Terminale Spécialité Mathématiques
Tâche n° 16
Coplanarité

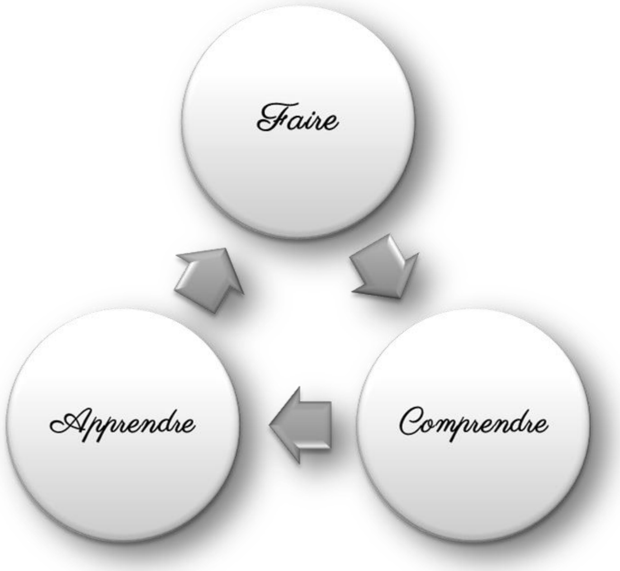

Table des matières

Tâche n° $\boxed{1}$ $\boxed{6}$
Coplanarité
Enoncé des exercices

Exercice 1. Vrai ou Faux ?

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 6 + 2t \\ z = 4 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 8 + 5t' \\ y = 2 - 2t' \\ z = 6 + t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}$$

▶ 1. Affirmation : les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles.
▶ 2. Affirmation : les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont orthogonales.
▶ 3. Affirmation : les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont coplanaires.
▶ 4. Affirmation : les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes au point $K(-2;-6;10)$.

Exercice 2.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$.
On considère les points $A(1;-2;3)$, $B(-2;3;-2)$, $C(-4;1;-3)$ et $D(10;-1;11)$.
▶ 1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
▶ 2. Calculer $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 3.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$.
Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?

Exercice 4.

$ABCDEFGH$ est un cube. On note I et J les milieux respectifs de $[AD]$ et $[HG]$.
Le point K vérifie $\overrightarrow{EK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EF}$ et le point L vérifie $\overrightarrow{DL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DH}$
En utilisant le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$,
▶ 1. Déterminer, sans justifier, les coordonnées des points I, J, K et L.
▶ 2. Ces points sont-ils coplanaires ?

Exercice 5.

$ABCDEFGH$ est un cube. Le point I vérifie $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{DC}$. J est le milieu du segment $[AE]$ et le point K vérifie $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$. L'espace est rapporté au repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.
Les points I, J, K et F sont-ils coplanaires ?

Tâche n° 1 6
Coplanarité
Correction des exercices

Correction de l'exercice 1.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on considère les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 4+t \\ y = 6+2t \\ z = 4-t \end{cases} t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 8+5t' \\ y = 2-2t' \\ z = 6+t' \end{cases} t' \in \mathbb{R}$$

▶ 1. Affirmation : les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles.
▶ 2. Affirmation : les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont orthogonales.
▶ 3. Affirmation : les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont coplanaires.
▶ 4. Affirmation : les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes au point $K(-2;-6;10)$.

Exercice 1.	**1.**	La droite $\mathcal{D}_1$ admet le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur. La droite $\mathcal{D}_2$ admet le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\-2\\1\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur. $$\frac{5}{1} \neq -\frac{2}{2} \neq \frac{1}{-1}$$ Les vecteurs ne sont donc par colinéaires et les droites ne sont pas parallèles. L'affirmation est fausse.
	2.	$$\vec{u}.\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}5\\-2\\1\end{pmatrix} = 5-4-1 = 0$$ Les vecteurs sont orthogonaux et les droites orthogonales. L'affirmation est vraie.
	3.	Pour $t=1, A(5;8;3) \in \mathcal{D}_1$ Pour $t'=-1, B(3;4;5) \in \mathcal{D}_2$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-4\\2\end{pmatrix}$ $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\-2\\1\end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ? Résolvons $x\overrightarrow{AB} + y\vec{u} + z\vec{v} = \vec{0}$: $$\begin{cases} -2x+y+5z=0 \ (L_1) \\ -4x+2y-2z=0 \ (L_2) \\ 2x-y+z=0 \ (L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y+5z=0 \ (L_1) \\ 12z=0 \ (2L_1+L_2) \\ 6z=0 \ (L_1+L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x \\ z=0 \end{cases}$$ $(1;2;0)$ est donc solution soit $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}$ Les droites sont donc coplanaires. L'affirmation est vraie.

	4.	**Méthode n°1 :** Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas parallèles et coplanaires donc elles sont sécantes. $\begin{cases} -2 = 4 + t \\ -6 = 6 + 2t \\ 10 = 4 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -6 \\ t = -6 \\ t = -6 \end{cases}$ donc $K \in \mathcal{D}_1$ $\begin{cases} -2 = 8 + 5t' \\ -6 = 2 - 2t' \\ 10 = 6 + t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = -2 \\ t' = 4 \\ t' = 4 \end{cases}$ donc $K \notin \mathcal{D}_2$ L'affirmation est fausse. **Méthode n°2 :** $\begin{cases} 8 + 5t' = 4 + t \\ 2 - 2t' = 6 + 2t \\ 6 + t' = 4 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 + 5t' \\ 2 - 2t' = 6 + 2t \\ 6 + t' = 4 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 + 5t' \\ 2 - 2t' = 6 + 8 + 10t' \\ 6 + t' = 4 - 4 - 5t' \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 + 5t' \\ -12 = 12t' \\ 6 = -6t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 + 5t' \\ t' = -1 \\ t' = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t' = -1 \end{cases}$ Les droites sont sécantes au point $B(3; 4; 5)$. L'affirmation est fausse.

Correction de l'exercice 2.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k}\right)$.
On considère les points $A(1; -2; 3)$, $B(-2; 3; -2)$, $C(-4; 1; -3)$ et $D(10; -1; 11)$.

▶1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

▶2. Calculer $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 2.	**1.**	$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$
	2.	$2\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}$ $-3\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 15 \\ -9 \\ 18 \end{pmatrix}$ $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ donc $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ J'en déduis que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Correction de l'exercice 3.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k}\right)$.

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?

<table>
<tr>
<td>Exercice 3.</td>
<td>
Résolvons $x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}=\vec{0}$:

$$\begin{cases}-3x+2y+z=0\ \ (L_1)\\ x+2z=0\ \ (L_2)\\ 4x-y-3z=0\ \ (L_3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x+2y+z=0\ \ (L_1)\\ 2y+7z=0\ \ (L_1+3L_2)\\ 5y-5z=0\ \ (4L_1+3L_3)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-3x+2y+z=0\\ 2y+7z=0\ \ (L_2)\\ y-z=0\ \ (L_3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x+2y+z=0\\ 2y+7z=0\ \ (L_2)\\ 9z=0\ \ (L_2-2L_3)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\\ z=0\end{cases}$$

On en déduit que les vecteurs ne sont pas coplanaires.
</td>
</tr>
</table>

Correction de l'exercice 4.

$ABCDEFGH$ est un cube. On note I et J les milieux respectifs de $[AD]$ et $[HG]$.

Le point K vérifie $\overrightarrow{EK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{EF}$ et le point L vérifie $\overrightarrow{DL}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DH}$

En utilisant le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$,

▶1. Déterminer, sans justifier, les coordonnées des points I, J, K et L.

▶2. Ces points sont-ils coplanaires ?

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Exercice 4.</td>
<td>1.</td>
<td>
$$I\left(0;\frac{1}{2};0\right)\quad J\left(\frac{1}{2};1;1\right)\quad K\left(\frac{1}{4};0;1\right)\quad L\left(0;1;\frac{3}{4}\right)$$
</td>
</tr>
<tr>
<td>2.</td>
<td>
$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}1/4\\-1/2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IL}\begin{pmatrix}0\\1/2\\3/4\end{pmatrix}$

Résolvons $x\overrightarrow{IJ}+y\overrightarrow{IK}+z\overrightarrow{IL}=\vec{0}$:

$$\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y=0\ \ (L_1)\\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=0\ \ (L_2)\\ x+y+\frac{3}{4}z=0\ \ (L_3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y+z=0\ \ (2L_2)\\ 2x+y=0\ \ (4L_1)\\ x+7y=0\ \ (4L_3-6L_2)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-y+z=0\\ 2x+y=0\\ -13y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\\ z=0\end{cases}$$

On en déduit que les vecteurs ne sont pas coplanaires.
</td>
</tr>
</table>

Correction de l'exercice 5.

$ABCDEFGH$ est un cube. Le point I vérifie $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{DC}$. J est le milieu du segment $[AE]$ et le point K vérifie $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$. L'espace est rapporté au repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.
Les points I, J, K et F sont-ils coplanaires ?

Exercice 5.

$$I(2;1;0) \quad J\left(0;0;\frac{1}{2}\right) \quad K\left(0;\frac{1}{4};0\right) \quad F(1;0;1)$$

$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1/2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}-2\\-3/4\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IF}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

Résolvons $x\overrightarrow{IJ} + y\overrightarrow{IK} + z\overrightarrow{IF} = \vec{0}$:

$$\begin{cases}-2x - 2y - z = 0 \quad (L_1)\\ -x - \frac{3}{4}y - z = 0 \quad (L_2)\\ \frac{1}{2}x \qquad + z = 0 \quad (L_3)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x + 3y + 4z = 0 \quad (-4L_2)\\ x \qquad + 2z = 0 \quad (2L_3)\\ 2x \quad + 5z = 0 \quad (3L_1 - 8L_2)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}4x + 3y + 4z = 0\\ x \qquad + 2z = 0\\ \qquad z = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 0\\ y = 0\\ z = 0\end{cases}$$

On en déduit que les vecteurs ne sont pas coplanaires.