Terminale Spécialité Mathématiques
Tâche n° $\boxed{1}$ $\boxed{4}$
Dénombrement

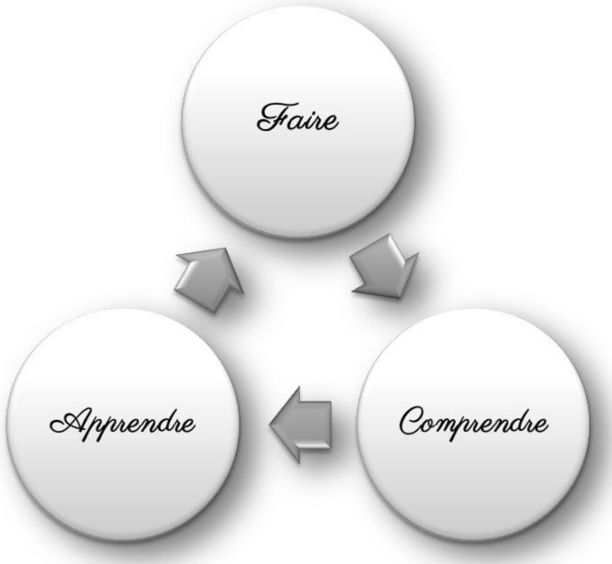

Table des matières

Enoncé des exercices 2
Exercice 1. 2
Exercice 2. 2
Exercice 3. 3
Exercice 4. 3
Correction des exercices 4
Correction de l'exercice 1 4
Correction de l'exercice 2 6
Correction de l'exercice 3 6
Correction de l'exercice 4 7

Tâche n° 1 4
Dénombrement
Enoncé des exercices

Exercice 1.

▶1. Le code PIN d'une carte bancaire est un code confidentiel à 4 chiffres, il doit être gardé secret. Combien de codes PIN peut-on former ?

▶2. Un restaurant propose 4 entrées différentes, 3 plats et 5 desserts.

a) Combien de menus Entrée-Plat-Dessert différents peut-on composer ?
b) Combien de menus Entrée-Plat peut-on composer ?
c) Combien de menus Plat-Dessert peut-on composer ?

▶3. Combien d'anagrammes de MATHS peut-on former en tout ?

▶4. La Course contre la Faim est l'événement scolaire et solidaire de l'année ! Le lycée organise une course contre la Faim. Cinquante élèves de terminale dont Albert répondent présents en se trouvant un parrain qui fera un don en fonction de la distance parcourue.

a) Combien existe-t-il de podiums possibles ?
b) Combien existe-t-il de podiums possibles où Albert est premier ?
c) Combien existe-t-il de podiums possibles dont Albert fait partie ?

▶5. Un joueur de poker possède 5 cartes d'un jeu de 52 cartes distribuées au hasard. Quelle est la probabilité qu'il ait :

a) un as exactement
b) au moins un as
c) un carré
d) au moins un as et au moins un roi

Exercice 2.

La plaque d'immatriculation française est l'un des éléments du dispositif permettant l'identification d'un véhicule du parc automobile français. Elle existe sous différentes formes depuis 1901. La grande majorité des véhicules à moteur doivent en posséder une pour rouler sur les voies publiques.

On suppose dans cet exercice que toutes les lettres peuvent être utilisées mais on exclura systématiquement une série de chiffres qui donnerait le nombre 0 (exemple 0000).

▶1. « *L'ancien système* » datant de 1950 utilise des immatriculations comprenant un numéro d'ordre d'un à quatre chiffres, une série d'une à trois lettres et un code départemental à deux chiffres. **Combien pouvait-on immatriculer de voitures dans le département 75 correspondant à la ville de Paris ?**

Ce système a été changé car l'épuisement était prévisible vers la fin 2025 pour la ville de Paris.

▶2. Le format actuel est entré en vigueur le 15 avril 2009 pour les véhicules neufs et le 15 octobre 2009 pour les véhicules d'occasion. Cette immatriculation est attribuée « à vie » au véhicule qui conserve donc cette immatriculation même s'il change de département ou de propriétaire. Les plaques utilisent le format AA-001-AA, composé de sept caractères alphanumériques : deux lettres, trois chiffres et deux lettres, ces trois groupes étant séparés par des tirets. **Combien peut-on immatriculer de voitures en France aujourd'hui ?**

Exercice 3.

▶ 1. En informatique, un octet est une succession de 8 bits où chaque bit est soit 0 soit 1.

a) Combien d'octets différents existe-t-il ?

b) Dans le système RVB (Rouge-vert-bleu, ou RGB pour l'anglais red-green-blue), une couleur est codée à l'aide de 3 octets, chacun les niveaux de rouge, de vert et de bleu. Combien de couleurs différentes est-il ainsi possible de coder ?

▶ 2. Ada souhaite un mot de passe composé de deux consonnes, un chiffre et une voyelle. Combien existe-t-il de tel mot de passe ?

▶ 3. On achète 3 billets à une loterie, sachant que 50 billets ont été vendus et que 7 sont gagnants calculer :

a) la probabilité d'avoir un billet gagnant ;

b) la probabilité d'avoir au moins un billet gagnant.

Exercice 4.

▶ 1. Démontrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \ k \times \binom{n}{k} = n \times \binom{n-1}{k-1}$$

▶ 2. Démontrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \forall k \in \{0; 1; 2; \dots; n\},\ \ \binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1} \times \binom{n}{k}$$

Tâche n° $\boxed{1}$ $\boxed{4}$
Dénombrement
Correction des exercices

Correction de l'exercice 1.

▶1. Le code PIN d'une carte bancaire est un code confidentiel à 4 chiffres, il doit être gardé secret. Combien de codes PIN peut-on former ?

▶2. Un restaurant propose 4 entrées différentes, 3 plats et 5 desserts.

a) Combien de menus Entrée-Plat-Dessert différents peut-on composer ?
b) Combien de menus Entrée-Plat peut-on composer ?
c) Combien de menus Plat-Dessert peut-on composer ?

▶3. Combien d'anagrammes de MATHS peut-on former en tout ?

▶4. La Course contre la Faim est l'événement scolaire et solidaire de l'année ! Le lycée organise une course contre la Faim. Cinquante élèves de terminale dont Albert répondent présents en se trouvant un parrain qui fera un don en fonction de la distance parcourue.

a) Combien existe-t-il de podiums possibles ?
b) Combien existe-t-il de podiums possibles où Albert est premier ?
c) Combien existe-t-il de podiums possibles dont Albert fait partie ?

▶5. Un joueur de poker possède 5 cartes d'un jeu de 52 cartes distribuées au hasard. Quelle est la probabilité qu'il ait :

a) un as exactement
b) au moins un as
c) un carré
d) au moins un as et au moins un roi

Exercice 1.	**1.**	On peut former 10^4 codes PIN différents.
	2a.	Le nombre de menus Entrée-Plat-Dessert différents est $4 \times 3 \times 5 = 60$.
	2b.	Le nombre de menus Entrée-Plat différents est $4 \times 3 = 12$.
	2c.	Le nombre de menus Plat-Dessert différents est $3 \times 5 = 15$.
	3.	Le nombre d'anagrammes de MATHS est $5! = 120$.
	4a.	Le nombre de podiums possibles est un arrangement de 3 parmi 50 soit : 117 600.
	4b.	Albert étant premier, il reste à choisir les 2 autres membres du podium soit $49 \times 48 = 2352$ possibilités.
	4c.	Il y a 3 choix pour le résultat d'Albert puis 49 choix et enfin 48 choix, soit $3 \times 49 \times 48 = 7056$ possibilités.

	5a.	Le nombre total de mains de 5 cartes correspond au choix de 5 cartes parmi 52 sans remise et sans ordre donc $\binom{52}{5} = \frac{52!}{5!\times 47!} = 2\ 598\ 960$. « Le joueur possède un as exactement ». Le nombre de possibilité pour choisir l'as est 4 et les quatre autres cartes sont à choisir parmi les 48 restantes soit $4 \times \binom{48}{4} = 778\ 320$. La probabilité que le joueur possède un as est $\frac{778\ 320}{2\ 598\ 960} \approx 0{,}29947$
	5b.	« Le joueur possède au moins un as » est l'événement contraire de « Le joueur ne possède aucun as ». Il faut donc choisir 5 cartes parmi les 48 restantes $\binom{48}{5} = 1\ 712\ 304$ La probabilité que le joueur ne possède aucun as est $\frac{1\ 712\ 304}{2\ 598\ 960} \approx 0{,}65884$ La probabilité que le joueur possède au moins un as est $1 - \frac{1\ 712\ 304}{2\ 598\ 960} \approx 0{,}34116$
	5c.	« Le joueur possède un carré ». Le nombre de possibilité pour choisir la première carte est 13 (as ou roi ou dame ou valet …),les trois autres cartes sont à choisir parmi les 3 restantes du même type et la dernière carte est à choisir parmi les 48 restantes soit $13 \times \binom{48}{1} = 624$. La probabilité que le joueur possède un carré est $\frac{624}{2\ 598\ 960} \approx 0{,}00024$
	5d.	« Le joueur possède au moins un as et au moins un roi » est l'événement contraire de «Le joueur ne possède aucun as ou aucun roi» que l'on décompose en «Le joueur ne possède aucun as », «Le joueur ne possède aucun roi» et «Le joueur ne possède aucun as et aucun roi». La probabilité que le joueur ne possède aucun as est $\frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}}$, la probabilité que le joueur ne possède aucun roi est $\frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}}$ et la probabilité que le joueur ne possède aucun as et aucun roi est $\frac{\binom{44}{5}}{\binom{52}{5}}$. La probabilité que le joueur possède au moins un as et au moins un roi est $1 - \left(\frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} + \frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} - \frac{\binom{44}{5}}{\binom{52}{5}}\right) \approx 0{,}10018$

Correction de l'exercice 2.

La plaque d'immatriculation française est l'un des éléments du dispositif permettant l'identification d'un véhicule du parc automobile français. Elle existe sous différentes formes depuis 1901. La grande majorité des véhicules à moteur doivent en posséder une pour rouler sur les voies publiques.
Pour éviter les confusions, les lettes O, I et U ne sont pas utilisées et, on exclut une série de chiffres qui donnerait le nombre 0 (exemple 0000).

▶1. « *L'ancien système* » datant de 1950 utilise des immatriculations comprenant un numéro d'ordre d'un à quatre chiffres, une série d'une à trois lettres et un code départemental à deux chiffres. **Combien pouvait-on immatriculer de voitures dans le département 75 correspondant à la ville de Paris ?**
Ce système a été changé car l'épuisement était prévisible vers la fin 2025 pour la ville de Paris.

▶2. Le format actuel est entré en vigueur le 15 avril 2009 pour les véhicules neufs et le 15 octobre 2009 pour les véhicules d'occasion. Cette immatriculation est attribuée « à vie » au véhicule qui conserve donc cette immatriculation même s'il change de département ou de propriétaire. Les plaques utilisent le format AA-001-AA, composé de sept caractères alphanumériques : deux lettres, trois chiffres et deux lettres, ces trois groupes étant séparés par des tirets. On remarquera que les séries SS et WW du bloc de gauche et la série SS du bloc de droite ne sont pas attribuées. **Combien peut-on immatriculer de voitures en France aujourd'hui ?**

Exercice 2.	**1.**	Pour chacun des dix chiffres, on peut choisir entre 10 valeurs qui peuvent être répétées soit 10^4. Le numéro 0000 n'est pas attribué donc 10^4-1 choix pour les chiffres. Pour les lettres, il y a 1 seule lettre ou 2 lettres ou 3 lettres, ce qui donne $23+23^2+23^3$ choix possibles pour les lettres. On a donc au total, pour le département 75 : $(10^4-1)\times(23+23^2+23^3)=127\,177\,281$
	2.	Dans le format actuel, on peut former $(23^2-2)\times(10^3-1)\times(23^2-1)=527\times999\times528=277\,977\,744$

Correction de l'exercice 3.

▶1. En informatique, un octet est une succession de 8 bits où chaque bit est soit 0 soit 1.
  a) Combien d'octets différents existe-t-il ?
  b) Dans le système RVB (Rouge-vert-bleu, ou RGB pour l'anglais red-green-blue), une couleur est codée à l'aide de 3 octets, chacun les niveaux de rouge, de vert et de bleu. Combien de couleurs différentes est-il ainsi possible de coder ?

▶2. Ada souhaite un mot de passe composé de deux consonnes, un chiffre et une voyelle. Combien existe-t-il de tel mot de passe ?

▶3. On achète 3 billets à une loterie, sachant que 50 billets ont été vendus et que 7 sont gagnants calculer :

a) la probabilité d'avoir un billet gagnant ;
b) la probabilité d'avoir au moins un billet gagnant.

Exercice 3.	**1a.**	Pour chaque bit, on peut choisir entre 2 valeurs. On peut donc former $2^8 = 256$ octets différents.
	1b.	Le système RVB permet donc de coder : $256^3 = (2^8)^3 = 2^{24} = 16\,777\,216$ couleurs.
	2.	Ada peut choisir 2 consonnes parmi 20, puis un chiffre parmi 10 et enfin une voyelle parmi 6. Le nombre de mot de passe possible est donc : $$20^2 \times 10 \times 6 = 24000$$ *La répétition de consonne n'est pas interdite par l'énoncé.*
	3a.	La probabilité d'avoir un billet gagnant est : $$\frac{\binom{7}{1}\times\binom{43}{2}}{\binom{50}{3}} = 7 \times \frac{43!}{2!\times 41!} \times \frac{3!\times 47!}{50!} = \frac{43\times 3}{50\times 8} = \frac{129}{400} = 32{,}25\%$$
	3b.	La probabilité de n'avoir aucun billet gagnant est : $$\frac{\binom{43}{3}}{\binom{50}{3}} = \frac{43!}{3!\times 40!} \times \frac{3!\times 47!}{50!} = \frac{43\times 41}{50\times 7\times 8} = \frac{1763}{2800} = 62{,}96\ \%$$ La probabilité d'avoir au moins un billet gagnant est donc 37,04 %.

Correction de l'exercice 4.

▶ 1. Démontrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\quad k \times \binom{n}{k} = n \times \binom{n-1}{k-1}$$

▶ 2. Démontrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \forall k \in \{0; 1; 2; \dots; n\},\quad \binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1} \times \binom{n}{k}$$

Exercice 4.	**1.**	$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \forall k \in \mathbb{N}^*,$ $$\begin{aligned} n \times \binom{n-1}{k-1} &= n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-k+1)!} \\ &= \frac{n\times(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \\ &= k \times \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \\ &= k \times \binom{n}{k} \end{aligned}$$

	2.	$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \forall k \in \{0; 1; 2; \dots; n\},$ $\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\big(n+1-(k+1)\big)!}$ $= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n+1-k-1)!}$ $= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!}$ $= \frac{(n+1)\times n!}{(k+1)\times k!\,(n-k)!}$ $= \frac{n+1}{k+1} \times \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ $\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1} \times \binom{n}{k}$