow 3 - 2x < 0 \\ &\Leftrightarrow -2x < -3 \\ &\Leftrightarrow x > \frac{3}{2} \end{aligned}$$

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(3 - 2 \times \frac{3}{2}\right)^4 = 0$$



2.

h est dérivable sur $\mathbb{R}$

Méthode n°1 :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad h(x) = \frac{1}{(x^2+1)^3} = \frac{u}{v}$$

$$u = 1 \qquad u' = 0$$

$$v = (x^2+1)^3 \qquad v' = 3 \times (x^2+1)^2 \times 2x = 6x(x^2+1)^2$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad h'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{0 - 1 \times 6x(x^2+1)^2}{(x^2+1)^6} = \frac{-6x}{(x^2+1)^4}$$

Méthode n°2 :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad h(x) = \frac{1}{(x^2+1)^3} = (x^2+1)^{-3} = u^{-3}$$

$$u = x^2 + 1 \qquad u' = 2x$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad h'(x) = -3u^{-4} \times u' = -3(x^2+1)^{-4} \times 2x$$

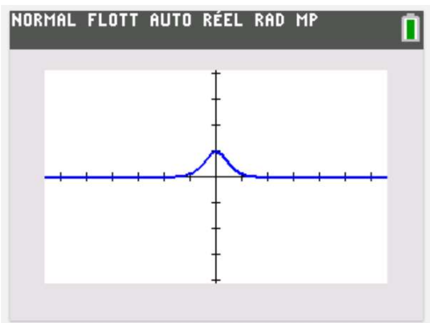
$$h'(x) = \frac{-6x}{(x^2+1)^4}$$

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{-6x}{(x^2+1)^4} > 0$$

$$\Leftrightarrow -6x > 0 \ \text{ car } (x^2+1)^4 > 0$$

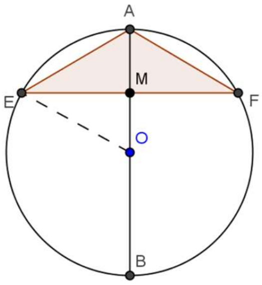
$$\Leftrightarrow x < 0$$

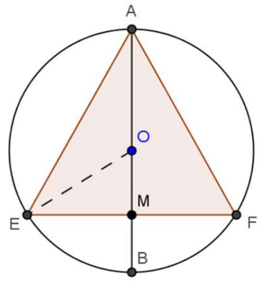
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	$0 \nearrow$	1	$\searrow 0$



Correction de l'exercice 4.

On considère le cercle de centre O et de diamètre $[AB]$ où $AB = 12$ cm. Le point M est un point mobile sur le diamètre $[AB]$ et on pose $AM = x$ où $x \in [0; 12]$. La perpendiculaire au segment $[AB]$ passant par M coupe le cercle en deux point E et F. Pour tout $x \in [0; 12]$, notons $f(x)$ l'aire du triangle AEF.



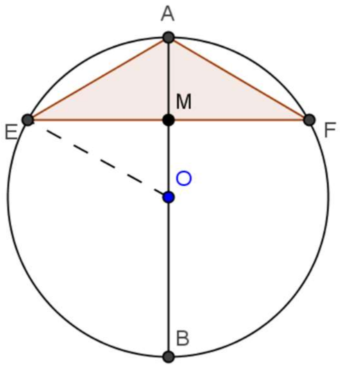


▶1. Démontrer que $f(x) = x\sqrt{12x - x^2}$ cm², pour tout $x \in [0; 12]$.

▶2. Existe-t-il une position de M qui donne une aire maximale ? Si oui, combien vaut cette aire maximale et quelle est la nature du triangle dans ce cas là ?

<table>
<tr>
<td>Exercice 4.</td>
<td>1.</td>
<td>
Le triangle AEF a pour base EF et pour hauteur $AM = x$. Son aire est donc égale à

$$f(x) = \frac{EF \times AM}{2} = \frac{2 \times EM \times x}{2}$$

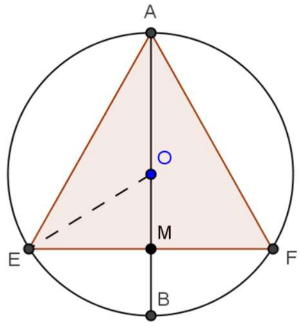


Lorsque $0 \leq x \leq 6$,
D'après Pythagore,

$$\begin{aligned} EM^2 = OE^2 - OM^2 &= 6^2 - (6 - x)^2 \\ &= 36 - (36 - 12x + x^2) \\ &= 36 - 36 + 12x - x^2 = 12x - x^2 \end{aligned}$$

Lorsque $6 \leq x \leq 12$,
D'après Pythagore,

$$\begin{aligned} EM^2 = OE^2 - OM^2 &= 6^2 - (x - 6)^2 \\ &= 36 - (x^2 - 12x + 36) \\ &= 36 - x^2 + 12x - 36 = 12x - x^2 \end{aligned}$$



Par conséquent, pour tout $x \in [0; 12]$

$$f(x) = \frac{2 \times \sqrt{12x - x^2} \times x}{2} = x\sqrt{12x - x^2}$$
</td>
</tr>
</table>

2.

Pour tout $x \in [0;12]$

$$u = x \qquad u' = 1$$

$$v = \sqrt{12x - x^2} \qquad v' = \frac{12 - 2x}{2\sqrt{12x - x^2}} = \frac{6 - x}{\sqrt{12x - x^2}}$$

$$f'(x) = 1 \times \sqrt{12x - x^2} + x \times \frac{6 - x}{\sqrt{12x - x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{12x - x^2}{\sqrt{12x - x^2}} + \frac{6x - x^2}{\sqrt{12x - x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{18x - 2x^2}{\sqrt{12x - x^2}} = \frac{2x(9 - x)}{\sqrt{12x - x^2}}$$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x(9 - x) > 0$ car $\sqrt{12x - x^2} > 0$

La parabole $2x(9 - x)$ étant tournée vers le bas :

x	$-\infty$		0		9		$+\infty$
$2x(9-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit le tableau de variations de f :

x	0		9		12
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$27\sqrt{3}$	$\searrow$	0

L'aire sera alors maximale pour $x = AM = 9$ cm.

L'aire maximale sera alors égale à :

$$f(9) = 9\sqrt{27} = 9\sqrt{9 \times 3} = 9 \times 3\sqrt{3} = 27\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

Dans ce cas là $EM = \sqrt{12 \times 9 - 9^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$
et donc $EF = 2 \times EM = 6\sqrt{3}$
D'après Pythagore, $AE^2 = 9^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2 = 81 + 9 \times 3 = 108$
Donc $AE = AF = \sqrt{108} = 6\sqrt{3} = EF$

Le triangle AEF est donc équilatéral.