Terminale Spécialité Mathématiques
Tâche n° $\boxed{1}$ $\boxed{9}$
Equations différentielles

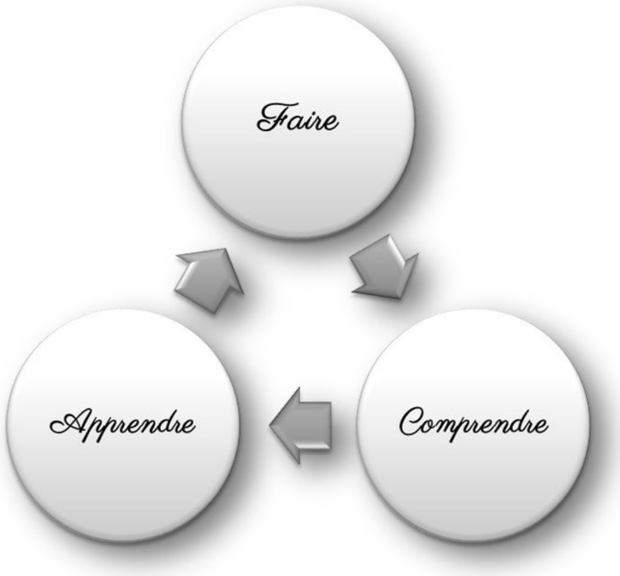


Table des matières

Enoncé des exercices 2
Exercice 1. 2
Exercice 2. 2
Exercice 3. 3
Exercice 4. 3
Exercice 5. 3
Correction des exercices 5
Correction de l'exercice 1 5
Correction de l'exercice 2 10
Correction de l'exercice 3 13
Correction de l'exercice 4 14
Correction de l'exercice 5 16

Tâche n° 1 9
Equations différentielles
Enoncé des exercices

Exercice 1.

▶1. Résoudre l'équation différentielle $2y' + y = 0 \;\; (E)$ dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

▶2. On considère l'équation différentielle $2y' + y = e^{-x/2}(x+1) \quad (E')$

a. Déterminer deux réels m et p tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x/2}\,(mx^2 + px)$ soit solution de (E').

b. Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Montrer que g est solution de l'équation (E') si et seulement si $g - f$ est solution de l'équation (E).
Résoudre l'équation (E').

▶3. Étudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{1}{4}e^{-x/2}\,(x^2 + 2x)$.

▶4. Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction h.

▶5. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de h et $\mathcal{T}$ celle de la fonction : $x \longmapsto e^{-x/2}$.

a. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et $\mathcal{T}$.

b. Tracer ces deux courbes sur un même graphique.

Exercice 2.

Dans cet exercice on étudie une épidémie dans une population.

Partie A : Étude de la progression de l'épidémie pendant 30 jours

Au début de l'épidémie on constate que 0,01% de la population est contaminé.
Pour t appartenant à $[0; 30]$, on note $y(t)$ le pourcentage de personnes touchées par la maladie après t jours.
On a donc $y(0) = 0{,}01$.
On admet que la fonction y ainsi définie sur $[0; 30]$ est dérivable, strictement positive et vérifie $y' = 0{,}05\, y\,(10 - y)$.

▶1. On considère la fonction z définie sur l'intervalle à $[0; 30]$ par $z = \frac{1}{y}$.

Démontrer que la fonction y satisfait aux conditions $\begin{cases} y(0) = 0{,}01 \\ y' = 0{,}05\, y\,(10 - y) \end{cases}$ si et seulement si la fonction z satisfait aux conditions $\begin{cases} z(0) = 100 \\ z' = -0{,}5\, z + 0{,}05 \end{cases}$

▶2. a. En déduire une expression de la fonction z puis celle de la fonction y.
b. Calculer le pourcentage de la population infectée après 30 jours. On donnera la valeur arrondie à l'entier le plus proche.

Partie B : Étude sur l'efficacité d'un vaccin

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Le quart de la population est vacciné contre cette maladie contagieuse. De plus, on estime que sur la population vaccinée, 92 % des individus ne tombent pas malades.

Sur la population totale, on estime aussi que 10 % des individus sont malades.
On choisit au hasard un individu dans cette population.
▶1. Montrer que la probabilité de l'évènement « l'individu n'est pas vacciné et tombe malade » est égale à 0,08.
▶2. Quelle est la probabilité de tomber malade pour un individu qui n'est pas vacciné ?

Exercice 3.

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur l'intervalle $]0;+\infty[$ vérifiant l'équation différentielle

$$(E):\quad x\,f'(x)-(2x+1)\,f(x)=8x^2.$$

▶1. a. Démontrer que si f est solution de (E) alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ est solution de l'équation différentielle

$$(E'):\ y'=2y+8.$$

b. Démontrer que si h est solution de (E') alors la fonction f définie par $f(x)=x\,h(x)$ est solution de (E).
▶2. Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E).
▶3. Existe-t-il une fonction f solution de l'équation différentielle (E) dont la représentation graphique dans un repère donné passe par le point $A(\ln(2)\,;0)$? Si oui la préciser.

Exercice 4.

On considère les deux équations différentielles suivantes définies sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$:

$$(E):\quad y'+(1+\tan(x)\,y)=\cos(x)$$
$$(E_0):\quad y'+y=1$$

▶1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E_0).
▶2. Soient f et g deux fonctions dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et telles que

$$f(x)=g(x)\cos(x).$$

Démontrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction g est solution de (E_0).
▶3. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0)=0$.

Exercice 5.

Les parties A et B sont indépendantes.
Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition.

Partie A

En 2000, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est égal à mille. Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction f du temps t (exprimé en années à partir de l'origine 2000). D'après le modèle d'évolution choisi, la fonction f est dérivable, strictement positive sur $[0\,;+\infty[$, et satisfait l'équation différentielle :

$$(E):\quad y'=-\frac{1}{20}y(3-\ln(y)).$$

▶1. Démontrer l'équivalence suivante : une fonction f, dérivable, strictement positive sur $[0\,;+\infty[$, vérifie, pour tout t de $[0\,;+\infty[$, $f'(t) = -\frac{1}{20}f(t)\big(3-\ln\big(f(t)\big)\big)$ si et seulement si la fonction $g=\ln(f)$ vérifie, pour tout t de $[0\,;+\infty[$, $g'(t)=\frac{1}{20}g(t)-\frac{3}{20}$.

▶2. Donner la solution générale de l'équation différentielle :

$$(H):\quad z' = \frac{1}{20}z - \frac{3}{20}.$$

▶3. En déduire qu'il existe un réel C tel que, pour tout t de $[0\,;+\infty[$

$$f(t) = \exp\big(3 + Ce^{t/20}\big).$$

▶4. La condition initiale conduit donc à considérer la fonction f définie par :

$$f(t) = \exp\big(3 - 3e^{t/20}\big).$$

a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Déterminer le sens de variation de f sur $[0\,;+\infty[$.

c. Résoudre dans $[0\,;+\infty[$ l'inéquation $f(t) < 0{,}02$. Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à vingt individus ?

Partie B

En 2005, ce laboratoire de recherche met au point un test de dépistage de la maladie responsable de cette disparition et fournit les renseignements suivants : « La population testée comporte 50 % d'animaux malades. Si un animal est malade, le test est positif dans 99 % des cas; si un animal n'est pas malade, le test est positif dans 0,1 % des cas ».

On note M l'évènement « l'animal est malade » et T l'évènement « le test est positif ».

▶1. Déterminer $P(M)$, $P_M(T)$ et $P_{\overline{M}}(T)$.

▶2. En déduire $P(T)$.

▶3. Le laboratoire estime qu'un test est fiable, si sa valeur prédictive, c'est-à-dire la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif, est supérieure à 0,999. Ce test est-il fiable ?

Tâche n° $\boxed{1}$ $\boxed{9}$
Equations différentielles
Correction des exercices

Correction de l'exercice 1.

▶1. Résoudre l'équation différentielle $2y' + y = 0$ (E) dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

▶2. On considère l'équation différentielle $2y' + y = e^{-x/2}(x+1)$ (E')

a. Déterminer deux réels m et p tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x/2}\,(mx^2 + px)$ soit solution de (E').

b. Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Montrer que g est solution de l'équation (E') si et seulement si $g - f$ est solution de l'équation (E).
Résoudre l'équation (E').

▶3. Étudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{1}{4}e^{-x/2}\,(x^2 + 2x)$.

▶4. Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction h.

▶5. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de h et $\mathcal{T}$ celle de la fonction : $x \longmapsto e^{-x/2}$.

a. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et $\mathcal{T}$.

b. Tracer ces deux courbes sur un même graphique.

Exercice 1.	**1.**	$$2y' + y = 0 \ (E) \\ \Leftrightarrow 2y' = -y \\ \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{2}y$$ L'ensemble des solutions est donc $y(x) = C\,e^{-0,5x}$ où $C \in \mathbb{R}$

	2a.	$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = e^{-x/2}\,(mx^2 + px)$ La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R},\ \ f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\,(mx^2 + px) + e^{-x/2}\,(2mx + p)$ $f'(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left(-\frac{1}{2}mx^2 - \frac{1}{2}px + 2mx + p\right)$ $f'(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left(-\frac{1}{2}mx^2 + \left(2m - \frac{1}{2}p\right)x + p\right)$ $2f'(x) + f(x)$ $= 2e^{-\frac{x}{2}}\left(-\frac{1}{2}mx^2 + \left(2m - \frac{1}{2}p\right)x + p\right) + e^{-x/2}\,(mx^2 + px)$ $2f'(x) + f(x) = e^{-\frac{x}{2}}\,(-mx^2 + (4m - p)x + 2p + mx^2 + px)$ $2f'(x) + f(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left((4m - p + p)x + 2p\right)$ $2f'(x) + f(x) = e^{-\frac{x}{2}}\,(4mx + 2p) = e^{-x/2}(x + 1)$ Par identification, f est solution de l'équation (E) lorsque $\begin{cases} 4m = 1 \\ 2p = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{4} \\ p = \frac{1}{2} \end{cases}$ La fonction $f(x) = e^{-x/2}\,\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x\right)$ définie sur $\mathbb{R}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E').

	2b.	Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. **Condition nécessaire :** Supposons que g est solution de l'équation (E') alors $\forall x \in \mathbb{R},\ 2g'(x) + g(x) = e^{-x/2}(x+1) \quad (E')$ $\forall x \in \mathbb{R}\ \ 2(g-f)'(x) + (g-f)(x) = 2g'(x) - 2f'(x) + g(x) - f(x)$ $= \underbrace{2g'(x) + g(x)} - \left(\underbrace{2f'(x) + f(x)}\right)$ $= e^{-x/2}(x+1) - \left(e^{-x/2}(x+1)\right)$ $= 0$ donc $g - f$ est solution de l'équation (E). **Réciproquement, condition suffisante :** Supposons que $g - f$ est solution de l'équation (E) alors $\forall x \in \mathbb{R},\ 2(g-f)'(x) + (g-f)(x) = 0 \quad (E)$ $\Leftrightarrow 2g'(x) - 2f'(x) + g(x) - f(x) = 0$ $\Leftrightarrow 2g'(x) + g(x) = 2f'(x) + f(x)$ $\Leftrightarrow 2g'(x) + g(x) = e^{-x/2}(x+1)$ car f est solution de (E') donc g est solution de l'équation (E') . On en déduit que, $\forall x \in \mathbb{R},\ (g-f)(x) = g(x) - f(x) = C\ e^{-0,5x}$ où $C \in \mathbb{R}$ $g(x) = e^{-x/2}\ \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x\right) + C\ e^{-0,5x} = e^{-x/2}\ \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + C\right)$ où $C \in \mathbb{R}$

3.

La fonction h définie par : $h(x) = \frac{1}{4}e^{-x/2}\,(x^2 + 2x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad h'(x) = \dfrac{-0{,}5}{4}e^{-\frac{x}{2}}\,(x^2 + 2x) + \dfrac{1}{4}e^{-x/2}\,(2x + 2)$

$$h'(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}\,(-0{,}5x^2 - x + 2x + 2)$$

$$h'(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{-1}{2}x^2 + x + 2\right)$$

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{2}x^2 + x + 2 > 0 \text{ car } \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}} > 0$$

$$\Delta = 1 - 4 \times \frac{-1}{2} \times 2 = 5 > 0$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{-1} = 1 + \sqrt{5} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{-1} = 1 - \sqrt{5}$$

De plus, $a = -\frac{1}{2} < 0$, la parabole est donc tournée vers le bas

x	$-\infty$		$1-\sqrt{5}$		$1+\sqrt{5}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\searrow$	$h(1-\sqrt{5})$	$\nearrow$	$h(1+\sqrt{5})$	$\searrow$	

$$h(1 + \sqrt{5}) = \frac{1}{4}e^{-(1+\sqrt{5})/2}\left(\left(1 + \sqrt{5}\right)^2 + 2\left(1 + \sqrt{5}\right)\right)$$

$$= e^{-(1+\sqrt{5})/2}\left(2 + \sqrt{5}\right) \approx 0{,}84$$

$$h(1 - \sqrt{5}) = e^{-(1-\sqrt{5})/2}\left(2 - \sqrt{5}\right) \approx -0{,}44$$

4.

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad h(x) = \frac{1}{4}e^{-x/2}\,(x^2+2x) = \frac{x}{4}e^{-x/2}\,(x+2)$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{4} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x/2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x+2 = -\infty\end{array}\right\}\text{donc, par produit,}\qquad \lim_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{x}{2}} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2+2x = +\infty\end{array}\right\}\text{FI, par produit}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad h(x) = \frac{x^2}{4}e^{-x/2} + \frac{x}{2}e^{-x/2}$$

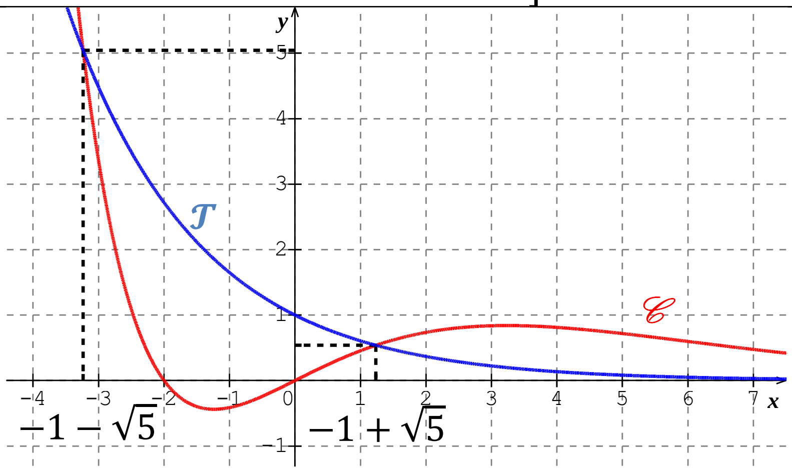
$$h(x) = \left(-\frac{x}{2}\right)^2 e^{-x/2} - \left(-\frac{x}{2}\right)e^{-x/2}$$

or $\lim\limits_{X\to-\infty} X^2\,e^X = 0 = \lim\limits_{X\to-\infty} X\,e^X = 0$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^2 e^{-x/2} = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)e^{-x/2}$

et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{5}$		$1+\sqrt{5}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-0{,}44$	$\nearrow$	$0{,}84$	$\searrow$	0

	5a.	Pour étudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et $\mathcal{T}$, on étudie le signe de $h(x) - e^{-x/2}$, pour tout réel x : $\forall x \in \mathbb{R},\ \ h(x) - e^{-x/2} = \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}(x^2 + 2x) - e^{-x/2}$ $h(x) - e^{-x/2} = \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}(x^2 + 2x - 4)$ $h(x) - e^{-\frac{x}{2}} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}(x^2 + 2x - 4) > 0$ $\Leftrightarrow x^2 + 2x - 4 > 0 \text{ car } \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}} > 0$ $\Delta = 4 - 4 \times (-4) = 20 > 0$ $x_1 = \frac{-2 - \sqrt{20}}{2} = \frac{-2 - 2\sqrt{5}}{2} = -1 - \sqrt{5}$ $x_2 = \frac{-2 + \sqrt{20}}{2} = \frac{-2 + 2\sqrt{5}}{2} = -1 + \sqrt{5}$ $a = 1 > 0$ donc la parabole est tournée vers le haut : x : $-\infty$; $-1-\sqrt{5}$; $-1+\sqrt{5}$; $+\infty$ x^2+2x-4 : $+$; 0 ; $-$; 0 ; $+$ La courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de la courbe $\mathcal{T}$ sur $]-\infty; -1 - \sqrt{5}[$ et sur $]-1 + \sqrt{5}; +\infty[$. La courbe $\mathcal{T}$ est au dessus de la courbe $\mathscr{C}$ sur $]-1 - \sqrt{5}; -1 + \sqrt{5}[$.
	5b.	

Correction de l'exercice 2.

Dans cet exercice on étudie une épidémie dans une population.

Partie A : Étude de la progression de l'épidémie pendant 30 jours

Au début de l'épidémie on constate que 0,01% de la population est contaminé.

Pour t appartenant à $[0; 30]$, on note $y(t)$ le pourcentage de personnes touchées par la maladie après t jours.

On a donc $y(0) = 0{,}01$.

On admet que la fonction y ainsi définie sur $[0; 30]$ est dérivable, strictement positive et vérifie $y' = 0{,}05\, y\,(10 - y)$.

▶ 1. On considère la fonction z définie sur l'intervalle à $[0; 30]$ par $z = \frac{1}{y}$.

Démontrer que la fonction y satisfait aux conditions $\begin{cases} y(0) = 0{,}01 \\ y' = 0{,}05\, y\,(10 - y) \end{cases}$ si et seulement si la fonction z satisfait aux conditions $\begin{cases} z(0) = 100 \\ z' = -0{,}5\, z + 0{,}05 \end{cases}$

▶2. a. En déduire une expression de la fonction z puis celle de la fonction y.

b. Calculer le pourcentage de la population infectée après 30 jours. On donnera la valeur arrondie à l'entier le plus proche.

Partie B : Étude sur l'efficacité d'un vaccin

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Le quart de la population est vacciné contre cette maladie contagieuse. De plus, on estime que sur la population vaccinée, 92 % des individus ne tombent pas malades.

Sur la population totale, on estime aussi que 10 % des individus sont malades.

On choisit au hasard un individu dans cette population.

▶1. Montrer que la probabilité de l'évènement « l'individu n'est pas vacciné et tombe malade » est égale à 0,08.

▶2. Quelle est la probabilité de tomber malade pour un individu qui n'est pas vacciné ?

<table>
<tr>
<td>Exercice 2.</td>
<td>A1.</td>
<td>
Condition nécessaire :
Supposons que la fonction y satisfait aux conditions

$$\begin{cases} y(0) = 0{,}01 \\ y' = 0{,}05\, y\,(10 - y) \end{cases}$$

La fonction z définie sur l'intervalle à $[0; 30]$ par $z = \frac{1}{y}$

$$z(0) = \frac{1}{y(0)} = \frac{1}{0{,}01} = 100$$

$$\forall x \in [0\,; 30], \qquad z'(t) = \frac{-y'(t)}{\left(y(t)\right)^2}$$

$$z'(t) = \frac{-0{,}05\, y(t)\left(10 - y(t)\right)}{\left(y(t)\right)^2}$$

$$z'(t) = \frac{-0{,}5\, y(t) + 0{,}05\left(y(t)\right)^2}{\left(y(t)\right)^2}$$

$$z'(t) = \frac{-0{,}5\, y(t)}{\left(y(t)\right)^2} + \frac{0{,}05\left(y(t)\right)^2}{\left(y(t)\right)^2}$$

$$z'(t) = \frac{-0{,}5}{y(t)} + 0{,}05$$

$$z'(t) = -0{,}5\, z(t) + 0{,}05$$

donc la fonction z satisfait aux conditions $\begin{cases} z(0) = 100 \\ z' = -0{,}5\, z + 0{,}05 \end{cases}$
</td>
</tr>
</table>

A1.

Réciproquement, condition suffisante

Supposons que la fonction z satisfait aux conditions

$$\begin{cases} z(0) = 100 \\ z' = -0{,}5\, z + 0{,}05 \end{cases}$$

$$z(0) = 100 = \frac{1}{y(0)} \Leftrightarrow y(0) = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

$\forall t \in [0\,;30],\ \ z'(t) = -0{,}5\, z(t) + 0{,}05$

$$\frac{-y'(t)}{\left(y(t)\right)^2} = -0{,}5\frac{1}{y(t)} + 0{,}05$$

$$\Leftrightarrow -y'(t) = -0{,}5\, y(t) + 0{,}05\left(y(t)\right)^2$$

$$\Leftrightarrow y'(t) = 0{,}5\, y(t) - 0{,}05\left(y(t)\right)^2$$

$$\Leftrightarrow y'(t) = 0{,}5\, y(t) - 0{,}05\left(y(t)\right)^2$$

$$\Leftrightarrow y'(t) = -0{,}05\, y(t)\left(10 - y(t)\right)$$

donc la fonction y satisfait aux conditions $\begin{cases} y(0) = 0{,}01 \\ y' = 0{,}05\, y\,(10 - y) \end{cases}$

A2a.

La fonction z vérifie $z' = -0{,}5\, z + 0{,}05$ et $z(0) = 100$.
La fonction constante égale à 0,1 est une solution particulière de l'équation différentielle. L'ensemble des solutions est donc

$$z(t) = C\, e^{-0{,}5t} + 0{,}1 \ \text{ où } C \in \mathbb{R}$$

or $z(0) = 100$ donc

$$z(0) = C\, e^{0} + 0{,}1 = 100 \Leftrightarrow C = 99{,}9$$

$$z(t) = 99{,}9\, e^{-0{,}5t} + 0{,}1$$

J'en déduis que

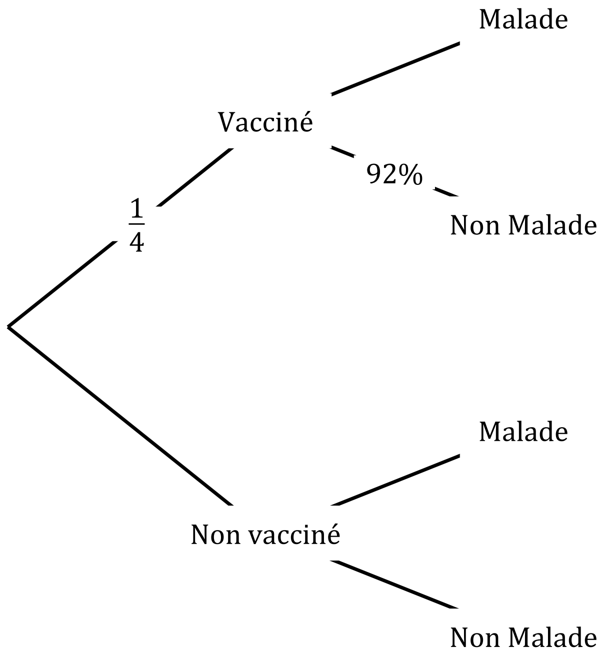
$$\forall t \in [0\,;30],\ \ y(t) = \frac{1}{z(t)} = \frac{1}{99{,}9\, e^{-0{,}5t} + 0{,}1}$$

A2b.

$$y(30) = \frac{1}{99{,}9\, e^{-0{,}5\times 30} + 0{,}1} \approx 9{,}99 \text{ soit } 10\%$$

B1.

La situation peut être modélisée par l'arbre :



	B1.	De plus, on sait que sur la population totale, 10 % des individus sont malades. Les individus malades et non vaccinés, représentent $\frac{1}{4} \times 0{,}08 = 0{,}02$ soit 2% de la population totale. Par conséquent, 8% de la population totale sont des individus malades et non-vaccinés donc la probabilité de l'évènement « l'individu n'est pas vacciné et tombe malade » est égale à 0,08.
	B2.	La probabilité de tomber malade pour un individu qui n'est pas vacciné est donc : $\frac{0{,}08}{1-1/4} = \frac{0{,}08}{3/4} = 0{,}08 \times \frac{4}{3} = \frac{0{,}32}{3} = \frac{8}{75} \approx 0{,}107$ soit 10,7%

Correction de l'exercice 3.

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur l'intervalle $]0;+\infty[$ vérifiant l'équation différentielle

$$(E):\quad x\,f'(x) - (2x+1)\,f(x) = 8x^2.$$

▶1. a. Démontrer que si f est solution de (E) alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ est solution de l'équation différentielle

$$(E'):\ y' = 2y + 8.$$

b. Démontrer que si h est solution de (E') alors la fonction f définie par $f(x) = x\,h(x)$ est solution de (E).

▶2. Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E).

▶3. Existe-t-il une fonction f solution de l'équation différentielle (E) dont la représentation graphique dans un repère donné passe par le point $A(\ln(2)\,;0)$? Si oui la préciser.

Exercice 3.	**1a.**	Supposons que la fonction f est solution de $(E):\quad x\,f'(x) - (2x+1)\,f(x) = 8x^2$ La fonction g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x \in]0;+\infty[,\quad g'(x) = \dfrac{f'(x)\times x - f(x)\times 1}{x^2}$ $g'(x) = \dfrac{8x^2 + (2x+1)\,f(x) - f(x)}{x^2} = \dfrac{8x^2 + (2x+1-1)\ f(x)}{x^2}$ $g'(x) = \dfrac{8x^2 + 2x\ f(x)}{x^2}$ $g'(x) = \dfrac{2x\ f(x)}{x^2} + \dfrac{8x^2}{x^2}$ $g'(x) = 2\dfrac{f(x)}{x} + 8$ $g'(x) = 2g(x) + 8$ donc g est solution de l'équation différentielle $(E'):\ y' = 2y + 8$

	1b.	Supposons que la fonction h est solution de (E'): $y' = 2y + 8$ donc $\forall x \in]0;+\infty[,\quad h'(x) = 2h(x) + 8$ La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x \in]0;+\infty[,\ f'(x) = 1 \times h(x) + x\, h'(x)$ $f'(x) = h(x) + x\,(2\,h(x) + 8)$ $f'(x) = h(x) + 2x\,h(x) + 8x$ $f'(x) = (2x+1)\,h(x) + 8x$ donc $x \times f'(x) = x \times (2x+1)\,h(x) + x \times 8x$ $x \times f'(x) = (2x+1)\,x\,h(x) + 8x^2$ Et donc $x\,f'(x) = (2x+1)\,f(x) + 8x^2$ donc f est solution de l'équation différentielle (E)
	2.	(E'): $y' = 2y + 8$ La fonction constante égale à -4 est une solution particulière. L'ensemble des solutions est donc $h(x) = C\,e^{2x} - 4$ où $C \in \mathbb{R}$. J'en déduis que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) est $f(x) = x\,h(x) = C\,xe^{2x} - 4x$
	3.	$f(\ln(2)) = C \times \ln(2) \times e^{2\ln(2)} - 4\ln(2) = 0$ $\Leftrightarrow C \times \ln(2) \times e^{2\ln(2)} = 4\ln(2)$ $\Leftrightarrow C \times e^{\ln(2^2)} = \dfrac{4\ln(2)}{\ln(2)}$ $\Leftrightarrow C \times e^{\ln(4)} = 4$ $\Leftrightarrow 4\,C = 4$ $\Leftrightarrow C = \dfrac{4}{4} = 1$ La solution est donc $\forall x \in]0;+\infty[,\ f(x) = xe^{2x} - 4x$.

Correction de l'exercice 4.

On considère les deux équations différentielles suivantes définies sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$:

$$(E):\quad y' + (1 + \tan(x))y = \cos(x)$$
$$(E_0):\quad y' + y = 1$$

▶1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E_0).

▶2. Soient f et g deux fonctions dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et telles que

$$f(x) = g(x)\cos(x).$$

Démontrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction g est solution de (E_0).

▶3. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$.

Exercice 4.

1.

$$(E_0):\quad y' + y = 1$$
$$\Leftrightarrow y' = -y + 1$$

La fonction constante égale à 1 est une solution particulière. L'ensemble des solutions est donc $y(x) = C\,e^{-x} + 1$ où $C \in \mathbb{R}$.

2.

$$(E):\quad y' + (1 + \tan(x))y = \cos(x)$$
$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[,\qquad f(x) = g(x)\cos(x).$$

Condition nécessaire :

Supposons que la fonction f est solution de (E)

$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[,\ \ f'(x) + (1 + \tan(x))f(x) = \cos(x)$

$$g'(x)\cos(x) + g(x)(-\sin(x)) + \left(1 + \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)g(x)\cos(x) = \cos(x)$$
$$g'(x)\cos(x) - g(x)\sin(x) + g(x)\cos(x) + g(x)\sin(x) = \cos(x)$$
$$g'(x)\cos(x) + g(x)\cos(x) = \cos(x)$$
$$\cos(x) \neq 0 \text{ donc } g'(x) + g(x) = \frac{\cos(x)}{\cos(x)} = 1$$

La fonction g est donc solution de (E_0).

Réciproquement, condition suffisante :

Supposons que la fonction g est solution de (E_0)

$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[,\ \ g'(x) + g(x) = 1$

$$f(x) = g(x)\cos(x)$$
$$f'(x) = g'(x)\cos(x) - g(x)\sin(x)$$

donc $f'(x) + (1 + \tan(x))f(x)$

$$= g'(x)\cos(x) - g(x)\sin(x) + (1 + \tan(x))g(x)\cos(x)$$

$f'(x) + (1 + \tan(x))f(x)$

$$= g'(x)\cos(x) - g(x)\sin(x) + \left(1 + \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)g(x)\cos(x)$$

$f'(x) + (1 + \tan(x))f(x)$

$$= g'(x)\cos(x) - g(x)\sin(x) + g(x)\cos(x) + g(x)\sin(x)$$

$f'(x) + (1 + \tan(x))f(x) = g'(x)\cos(x) + g(x)\cos(x)$

$f'(x) + (1 + \tan(x))f(x) = \left(\underbrace{g'(x) + g(x)}_{}\right)\cos(x)$

$f'(x) + (1 + \tan(x))f(x) = 1 \times \cos(x)$

$f'(x) + (1 + \tan(x))f(x) = \cos(x)$

La fonction f est donc solution de (E).

3.

L'ensemble des solutions de (E) est alors :

$f(x) = (C\,e^{-x} + 1)\cos(x)$ où $C \in \mathbb{R}$

$$\text{or } f(0) = 0 = (C\,e^{0} + 1)\cos(0) = C + 1 \Leftrightarrow C = -1$$
$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[,\qquad f(x) = (-\,e^{-x} + 1)\cos(x)$$

Correction de l'exercice 5.

Les parties A et B sont indépendantes.

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition.

Partie A

En 2000, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est égal à mille. Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction f du temps t (exprimé en années à partir de l'origine 2000). D'après le modèle d'évolution choisi, la fonction f est dérivable, strictement positive sur $[0\,;+\infty[$, et satisfait l'équation différentielle :

$$(E):\quad y' = -\frac{1}{20}y(3-\ln(y)).$$

▶ 1. Démontrer l'équivalence suivante : une fonction f, dérivable, strictement positive sur $[0\,;+\infty[$, vérifie, pour tout t de $[0\,;+\infty[$, $f'(t) = -\frac{1}{20}f(t)\big(3-\ln\big(f(t)\big)\big)$ si et seulement si la fonction $g=\ln(f)$ vérifie, pour tout t de $[0\,;+\infty[$, $g'(t)=\frac{1}{20}g(t)-\frac{3}{20}$.

▶ 2. Donner la solution générale de l'équation différentielle :

$$(H):\quad z' = \frac{1}{20}z - \frac{3}{20}.$$

▶ 3. En déduire qu'il existe un réel C tel que, pour tout t de $[0\,;+\infty[$

$$f(t)=\exp\big(3+Ce^{t/20}\big).$$

▶ 4. La condition initiale conduit donc à considérer la fonction f définie par :

$$f(t)=\exp\big(3-3e^{t/20}\big).$$

a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Déterminer le sens de variation de f sur $[0\,;+\infty[$.

c. Résoudre dans $[0\,;+\infty[$ l'inéquation $f(t)<0{,}02$. Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à vingt individus ?

Partie B

En 2005, ce laboratoire de recherche met au point un test de dépistage de la maladie responsable de cette disparition et fournit les renseignements suivants : « La population testée comporte 50 % d'animaux malades. Si un animal est malade, le test est positif dans 99 % des cas; si un animal n'est pas malade, le test est positif dans 0,1 % des cas ».

On note M l'évènement « l'animal est malade » et T l'évènement « le test est positif ».

▶ 1. Déterminer $P(M)$, $P_M(T)$ et $P_{\overline{M}}(T)$.

▶ 2. En déduire $P(T)$.

▶ 3. Le laboratoire estime qu'un test est fiable, si sa valeur prédictive, c'est-à-dire la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif, est supérieure à 0,999. Ce test est-il fiable ?

↑

Exercice 5.

A1.

Condition nécessaire :

Supposons que la fonction f vérifie :

$\forall t \in [0\,;+\infty[, f'(t) = -\frac{1}{20} f(t)\big(3 - \ln\big(f(t)\big)\big)$

Remarque, $\forall t \in [0\,;+\infty[, f(t) > 0$ par hypothèse

Soit la fonction $\forall t \in [0\,;+\infty[, g(t) = \ln\big(f(t)\big)$ vérifie,

$$\forall t \in [0\,;+\infty[, g'(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{-\frac{1}{20} f(t)\big(3 - \ln\big(f(t)\big)\big)}{f(t)}$$

$$g'(t) = -\frac{1}{20}\big(3 - \ln\big(f(t)\big)\big)$$

$$g'(t) = -\frac{3}{20} + \frac{1}{20} g(t)$$

Réciproquement, condition suffisante :

Supposons que la fonction $g(t) = \ln\big(f(t)\big)$ vérifie :

$\forall t \in [0\,;+\infty[, g'(t) = -\frac{3}{20} + \frac{1}{20} g(t)$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(t)}{f(t)} = -\frac{3}{20} + \frac{1}{20} g(t)$$

$$\Leftrightarrow f'(t) = f(t)\left(-\frac{3}{20} + \frac{1}{20} g(t)\right)$$

$$\Leftrightarrow f'(t) = -\frac{1}{20} f(t)\big(3 - \ln\big(f(t)\big)\big)$$

A2.

$$(H):\quad z' = \frac{1}{20} z - \frac{3}{20}$$

La fonction constante égale à 3 est une solution particulière. L'ensemble des solutions est donc $g(t) = C\, e^{\frac{1}{20}t} + 3$ où $C \in \mathbb{R}$.

A3.

On en déduit que la fonction f solution de (E) est égale à :

$$\forall t \in [0\,;+\infty[, g(t) = \ln\big(f(t)\big) = C\, e^{\frac{1}{20}t} + 3$$

$$\Leftrightarrow f(t) = \exp\left(C\, e^{\frac{1}{20}t} + 3\right)$$

A4a.

$$f(0) = 1 = \exp(C\, e^0 + 3) \Leftrightarrow C + 3 = \ln(1) = 0 \Leftrightarrow C = -3$$

$\forall t \in [0\,;+\infty[, f(t) = \exp\left(3 - 3\, e^{\frac{1}{20}t}\right)$

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^{\frac{1}{20}t} = +\infty$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} 3 - 3\, e^{\frac{1}{20}t} = -\infty$

par conséquent, $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$

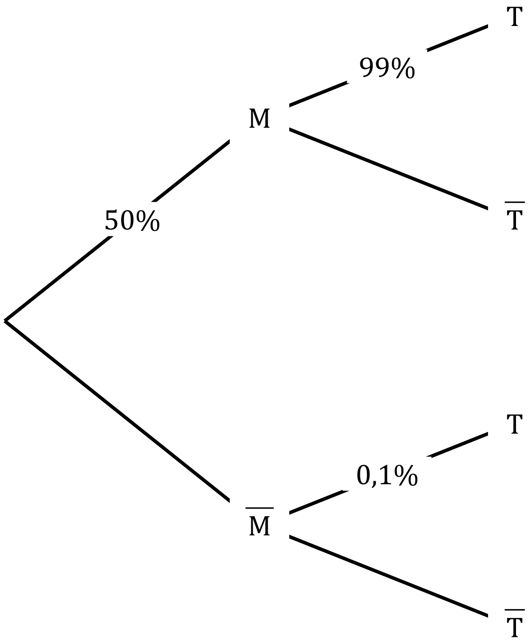
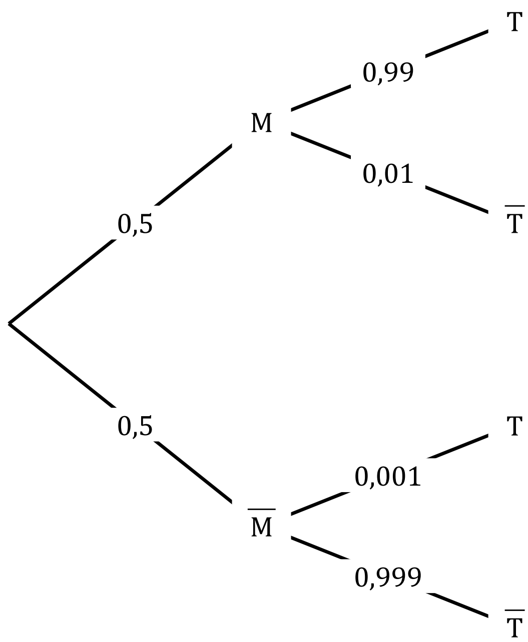
A4b.

La fonction f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$,

$\forall t \in [0\,;+\infty[, f'(t) = \exp\left(3 - 3\, e^{\frac{1}{20}t}\right) \times \left(-3\, e^{\frac{1}{20}t} \times \frac{1}{20}\right)$

$$f'(t) = -\frac{3}{20}\, e^{\frac{1}{20}t}\, \exp\left(3 - 3\, e^{\frac{1}{20}t}\right) < 0 \;\; \forall t \in [0\,;+\infty[$$

La fonction f est donc strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

	A4c.	$f(t) < 0{,}02$ $\Leftrightarrow \exp\left(3 - 3\, e^{\frac{1}{20}t}\right) < 0{,}02$ $\Leftrightarrow 3 - 3\, e^{\frac{1}{20}t} < \ln(0{,}02)$ $\Leftrightarrow -3\, e^{\frac{1}{20}t} < \ln\left(\frac{1}{50}\right) - 3$ $\Leftrightarrow \; e^{\frac{1}{20}t} > \frac{-\ln(50) - 3}{-3}$ car $-3 < 0$ $\Leftrightarrow \; \frac{1}{20}t > \ln\left(\frac{\ln(50)+3}{3}\right)$ $\Leftrightarrow \; t > 20\, \ln\left(\frac{\ln(50)+3}{3}\right)$ $\Longrightarrow \; t > 16.69$ La taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à vingt individus au bout de 17 ans.
	B1.	$P(M) = 50\% = 0{,}5$ $P_M(T) = 99\% = 0{,}99$ $P_{\overline{M}}(T) = 0{,}1\% = 0{,}001$
	B2.	  $P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T)$ $P(T) = 0{,}5 \times 0{,}99 + 0{,}5 \times 0{,}001 = 0{,}4955$
	B3.	$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}5 \times 0{,}99}{0{,}4955} = \frac{0{,}495}{0{,}4955} = \frac{990}{991} \approx 0{,}99899 < 0{,}999$ La valeur prédictive du test est supérieure à 0,999. Ce test n'est donc pas fiable.